

高等学校数学系列教材

解析函数边值问题教程

■ 路见可 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

■ 责任编辑：顾素萍

■ 责任校对：黄添生

■ 版式设计：詹锦玲

■ 封面设计：王荆强



ISBN 978-7-307-07431-6

定价：39.00元



高等学校数学系列教材

解析函数边值问题教程

■ 路见可　著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析函数边值问题教程/路见可著.—武汉:武汉大学出版社,2009.12

高等学校数学系列教材

ISBN 978-7-307-07431-6

Ⅰ.解…　Ⅱ.路…　Ⅲ.解析函数—边值问题—高等学校—教材　Ⅳ.O175.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 208022 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北鄂东印务有限公司

开本:720×1000　1/16　印张:28.75　字数:512 千字　插页:1

版次:2009 年 12 月第 1 版　2009 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-07431-6/O·416　定价:39.00 元

内容提要

本书系统地论述了解析函数的边值问题及其在奇异积分方程上应用的最基本的内容，也包括了著者本人的一些研究工作，是函数论分支方面的一本专著。具备数学分析、线性代数和复变函数基本知识的读者可顺利阅读本书。它可作为大学基础数学专业、应用数学专业高年级学生和研究生的教材或教学参考书。由于这一分支在实际问题中有着广泛的应用，本书也可作为有关科技研究人员的参考用书。

序

解析函数的边值问题是复变函数论中极为重要的分支之一. 由于许多力学的、物理学的、工程技术中的实际问题往往可化为这类问题或者化为奇异积分方程，而后者又与这类问题有着紧密的联系，所以它有着广泛的应用. 以 Н. И. Мусхелишвили 为首的前苏联学派，在这方面做出了许多杰出的工作，并以其专著[42]闻名于世. Ф. Д. Гахов 的专著[36]也总结了这方面的工作. 在我们国内，从 20 世纪 50 年代起也有不少同志关心和从事这方面的研究工作，并进行与此有关的一些其他方面的工作，如数学弹性力学、广义解析函数及其在偏微分方程中的应用等.

上面提到的两本专著内容丰富，但篇幅过大，不便于初学. 本书的目的之一就是力图以较少的篇幅将读者带进这一领域中，因此取材尽量选择著者认为最基本的内容. 另一方面，书中也适当地收入了著者以及有关同志在这方面的某些工作成果.

由于设想的读者对象不只限于数学工作者，也包括广大的科技工作者，因此本书要求的预备知识只限于数学分析、线性代数和复变函数. 此外，还用到了一点有关 Fredholm 积分方程的知识，已列入附录中.

由于着眼于实际的需要，因此一些定理的条件并不要求放得很宽，这样既可使论证简洁又无损于应用. 但在所给条件下，则力求论证严谨，说理清楚；而对某些直观上很明显且易于接受的事实则略而不证，对要用到的离主题较远的某些结果则仅指出参考文献而不加证明，以省篇幅.

书末所附参考文献也只列入本书所直接涉及的，因此并不是完备的. 前述两专著中可找到极丰富的文献资料.

本书原稿曾在武汉大学数学系高年级学生和研究生中试用过多次. 我的同事们，特别是林玉波教授、钟寿国教授以及阅读过原稿的同志们，曾提出了不少很好的意见，使书稿有很多改进，著者在此表示衷心的感谢.

本书曾作为学术著作《解析函数边值问题》出版过两次（第一版，上海科学技术出版社，1987；第二版，武汉大学出版社，2004）. 因本书读者对象主要为研究生，已为多校采用作为研究生教材，故此次改版改为现名. 在

改版中，除改正少量误排外，增添了 7.5.4 段和 7.6 节的内容. 此外，本书内容在平面弹性理论中有重要应用，因为有专著［100］系统论述，故本书完全没有提及.

由于著者学识所限，书中缺点错误仍在所难免，尚祈广大读者不吝指正.

路见可

2009 年 6 月于武汉大学

目　录

第一章 Cauchy 型积分

本章介绍研究解析函数边值问题的基本工具，主要是关于 Cauchy 型积分与Cauchy核主值积分的Plemelj公式及其相关性质. 特别还将Cauchy核主值积分推广到高阶奇异积分，并作出经典留数定理的推广. 这些在本书以后各章中都要具体用到.

1.1 Cauchy 型积分的意义

1.1.1 Cauchy 型积分的定义

解析函数边值问题中最重要的工具之一就是 Cauchy 型积分. 我们来说明其定义.

设 $L=\sum_{j=1}^{n}L_j$ 是复平面中一组互不相交的光滑(或分段光滑) 曲线 $L_1, L_2, \cdots, L_n$(开口或封闭) 的集合(图 1-1). 在每一 L_j 上取定一指向为正向，记为 L_j^+，从而 L 也取定了正向

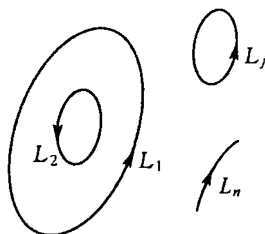


图 1-1

$$L^+=\sum_{j=1}^{n}L_j^+;$$

它们的反向称为负向，分别记为 L_j^- 和 L^-. 以后正向常常略去“+”这一上标，分别简记为 L_j 和 L.

定义 1.1.1 设 $f(t)$ 为定义在 L 上的复函数，则称

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt, \quad z \overline{\in} L \tag{1.1}$$

是以 $f(t)$ 为**核密度的 Cauchy 型积分**，只要此积分存在.

若无特别声明，我们恒认为 $f(t)$ 在 L 上有界可积①. 于是Cauchy型积分(1.1)对平面上任何 $z \overline{\in} L$ 都有意义，包括 $z=\infty$ 在内；且容易验证，$F(\infty)=0$. 亦即，$F(z)$ 定义在除 L 以外的整个扩充平面上.

当所有 L_j 都是封闭曲线，且 L 的正侧(即 L 的正向的左侧)围成一有界区域 D 时，Cauchy型积分(1.1)与通常所说的区域 D 的边界 L 上的**Cauchy积分**不同. 后者的定义是：如果 $f(z)$ 在 D 内全纯(即单值解析)，在 $\overline{D}=D+L$ 上连续，则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t, \quad z \overline{\in} L$$

叫做 $f(t)$ 在 L 上的**Cauchy积分**，且有Cauchy积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t, \quad z\in D. \tag{1.2}$$

Cauchy型积分(1.1)与这里的差别在于：(1.1)中的 $f(t)$ 只是定义在 L 上，而并不知道它是否为 D 中某全纯函数连续延拓到 L 上的边值(或即极限值)，即不知道是否存在着 D 中的全纯函数 $f(z)$，使得

$$f(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D}} f(z),$$

当然也更谈不上(1.2)式是否成立.

所以，Cauchy积分仅仅是Cauchy型积分的特殊情形；而对于(1.1)，一般也不能有

$$\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D}} F(z)=f(t), \quad t\in L.$$

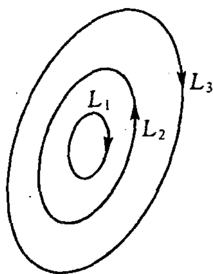


图 1-2

例1 设 $L=L_1+L_2+L_3$ 是一个包围着一个的三条光滑封闭曲线，各 L_j 的正向已如图1-2所取. 试计算

$$F(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-z}, \quad z \overline{\in} L.$$

解 显然

$$F(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}[\log(t-z)]_L=\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2\pi}[\arg(t-z)]_{L_j}.$$

这里(以及以后)$[\cdots]_L$ 表示当 t 沿 L 的正向环行一周时方括号内 t 的连续函数值的改变量.

当 z 位于 L_1 所围的内域中时，上式右端的三项中，相应于 $j=1,3$ 的两

---

① 若 $f(t)$ 无界，则认为其在 Riemann 意义下绝对可积.

项均为 -1，而相应于 $j=2$ 的项为 $+1$，因此 $F(z)=-1$. 当 z 位于 L_1 与 L_2 之间的环形区域中时，右端相应于 $j=1$ 的项为 0，其他两项一为 $+1$，一为 -1，故 $F(z)=0$. 同理，当 z 位于 L_2 与 L_3 之间时，$F(z)=-1$；当 z 位于 L_3 所围的外域中时，$F(z)=0$.

例 2 L 同上，求

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{t}{t-z}\mathrm{d}t,\quad z\,\overline{\in}\,L.$$

解 因

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \mathrm{d}t+\frac{z}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-z}=\frac{z}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-z},$$

故由上例知，

$$F(z)=\begin{cases}0, & \text{当 } z \text{ 位于 } L_1,L_2 \text{ 之间或在 } L_3 \text{ 之外时},\\ -z, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

例 3 计算

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\widehat{ab}}\frac{\mathrm{d}t}{t-z},\quad z\,\overline{\in}\,\widehat{ab},$$

这里 $\widehat{ab}$ 是一开口光滑弧段($a\neq b$)，且正向已取定自 a 到 b 的指向(图 1-3).

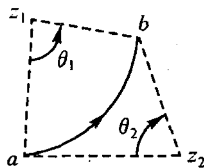


图 1-3

解 显然

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\log(t-z)]_{\widehat{ab}}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\log(b-z)-\log(a-z)]$$
$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\log\frac{b-z}{a-z},$$

其中 $\log(t-z)$ 作为 t 的函数已在 $\widehat{ab}$ 上任意取定一连续支，而最后右端式子中的对数可理解为 ζ 的函数 $\log\dfrac{b-\zeta}{a-\zeta}$（它以 a,b 为支点，设平面已沿 $\widehat{ab}$ 剖开，因此可取单值分支）当 $\zeta=\infty$ 时取 0 值的那个分支(因为 $F(\infty)=0$) 在 $\zeta=z$ 处的值. 因此，

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\ln\left|\frac{b-z}{a-z}\right|+\mathrm{i}\theta\right)^{①},$$

其中 $\theta=\arg\dfrac{b-z}{a-z}$ 是 $z\to\infty$ 时 $\theta\to 0$ 的那一支. 事实上，θ 就是当 t 自点 a 沿 $\widehat{ab}$ 连续变到 b 时向量 $t-z$ 的辐角连续改变量，即 $[\arg(t-z)]_{\widehat{ab}}$ 的值. 例如，

① 注意，当 x 为正数时，我们永远用 $\ln x$ 表示 x 的实对数值，而把记号 $\log x$ 仍留给多值函数；所以，$\log x=\ln x+2n\pi\mathrm{i}$，$\log z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$，等等.

对于图 1-3 中 z_1, z_2，θ 分别取值 $\theta_1 > 0$，$\theta_2 < 0$.

此外还可看到，当 z 在 a 或 b 附近时，$F(z)$ 有对数型的奇异性.

1.1.2 分区全纯函数

在 Cauchy 型积分(1.1)中，取定某一点 $z \overline{\in} L$，于是可作 z 的一邻域与 L 无公共点，在邻域中任取 $z+h$，并令 $h \to 0$，则用类似于对 Cauchy 积分情况时的证法，可以证明 $F'(z)$ 存在，且

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt, \quad z \overline{\in} L; \tag{1.3}$$

更一般地，对任何自然数 n，将有

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt, \quad z \overline{\in} L. \tag{1.3$'$}$$

由此可见，当 z 不在 L 上时，由(1.1)定义的 $F(z)$ 是解析的，甚至在 $z = \infty$ 处也是如此(请读者自证). 换句话说，由 Cauchy 型积分(1.1)定义的函数 $F(z)$，在被 L 分割的全平面的各个(连通)区域中，包括 ∞ 点在内，都是全纯的. .

例如，若 L 是一条封闭(分段)光滑曲线，则(1.1)定义的 $F(z)$ 在 L 所围的内域与外域中分别各代表一全纯函数；而若 L 是一条(分段)光滑开口弧段，则(1.1)定义的 $F(z)$ 是全平面用 L 剖开后的区域中的一个全纯函数.

注意，我们仍不知道当 z 从 L 的某侧趋于 L 上的某点 t 时，$F(z)$ 的极限值(或称边值)是否存在；而这种极限值的存在性对我们来说是极端重要的.

一般地，我们给出下面的定义：

定义 1.1.2 设 L 是有限条互不相交的封闭曲线的集合，它把全平面分割成有限个区域. $F(z)$ 是这样一函数，它在每个这种区域中全纯，在 $z=\infty$ 处至多有一极点，且当 z 从 L 的任一确定的侧趋于 L 上的任何点 t 时，$F(z)$ 的极限值即边值存在，则称 $F(z)$ 是以 L 为跳跃(或间断)曲线的**分区(片)全纯函数**. 如果 L 中含有开口弧段，则要求在各端点附近，$F(z)$ 有不到一阶的奇异性，即，若 c 为 L 的一端点，则在 $z=c$ 附近，

$$|F(z)| \leqslant \frac{C}{|z-c|^{\nu}}, \quad 0 \leqslant \nu < 1, C \text{ 为常数}.$$

注意，当 z 从 L 的另一侧趋于 L 上同一点 t 时，极限值可以不同. $F(z)$ 在某区域的边界上边值处处存在，往往说成它可以从这个区域连续延拓到其边界上. 因此，分区全纯函数可以从每个区域中连续延拓到边界上；当然，边

界含有开口弧段时，端点处例外.

如果在 $z=\infty$ 处 $F(z)$ 的 Laurent 展式为

$$F(z)=a_k z^k+a_{k-1}z^{k-1}+\cdots,\quad a_k\neq 0,$$

则称 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处为 k **阶的**或**阶数为** k. 故 $k>0$ 时，它以 $z=\infty$ 为 k 阶极点；$k<0$ 时，它以 $z=\infty$ 为 $-k$ 阶零点；而 $k=0$ 时，表示 $F(\infty)\neq 0$ 且有限. 因此，分区全纯函数 $F(z)$ 要求在 $z=\infty$ 处有有限阶.

当 z 从 L 的正侧即正向的左侧趋于 L 上某点 t 时(当然不是开口弧段的端点，下同)，$F(z)$ 的边值(若存在) 记为 $F^+(t)$，而当 z 从 L 的负侧即右侧趋于 t 时，边值记为 $F^-(t)$ (图 1-4)；而把

$$\varphi(t)=F^+(t)-F^-(t)$$

称为 $F(z)$ 在 t 处的**跳跃或跃度**. $\varphi(t)$ 作为 t 的函数，称为**跳跃函数**.

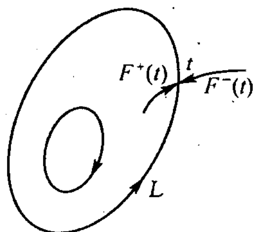


图 1-4

例如，例 2 中的 $F(z)$ 为一分区全纯函数，其跳跃函数为 $\varphi(t)=t$.

一般说来，(1.1) 中定义的 $F(z)$ 虽然在被 L 剖开的各区域中全纯，而且 $F(\infty)=0$ (即在 ∞ 处阶数至多为 -1)，但由于不知道 $F^{\pm}(t)$ 是否存在，所以还不能断定它是否为一分区全纯函数. 在下一节中，我们将对核密度 $f(t)$ 加以适当条件限制，使得 $F^{\pm}(t)$ 的确存在，从而 $F(z)$ 便是分区全纯函数了.

当然，我们可以类似地定义分区亚纯(或称半纯) 函数，这里不再赘述.

习　　题

1. 对于 Cauchy 型积分(1.1)，求证：

$$F(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right),\ F'(z)=O\left(\frac{1}{|z|^2}\right),\ \cdots\quad (z\to\infty).$$

2. 计算 Cauchy 型积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\operatorname{Re} t}{t-z}dt,$$

其中 L 是单位圆周 $|t|=1$，且已取定反时针向为正向.

提示　在 L 上，$t\bar{t}=1$.

答　当 $|z|<1$ 时，$F(z)=\frac{z}{2}$；当 $|z|>1$ 时，$F(z)=-\frac{1}{2z}$.

3. Cauchy 积分(1.2) 是不是分区全纯函数?

1.2 Plemelj 公式

1.2.1 Cauchy 主值积分

为解决上节中提出的边值$F^{\pm}(t)$是否存在的问题，即

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L,\ z\text{ 在 }L\text{ 正侧或负侧}\tag{2.1}$$

是否存在的问题，自然地就会想到要考虑积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L.$$

但很明显，这个积分一般说来是发散的. 也就是说，当在 L 上 t_0 的两边各任取一点 t',t'' 时，

$$\lim_{t',t''\to t_0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L-\widehat{t't''}}\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t\tag{2.2}$$

一般不存在. 然而，与通常实域中定积分主值相类似，如果以 t_0 为中心、充分小的正数 η 为半径作一圆周，使它与 L 的交点恰好为两个，按 L 的正向，一个是 t' 在 t_0 的后边，另一个是 t'' 在 t_0 的前边[①]，以 L_η 记 $\widehat{t't''}$，这时

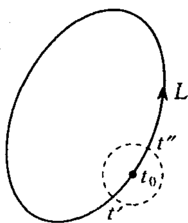


图 1-5

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L-L_\eta}\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t\tag{2.3}$$

是可能存在的(图 1-5).

例如，如果 L 由一条光滑封闭曲线构成，$f(t)\equiv 1$，取定 L 的反时针向为正向，则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L-L_\eta}\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\log(t'-t_0)-\log(t''-t_0)],$$

这里 $\log(t-t_0)$ 作为 t 的函数已在 $L-L_\eta$ 上取定一(任意)连续分支. 但由于 $|t'-t_0|=|t''-t_0|=\eta$，故上式又可写成

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L-L_\eta}\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi}[\arg(t'-t_0)-\arg(t''-t_0)],$$

---

① 对(分段)光滑曲线来说，可以证明这种 η 一定存在，证明从略.

右边[…]中为一角，它等于当 t 自 t'' 沿 $L-L_\eta$ 变动到 t' 时复数 $t-t_0$ 的辐角连续改变的值，即向量 $t''-t_0$ 到向量 $t'-t_0$ 间的夹角．显然，当 $\eta\to 0$ 从而 $t',t''\to t_0$ 时，这个角的极限值为 π．因此，

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L-L_\eta}\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}=\frac{1}{2}. \tag{2.4}$$

但若 t',t'' 是 L 上 t_0 两边的任意两点，由于 $t',t''\to t_0$ 时，一般 $\left|\frac{t'-t_0}{t''-t_0}\right|$ 的极限不存在，所以 $\log\frac{t'-t_0}{t''-t_0}$ 的极限也不存在，因此当 $f(t)\equiv 1$ 时(2.2)是不存在的．

一般地，我们给出下面的定义：

定义 1.2.1 如果极限(2.3)存在，则将此极限记为

$$\text{V.P.}\ \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,$$

或仍简记为 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t$，称之为 $f(t)$ 沿 L 上的 **Cauchy 主值积分**，$f(t)$ 称为它的**核密度**，这个极限值就称为**积分主值**．$1/(t-t_0)$ 则称为 **Cauchy 核**．

注意，如果极限(2.2)存在，即上面这一积分在通常反常积分意义下收敛，则其值当然与积分主值一致．因此，收敛的反常积分也可看做 Cauchy 主值积分．以后遇见上面形式的积分时恒理解为 Cauchy 主值积分，不一一声明．

沿用(1.1)的记号，不妨记此主值为 $F(t_0)$，即

$$F(t_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t=\lim_{\eta\to 0}\int_{L-L_\eta}\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

要注意，(2.5)中的主值和(2.1)中的极限值(如果二者都存在)一般是不同的．仍以 L 为一条光滑封闭曲线(取反时针向为正向)且 $f(t)\equiv 1$ 为例，容易算出

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-z}=\begin{cases}1, & 当\ z\in D^+;\\ 0, & 当\ z\in D^-,\end{cases}$$

这里 D^+ 与 D^- 分别表示 L 所围的内域与外域，从而 $F^+(t_0)=1$，$F^-(t_0)=0$；但我们由(2.2)已经知道

$$F(t_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}=\frac{1}{2}. \tag{2.4$'$}$$

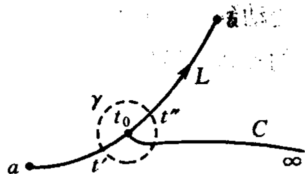


图 1-6

这里，$F(t_0)$ 是$F^+(t_0)$ 与$F^-(t_0)$ 的平均值.

我们来观察，当 $L=\widehat{ab}$ 是一开口光滑弧段时(2.4) 将变得怎样. 这时 $t_0\in L$ 但 $\neq a,b$ (图 1-6). 作小圆如前，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{ab}}\frac{dt}{t-t_0}=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\widehat{at'}}\frac{dt}{t-t_0}+\int_{\widehat{t''b}}\frac{dt}{t-t_0}\right)$$
$$=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{t'-t_0}{a-t_0}+\log\frac{b-t_0}{t''-t_0}\right),$$

其中η已取得充分小，使得$t',t''\in L$，且$\neq a,b$. 这里的对数可以认为例如取定这样的连续分支：从 t_0 出发在L 的负侧作一剖线C 延伸到无穷远点且不再与L相交，在此剖开的平面上，取$\log(z-t_0)$的任一连续分支；记小圆周在L正侧的弧段为γ，则当t自a出发，沿L到达t'后再沿γ到达t''，然后再沿L到达b时，$\log(t-t_0)$ 均有确定的值，且在弧$\widehat{at'}$ 与弧$\widehat{t''b}$ 上均有连续变化. 于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{ab}}\frac{dt}{t-t_0}=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{b-t_0}{a-t_0}+\log\frac{t'-t_0}{t''-t_0}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{b-t_0}{a-t_0}+\frac{1}{2},\tag{2.6}$$

这是因为，$|t'-t_0|=|t''-t_0|$，故

$$\log\frac{t'-t_0}{t''-t_0}=i[\arg(t'-t_0)-\arg(t''-t_0)]=i\theta,$$

这里θ是当t从t''沿γ转到t'时向量$t-t_0$的辐角变化值. 当$\eta\to 0$时，$\theta\to\pi$.

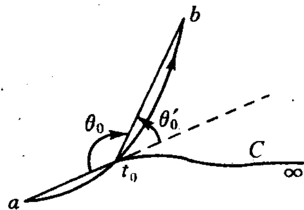


图 1-7

(2.6) 式中 $\log\dfrac{b-t_0}{a-t_0}$ 的虚部

$$\arg(b-t_0)-\arg(a-t_0)$$

事实上是向量 $a-t_0$ 不越过剖线 C 旋转到向量 $b-t_0$ 的角度 θ_0(如图 1-7 所示情况，θ_0 为一负钝角). 由此可见，(2.6) 也可改写为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{ab}}\frac{dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{b-t_0}{t_0-a}=\frac{\theta_0'}{2\pi}+\frac{1}{2\pi i}\ln\left|\frac{b-t_0}{t_0-a}\right|,\tag{2.6$'$}$$

其中 $\log\dfrac{b-t_0}{t_0-a}$ 的虚部为$\theta_0'=\pi+\theta_0$ (在图 1-7 的情况下，θ_0' 为一正锐角).

1.2.2 曲线上弧长与弦长的关系

为了以后的需要，我们来讨论光滑曲线 L（开口或封闭）上任意两点间弧长与弦长间的一些关系．注意，当 L 为封闭曲线时，其上两点间的弧长恒指较短的那段弧长．

若 L 上的任意点 $t=x+\mathrm{i}y$ 用弧长参数 s 来表示（从 L 上某点量起作为弧长起点，按曲线正向作为 s 的增加方向；如果 L 是开口的，则不妨以 L 正向的起点作为弧长的起点），则其自然方程为 $t=t(s)$，或即

$$x=x(s),\ y=y(s),\quad 0\leqslant s\leqslant L, \tag{2.7}$$

这里也用 L 表示曲线 L 的长度．由于 L 光滑，所以 $t(s)$ 或 $x(s)$ 与 $y(s)$ 都有连续导数，且熟知

$$x'(s)^2+y'(s)^2=1.$$

首先我们证明：

引理 1.2.1 *设 L 是一光滑曲线，对于 L 上任意两点 $t=t(s)$，$t_0=t(s_0)$，当 $s\to s_0$ 时，一致地有*

$$\frac{|t-t_0|}{|\widehat{tt_0}|}=\frac{|t-t_0|}{|s-s_0|}\to 1 \tag{2.8}$$

（我们用 $|\widehat{tt_0}|$ 表示 $\widehat{tt_0}$ 的弧长）．

证 由

$$\begin{aligned}|t-t_0|^2&=[x(s)-x(s_0)]^2+[y(s)-y(s_0)]^2\\&=[x'(s_0+\theta_1(s-s_0))^2+y'(s_0+\theta_2(s-s_0))^2]\\&\quad\cdot(s-s_0)^2,\quad 0<\theta_1,\theta_2<1,\end{aligned}$$

以及 $x'(s),y'(s)$ 在 $[0,L]$ 上的一致连续性，立刻知道 $|t-t_0|^2/|s-s_0|^2$ 一致收敛于 1．再由

$$0\leqslant 1-\frac{|t-t_0|}{|s-s_0|}\leqslant 1-\frac{|t-t_0|^2}{|s-s_0|^2}$$

可知引理成立． □

这引理说明，光滑曲线上相邻两点间的弦长与弧长不仅是等价无穷小，而且还一致地等价．

有了上面的引理，立刻可证下一重要事实：

引理 1.2.2 *设 L 是一光滑曲线，则必存在某正数 $C\ (0<C<1)$，使对 L 上*

任意两点 t_0, t，下一不等式成立：

$$C|\widehat{t_0 t}| \leqslant |t - t_0| \leqslant |\widehat{t_0 t}|. \tag{2.9}$$

证 右边不等式显然，现证左边的.

为此，先设 L 是开口曲线，则 $|\widehat{t_0 t}| = |s - s_0|$. 由引理 1.2.1，必有 $\delta > 0$ 存在，使当 $|t - t_0| < \delta$ 时，

$$\frac{|t - t_0|}{|\widehat{t_0 t}|} = \frac{|t - t_0|}{|s - s_0|} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{*}$$

另一方面，当 $|t - t_0| \geqslant \delta$ 时，

$$\frac{|t - t_0|}{|\widehat{t_0 t}|} = \frac{|t - t_0|}{|s - s_0|} \geqslant \frac{\delta}{L}. \tag{**}$$

故只要取 $C = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{L}\right\}$，(2.9) 式就成立.

今设 L 是封闭曲线，注意这时(2.9) 中的 $\widehat{t_0 t}$ 永远指的是 L 上的劣弧，所以当 δ 足够小时，只要 $|t - t_0| < \delta$，便有 $|\widehat{t_0 t}| = |s - s_0|$，从而(*) 式仍成立. 而当 $|t - t_0| \geqslant \delta$ 时，只要在(* *) 式右边把分母中的 L 改为 $L/2$，它仍成立. □

引理 1.2.3 极限式(2.4) 对于封闭光滑曲线 L 上的一切点 t_0 一致地成立.

证 记 L 上任意点 $t = t(s)$ 处的倾角(从 x 轴正向转动到 s 处正向切线的夹角) 为 φ，则 φ 为 s 或 t 的一致连续函数. 注意 $\widehat{t' t_0}$ 与 $\widehat{t_0 t''}$ 上必分别存在点 τ'，τ'' 使 L 在这里的切线分别平行于弦 $t' t_0$ 与 $t_0 t''$. 记这两正向切线的夹角为 $\psi = \varphi(\tau'') - \varphi(\tau')$. 由一致连续性，任给 $\varepsilon > 0$，必有 $\delta > 0$ 存在，只要 $|\widehat{\tau' \tau''}| < \delta$，就有 $|\psi| < \varepsilon$. 注意 τ', τ'' 都在以 t_0 为中心、η 为半径的圆内，故由不等式 (2.9) 知，

$$\begin{aligned} |\widehat{\tau' \tau''}| &< |\widehat{t' t''}| = |\widehat{t' t_0}| + |\widehat{t_0 t''}| \\ &\leqslant C(|t' - t_0| + |t_0 - t''|) = 2C\eta. \end{aligned}$$

所以只要取 $\eta < \frac{\delta}{2C}$，就有 $|\psi| < \varepsilon$. 但 $\pi - \psi = \angle t' t_0 t''$，故它一致趋于 π，即 (2.4) 一致地成立. □

从前面(2.4) 式的证明中我们还可看出，如果把 $|t' - t_0| = |t'' - t_0| = \eta \to 0$ 的条件改为

$$\frac{|t' - t_0|}{|t'' - t_0|} \to 1,$$

则可知(2.4)成立. 又从这一引理还可看出，如果$|t'-t_0|/|t''-t_0|$一致地趋于1，则(2.4)也一致地成立. 特别，如果我们总是取t',t''使$|\widehat{t't_0}|=|\widehat{t_0t''}|$，甚至使$|\widehat{t't_0}|/|\widehat{t_0t''}|$一致地趋于1，则由引理1.2.1，$|t'-t_0|/|\widehat{t't_0}|$以及$|t''-t_0|/|\widehat{t_0t''}|$都一致地趋于1，从而(2.4)也一致地成立. 这些讨论对我们以后都是有用的.

下面我们来讨论：当L是分段光滑曲线时，是否存在常数C使不等式(2.9)成立.

设L是一分段光滑曲线，在其上有唯一的角点t_0（图1-8），但不是尖点，即L在t_0处的两条单侧切线间的夹角α适合$0<\alpha<\pi$. 今在L上任取两不同点t_1,t_2，我们要证明，对于某正数C来说，不等式(2.9)仍成立. 当t_1,t_2位于t_0的同一边时（当L是封闭曲线时，当然是指较短的弧$\widehat{t_1t_2}$不通过t_0的情况），(2.9)成立无问题. 今设t_1,t_2位于t_0的不同边.

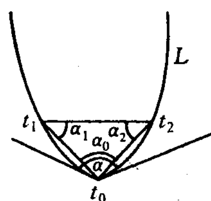


图1-8

记由t_0,t_1,t_2形成的三角形的三个内角分别为$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$，则由

$$\frac{|t_1-t_2|}{\sin\alpha_0}=\frac{|t_1-t_0|}{\sin\alpha_2}=\frac{|t_2-t_0|}{\sin\alpha_1}\geqslant\frac{|t_1-t_0|+|t_2-t_0|}{2},$$

知

$$\frac{|t_1-t_2|}{|t_1-t_0|+|t_2-t_0|}\geqslant\frac{\sin\alpha_0}{2}.$$

记$h=\min\{\alpha,\pi-\alpha\}$. 因为$\lim\limits_{t_1,t_2\to t_0}\alpha_0=\alpha$，故可取$\delta>0$充分小，使得只要$|t_1-t_0|<\delta$，$|t_2-t_0|<\delta$，就可使

$$\frac{h}{2}<\alpha_0<\pi-\frac{h}{2}.$$

因此，这时

$$\begin{aligned}|t_1-t_2|&\geqslant\frac{1}{2}\sin\frac{h}{2}\,(|t_1-t_0|+|t_2-t_0|)\\&\geqslant\frac{C}{2}\sin\frac{h}{2}\,(|\widehat{t_1t_0}|+|\widehat{t_2t_0}|)\\&=\frac{C}{2}\sin\frac{h}{2}\,|\widehat{t_1t_0t_2}|.\end{aligned}$$

可见当$|t_1-t_0|<\delta$，$|t_2-t_0|<\delta$时，(2.9)仍成立，只要把C改为$\frac{C}{2}\sin\frac{h}{2}$

当$|t_1-t_0|$与$|t_2-t_0|$中至少有一个大于或等于δ时，显然$|t_1-t_2|$有正的下确界A（当L为封闭曲线时，注意已限定$|\widehat{t_1t_0t_2}|\leqslant\frac{L}{2}$且$t_1,t_2$位于$t_0$的两边，所以$|t_1-t_2|$的下确界也不会是零）. 于是，

$$|t_1-t_2|\geqslant A\geqslant\frac{A}{L}|\widehat{t_1t_2}|.$$

这样，(2.9) 式总是成立的.

当L上有有限个角点(不是尖点)时，完全可类似地证明. 于是我们有

引理1.2.4 对于不具有尖点的分段光滑曲线L，不等式(2.9) 仍成立.

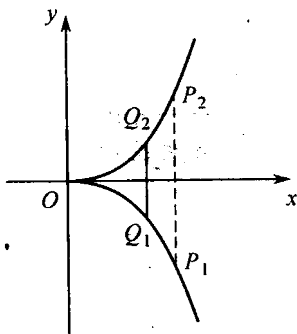


图 1-9

当L上有尖点时，一般说来(2.9) 左边的不等式不能成立. 试看下例. 设L是半立方抛物线$y^2=x^3$即$y=\pm x^{\frac{3}{2}}$上$0\leqslant x\leqslant 1$的一段，即$\widehat{P_1OP_2}$(图 1-9)，它在O处有一尖点. 任取x，$0<x<1$，得L上相应的一段弧$\widehat{Q_1OQ_2}$，故

$$\frac{|\overline{Q_1Q_2}|}{|\widehat{Q_1OQ_2}|}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{|\widehat{OQ_2}|}<x^{\frac{1}{2}}.$$

可见当$x\to 0$时，上式右边极限为0，从而不可能存在$C>0$使(2.9) 左边不等式成立.

1.2.3 Hölder 条件

为保证Cauchy主值积分存在，必须要求其核密度满足某种条件. 这里将介绍一种在应用中常见的条件. 仍先限定L为光滑曲线.

定义1.2.2 设$f(t)$定义于(开口或封闭的)光滑曲线L上. 若对L上任意两点t',t''，恒有

$$|f(t')-f(t'')|\leqslant A|t'-t''|^{\alpha}\quad(0<\alpha\leqslant 1),\tag{2.10}$$

这里A,α都是确定的常数，则称$f(t)$在L上满足α阶的**Hölder 条件**或H^α条件，记为$f(t)\in H^\alpha(L)$或简记为$\in H^\alpha$，而α称为**Hölder 指数**；若不强调指出指数α，也可简记为$f(t)\in H(L)$或$\in H$. 也可这样理解：

$$H=\bigcup_{\alpha}H^\alpha.$$

当$\alpha=1$时，条件H^1也称为**Lipschitz 条件**.

当然我们也可定义 $f(t)$ 在 L 上某点 t_0 处满足 H 条件，即对于 L 上任何点 t，恒有

$$|f(t)-f(t_0)|\leqslant A|t-t_0|^{\alpha}\quad(0<\alpha\leqslant 1).\tag{2.10)'}$$

注 在上述定义中，所以要限制 $0<\alpha\leqslant 1$ 是因为：如果 $\alpha=0$，则 $f(t)\in H^0$ 意味着 $f(t)$ 是一有界函数，对我们来说，这种条件太宽了(更不必说 $\alpha<0$ 意味着 $f(t)$ 为无界的情况了)；如果 $\alpha>1$，则 $f(t)\in H^{\alpha}$ 意味着 $f(t)$ 是一常数(证明留给读者)，这是一种平凡情况，不必讨论[参看(2.4)和(2.6)或(2.6)′].

对于 H 类的函数，以下的一些性质成立：

1° 如果 $f(t)\in H$，则 $f(t)$ 必连续.

2° 如果 $f(t)\in H^{\alpha}$，又 $0<\beta\leqslant\alpha$，则必 $f(t)\in H^{\beta}$. 亦即，当 $\beta\leqslant\alpha$ 时，$H^{\alpha}\subset H^{\beta}$.

3° 如果 $f(t),\varphi(t)$ 都 $\in H^{\alpha}$，则 $f\pm\varphi, f\varphi, f/\varphi$ (但 $\varphi\neq 0$ 于 L 上) 也都 $\in H^{\alpha}$.

4° 如果不等式(2.10) 对于 L 上充分接近的点 t',t'' 成立，例如，它对于满足 $|t'-t''|<\delta$ ($\delta>0$ 为某一常数) 的点 t',t'' 成立，则必 $f(t)\in H^{\alpha}$. 换句话说，要求证 $f(t)\in H^{\alpha}$ 时，只要证明对于满足 $|t'-t''|<\delta$ 的点 t',t'' 条件(2.10) 成立就够了.

5° 如果 $f'(t)$ 有界(连续更不必说了)，则 $f(t)\in H^1$.

6° H 类中函数的复合函数仍 $\in H$.

7° 如果 $L=\sum_{j=1}^{n}L_j$，且各 L_j 两两互不相交，若 $f(t)\in H^{\alpha}$ 于每个 L_j 上，则必 $f(t)\in H^{\alpha}$ 于 L 上.

8° 如果 $f(t)$ 连续于 L 上，而 L 可分成有限个弧段，使得 $f(t)$ 在每一段上 $\in H^{\alpha}$，则必 $f(t)$ 在整个 L 上也 $\in H^{\alpha}$.

这些性质的证明都很容易. 我们只指出：5° 的证明中要把 $f(t)$ 的实部与虚部分开来讨论，因为对于复变函数，中值定理不成立；此外，还要利用不等式(2.9)(8° 的证明也要用到这一点). 这些证明留给读者.

定义 1.2.2 可不加改变地推广到不带尖点的分段光滑曲线；而且由于这时有不等式(2.9)，定义中的 $|t'-t''|$ 可改为 $|\widehat{t't''}|$ 且定义等价. 但若 L 带有尖点，由于(2.9) 左边的不等式一般不再成立，情况就不一样了；若把 $|t'-t''|$ 改为 $|\widehat{t't''}|$，条件就弱多了，我们不妨把后一条件称为**弱 H 条件**，而把前者称为**强 H 条件**. 一般我们只考虑强 H 条件，简称 H 条件. 在这种条件的意义下，即使 L 带尖点，性质 1° ~ 8° 仍成立.

定义 1.2.2 还可推广到二元(或多元) 情况，我们有

定义 1.2.3 设 $f(t,\tau)$ 定义于 $L\times L$ 上(L 仍为开口或封闭的光滑曲线). 如果对于 L 上的任意点 t',t'',τ',τ'', 恒有

$$|f(t',\tau')-f(t'',\tau'')|\leqslant A|t'-t''|^{\alpha}+B|\tau'-\tau''|^{\beta}$$
$$(0<\alpha,\beta\leqslant 1),\qquad (2.11)$$

则称 $f(t,\tau)$ 在 $L\times L$ 上满足 $H^{\alpha,\beta}$ 或 H **条件**, 这里 A,B,α,β 都是常数. α,β 分别称为关于 t,τ 的 **Hölder 指数**.

上面的性质 $1^\circ\sim 8^\circ$ 也可推广到多元函数情形.

上述有关不带或带有尖点的分段光滑曲线的议论也可用于多元函数的情况.

在定义 1.2.2 中, 也可将 $f(t)$ 的定义中 $t\in L$ 改为 $z\in T$, 其中 T 为复平面中任一集合, 从而可相应地定义 $f(z)\in H^{\alpha}(T)$ 或 $H(T)$, 它的一些类似性质也成立.

例 1 设 L 为任一(分段) 光滑曲线, 求证:

$$f(t)=|t-a|^{\alpha}\in H^{\alpha}\quad(0<\alpha\leqslant 1)$$

于 L 上, 其中 a 为一任意常数.

证 首先注意, 对于任何 λ, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 易证

$$\lambda^{\alpha}+(1-\lambda)^{\alpha}\geqslant 1.$$

由此又可证得: 对于任何非负实数 A,B, 恒有

$$|A^{\alpha}-B^{\alpha}|\leqslant|A-B|^{\alpha}.$$

于是, 当 $t_1,t_2\in L$ 时, 恒有

$$\big||t_1-a|^{\alpha}-|t_2-a|^{\alpha}\big|\leqslant\big||t_1-a|-|t_2-a|\big|^{\alpha}\leqslant|t_1-t_2|^{\alpha}.$$

例 2 设 $L=\widehat{ab}$ 为一开口光滑弧段, 则

$$f(t)=(t-a)^{\alpha}\in H^{\alpha}\quad(0<\alpha\leqslant 1)$$

于 L 上, 这里 $(t-a)^{\alpha}$ 为沿 L 任意取定的一连续分支.

证 不失一般性, 可设 a 是坐标原点 O (图 1-10); 并设 L 上的弧坐标 s 从 O 量起. L 上任意点 t 可写为 $t=t(s)=x+iy$. 又设 Ot 的倾角为 $\varphi=\varphi(s)$, 且不妨设 $f(t)$ 所取的连续分支是

$$f(t)=|t|^{\alpha}e^{i\alpha\varphi}.$$

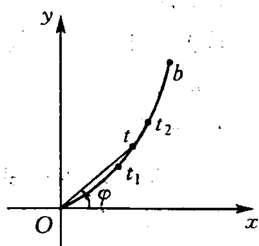


图 1-10

在 L 上任取两点 $t_1=t(s_1)$, $t_2=t(s_2)$, 其相应倾角分别记为

$$\varphi_1=\varphi(s_1),\quad \varphi_2=\varphi(s_2),$$

且不妨设 $s_1<s_2$, 而记 $s_2-s_1=\Delta s>0$.

首先注意(由例 1),

$$
\begin{aligned}
&|f(t_2)-f(t_1)| \\
&= \left| |t_2|^\alpha e^{i\alpha\varphi_2} - |t_1|^\alpha e^{i\alpha\varphi_1} \right| \\
&\leqslant \left| |t_2|^\alpha e^{i\alpha\varphi_2} - |t_1|^\alpha e^{i\alpha\varphi_2} \right| + |t_1|^\alpha |e^{i\alpha\varphi_2} - e^{i\alpha\varphi_1}| \\
&\leqslant \left| |t_2|^\alpha - |t_1|^\alpha \right| + |t_1|^\alpha \left| 2i\, e^{i\alpha\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}} \sin\frac{\alpha(\varphi_2-\varphi_1)}{2} \right| \\
&\leqslant |t_2-t_1|^\alpha + 2|t_1|^\alpha \left| \sin\frac{\alpha(\varphi_2-\varphi_1)}{2} \right|;
\end{aligned}
$$

因此只须考虑右边最后一项,记为 T. 分成两种情况讨论:

(i) 设 $s_1 \leqslant \Delta s$. 这时因 $|t_1| \leqslant s_1 \leqslant \Delta s$, 由(2.9),有

$$
T \leqslant 2\Delta s^\alpha \leqslant \frac{2}{C^\alpha}|t_2-t_1|^\alpha.
$$

(ii) 设 $s_1 > \Delta s$. 这时可写

$$
T \leqslant \alpha s_1^\alpha |\varphi_2 - \varphi_1| = \alpha s_1^\alpha |\varphi'(s^*)| \Delta s,
$$

其中 s^* 是 s_1, s_2 之间的某一数. 注意到 $\varphi(s) = \arctan\frac{y(s)}{x(s)}$, 且 $|y'(s)|$, $|x'(s)|$ 都不超过 1, 故

$$
|\varphi'(s)| = \left| \frac{xy'(s) - yx'(s)}{x^2+y^2} \right| \leqslant \frac{2}{|t|}.
$$

因此,如果记 $t^* = \varphi(s^*)$, 则有

$$
T \leqslant \frac{2\alpha s_1^\alpha \Delta s}{|t^*|};
$$

但 $|t^*| \geqslant Cs^* \geqslant Cs_1$, 从而

$$
T \leqslant \frac{2\alpha\Delta s}{Cs_1^{1-\alpha}} = \frac{2\alpha}{C}\left(\frac{\Delta s}{s_1}\right)^{1-\alpha}\Delta s^\alpha < \frac{2\alpha}{C}\Delta s^\alpha \leqslant \frac{2\alpha}{C^{1+\alpha}}|t_2-t_1|^\alpha.
$$

因此 $t^\alpha \in H^\alpha$. 证毕.

例 3 设 L 为无尖点的分段光滑曲线, $t_0 \in L$, 则

$$
f(t) = (t-t_0)^\alpha \in H^\alpha \quad (0 < \alpha \leqslant 1).
$$

证 由于性质 8° 对这样的 L 显然也成立,故由例 2 即得.

例 4 设 $\varphi(s)$ 是定义在实区间 $a \leqslant s \leqslant b$ 上的复函数, $a \leqslant s_0 \leqslant b$. 若 $\varphi'(s) \in H^\alpha$, 定义

$$
\Phi(s) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(s)-\varphi(s_0)}{s-s_0}, & \text{当 } s \neq s_0; \\ \varphi'(s_0), & \text{当 } s = s_0 \end{cases} \quad (a \leqslant s \leqslant b),
$$

则 $\Phi(s) \in H^{\alpha}$.

证 设

$$|\varphi'(s_1) - \varphi'(s_2)| \leqslant A|s_1 - s_2|^{\alpha}. \tag{*}$$

因为

$$\varphi(s) - \varphi(s_0) = \int_{s_0}^{s} \varphi'(s)\mathrm{d}s = (s - s_0)\int_0^1 \varphi'(s_0 + u(s - s_0))\mathrm{d}u,$$

故当 $s \neq s_0$ 时，

$$\Phi(s) = \int_0^1 \varphi'(s_0 + u(s - s_0))\mathrm{d}u.$$

但当 $s = s_0$ 时，由定义，上式也成立. 因此由(*)式，

$$|\Phi(s_1) - \Phi(s_2)| \leqslant A|s_1 - s_2|^{\alpha}\int_0^1 u^{\alpha}\mathrm{d}u = \frac{A}{\alpha+1}|s_1 - s_2|^{\alpha}.$$

本例还可推广到更一般的情形，见[42]，§7.

例 5 设 L 为一条 **Lyapunov 曲线**，即光滑曲线 L，其上(正向)切线的倾角 θ 作为弧长 s 的函数时，$\theta(s) \in H$. 已给 $f'(t) \in H$ 于 L 上. 设 t_0 为 L 上一定点. 定义

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, & 当\ t \neq t_0; \\ f'(t_0), & 当\ t = t_0, \end{cases} \quad t \in L,$$

则必 $F(t) \in H$.

证 分别设 t_0, t 在 L 上的弧坐标为 s_0, s，并定义

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_0}{s - s_0}, & 当\ s \neq s_0; \\ t'(s_0), & 当\ s = s_0, \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{s - s_0}, & 当\ s \neq s_0; \\ f'(t_0)t'(s_0), & 当\ s = s_0. \end{cases}$$

因 $t'(s) \in H$，由例 4，$\varphi(t) = \varphi(t(s))$ 作为 s 的函数 $\in H$. 又 $f(t) = f(t(s))$ 由性质 6° 也 $\in H$. 再由例 4，$\psi(t) = \psi(t(s)) \in H$. 又因 $|t'(s)| = 1$，故

$$F(t(s)) = \frac{\psi(t(s))}{\varphi(t(s))} \in H.$$

再把 $s = s(t)$ 看做 $t = t(s)$ 的反函数，由于 $s'(t) = \dfrac{1}{t'(s)}$ 存在，故 $s(t) \in H$. 再由性质 6° 即知 $F(t) \in H$.

注 由此例可看出，Lyapunov 曲线也可定义为 $\theta(t) \in H$ 的曲线.

习　题

1. 设 $f(t,\tau)$ $(t,\tau\in L)$ 当固定一个变量时对另一变量一致地 $\in H$. 例如固定 τ 时，

$$|f(t,\tau)-f(t',\tau)|\leqslant A|t-t'|^{\alpha}\quad(0<\alpha\leqslant 1),$$

其中 A 与 τ 无关；同样，固定 t 时也有类似不等式. 求证：$f(t,\tau)$ 作为二元函数时也 $\in H$.

2. 设 L 是无尖点的分段光滑曲线，求证：$|t-\tau|^{\alpha}$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ 作为 L 上 t,τ 的二元函数时 $\in H^{\alpha}$（即 $H^{\alpha,\alpha}$).

3. 若 $f(t,\tau)\in H$ 于 $L\times L$ 上，求证：$f(t,t)\in H$ 于 L 上.

4. 试证：例 4 中的 $\Phi(s)$ 看做 s,s_0 的二元函数 $\Phi(s,s_0)$ 时 $\in H$. 同样，把例 5 中的 $F(t)$ 看做二元函数 $F(t,t_0)$ 时也 $\in H$.

1.2.4 Cauchy 主值积分存在的一个充分条件

如果仅假定核密度 $f(t)$ 在 L 上连续，还不足以保证 Cauchy 主值积分 (2.5) 存在. 但我们有下面的

引理 1.2.5 设 L 是一开口或封闭的光滑曲线，已取定正向；若 $f(t)\in H$ 于 L 上，则主值积分(2.5)存在，且(当 L 为开口曲线时，t_0 不是 L 的端点)

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}t+\frac{f(t_0)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0},\quad t_0\in L,$$

式中右边第一个积分已是通常的(反常)积分.

证 如果把上式中诸积分都理解为主值积分，等式自然成立，只要右边两个主值积分存在. 但右边第二个主值积分我们早已知道存在[参看(2.4)或(2.6)]，所以只须证明右边第一个主值积分存在.

设 $f(t)\in H^{\alpha}$ $(0<\alpha\leqslant 1)$. 故由(2.9)，

$$\left|\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right|\leqslant\frac{A}{|t-t_0|^{1-\alpha}}\leqslant\frac{A}{C^{1-\alpha}}\frac{1}{|s-s_0|^{1-\alpha}},$$

而显然 $\int_L\frac{\mathrm{d}s}{|s-s_0|^{1-\alpha}}$ 是收敛的. 所以，作为通常的反常积分，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}t$$

也收敛，从而作为主值积分也存在. □

特别，当 L 为封闭光滑曲线时，由(2.4)，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt + \frac{1}{2}f(t_0), \quad t_0 \in L. \tag{2.12}$$

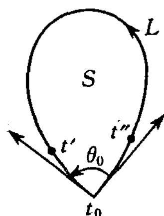


图 1-11

如果封闭曲线 L（以反时针向为正向）有一角点 t_0，在 t_0 处两条单侧切线间面向 L 所围内域 S 的夹角为 θ_0（图 1-11），也称为 S 在 t_0 处的内角，则这时(2.4) 式不再成立. 因为这时当 $t', t'' \to t_0$ 时，$\angle t''t_0t' \to \theta_0$，所以，在现在的情况下，应有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-t_0} = \frac{\theta_0}{2\pi}. \tag{2.13}$$

由此我们有

引理 1.2.6 设 L 是分段光滑封闭曲线，仍取反时针向为正向，其上 t_0 为一角点，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt + \frac{\theta_0}{2\pi}f(t_0), \tag{2.14}$$

其中 θ_0 为 t_0 处两单侧切线在 L 正侧所夹的内角.

注意，即使 t_0 为一尖点($\theta_0 = 0$ 或 2π)，(2.13) 以及(2.14) 都成立. 又若在主值积分定义中，把 $|t'-t_0| = |t''-t_0| = \eta \to 0$ 改为 $|\widehat{t't_0}| = |\widehat{t_0t''}| = \eta \to 0$ 时，(2.12) ~ (2.14) 仍都成立.

1.2.5 Plemelj 公式

现在来讨论 Cauchy 型积分(1.1) 的边值存在问题. 我们将证明，当 $f(t) \in H$ 时，其边值的确存在，且与 Cauchy 主值积分有密切联系. 详细说来，我们有下一重要定理，它是本书以下各章论证的基础.

定理 1.2.1 设 L 是一条分段光滑曲线，$f(t) \in H$ 于 L 上，则对于任何 $t_0 \in L$（当 L 为开口曲线时，t_0 不为 L 的端点），Cauchy 型积分(1.1) 的边值存在，且有下列 **Plemelj 公式**：

$$\left.\begin{aligned} F^+(t_0) &= \left(1-\frac{\theta_0}{2\pi}\right)f(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt, \\ F^-(t_0) &= -\frac{\theta_0}{2\pi}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt, \end{aligned}\right\} \quad t_0 \in L, \tag{2.15}$$

其中 $F^+(t_0)$ 与 $F^-(t_0)$ 表示(1.1) 中的 $F(z)$ 当 z 分别从 L 的正侧与负侧趋于 t_0 时的极限值，而 θ_0 是 L 在 t_0 处的两单侧切线在 L 正侧所张的

角$(0\leqslant\theta_0\leqslant 2\pi)$.

特别，如果 t_0 是 L 上的光滑点，或者整个 L 是光滑曲线，则(2.15)将简化为

$$F^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L.\tag{2.16}$$

(2.16)式将是研究解析函数边值问题的基本工具，应特别注意.

这一定理的经典证明比较复杂. 我们这里将采用杜金元[3]中较简的证法，且其方法也可用来较简地证明下节中的 Privalov 定理.

我们首先引进一个记号. 设在复平面中已给一连续曲线 L. 对于平面中任意一点 z，把它与 L 上距离最近的一点记为 z_L（如果这种点不止一个，则 z_L 表示其中任意确定的一个）. 特别，当 $z=t\in L$ 时，$t_L=t$. 显然，当 $z\to t_0\in L$ 时，$z_L\to t_0$. 又，对任意点 $t\in L$，总有

$$|t-z_L|\leqslant|t-z|+|z-z_L|\leqslant 2|t-z|.\tag{2.17}$$

如果 $f(t)\in H^\alpha$，则由(2.17)立刻可得

$$|f(t)-f(z_L)|\leqslant A|t-z_L|^\alpha\leqslant 2^\alpha A|t-z|^\alpha.\tag{2.18}$$

为了证明定理 1.2.1 以及后面的需要，我们来建立下一引理.

引理 1.2.7 设 L 是一分段光滑曲线，$f(t)\in H^\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ 于 L 上. 若 l 是 L 上的一段子弧(其长仍记为 l)，则对于平面中任何点 z，恒有

$$\left|\int_l\frac{f(t)-f(z_L)}{t-z}\mathrm{d}t\right|\leqslant Ml^\alpha,\tag{2.19}$$

其中 M 是一个与 l 以及 z 均无关的常数.

注意，即使 $z\in L$，(2.19)也成立；这时由于(2.18)的关系，(2.19)中的积分仍是通常的非主值积分.

证 设 $l=\widehat{ab}$. 记 L 上任何点 t 的弧坐标为 s_t. 不妨设 $s_a<s_b$.

先设 l 是一光滑弧段. 由于 L 由有限个光滑弧段组成，所以(2.9)式在每一光滑弧段上成立，且 C 可取成同一数，亦即 C 与 l 无关. 由(2.18)式，

$$\begin{aligned}\left|\int_l\frac{f(t)-f(z_L)}{t-z}\mathrm{d}t\right|&\leqslant 2^\alpha A\int_l\frac{|\mathrm{d}t|}{|t-z|^{1-\alpha}}\leqslant 2A\int_l\frac{|\mathrm{d}t|}{|t-z_l|^{1-\alpha}}\\&\leqslant\frac{2A}{C^{1-\alpha}}\int_l\frac{\mathrm{d}s}{|s-s_{z_l}|^{1-\alpha}}\\&=\frac{2A}{C^{1-\alpha}}\left[\int_{s_a}^{s_{z_l}}\frac{\mathrm{d}s}{(s_{z_l}-s)^{1-\alpha}}+\int_{s_{z_l}}^{s_b}\frac{\mathrm{d}s}{(s-s_{z_l})^{1-\alpha}}\right]\\&=\frac{2A}{\alpha C^{1-\alpha}}[(s_{z_l}-s_a)^\alpha+(s_b-s_{z_l})^\alpha]\leqslant Ml^\alpha.\end{aligned}$$

再设 l 上含有角点(包括尖点)，则可将 l 分解为无角点的有限条光滑弧，再应用上面结果便可得到(2.19) 式. □

还要注意，当 $z=t_0\in L$ 时，(2.19) 成为

$$\left|\int_l \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}t\right|\leqslant Ml^{\alpha}. \tag{2.20}$$

定理 1.2.1 之证 暂设 L 为封闭曲线，以反时针向为正向，所围内域与外域分别记为 D^+ 与 D^-.

把(1.1) 式改写为

$$\begin{aligned}F(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)-f(z_L)}{t-z}\mathrm{d}t+\frac{f(z_L)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-z}\\&=I_1(z)+I_2(z),\quad z\overline{\in} L.\end{aligned} \tag{$*$}$$

因为 $f(t)\in H$，故

$$\lim_{z\to t_0} I_2(z)=f(t_0)\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-z}.$$

由此立刻可得

$$I_2^+(t_0)=f(t_0),\quad I_2^-(t_0)=0.$$

现在我们来证明

$$\lim_{z\to t_0} I_1(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}t. \tag{2.21}$$

注意

$$\begin{aligned}&\left|I_1(z)-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\int_{L-L_\eta}\frac{f(t)-f(z_L)}{t-z}\mathrm{d}t-\int_{L-L_\eta}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}t\right|\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{L_\eta}\frac{f(t)-f(z_L)}{t-z}\mathrm{d}t\right|+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{L_\eta}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}t\right|\\&=\frac{1}{2\pi}(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3),\end{aligned}$$

其中 η 为充分小的正数. 设 $f(t)\in H^\alpha$. 由引理 1.2.7,

$$\Delta_2\leqslant M\eta^\alpha,\quad \Delta_3\leqslant M\eta^\alpha.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$，可取 η 充分小，使 Δ_2 ,Δ_3 都小于 $\varepsilon/3$. 这样固定 η，并要求

$$|z-t_0|<\frac{\eta}{2}.$$

再来估计 Δ_1. 当 $t\in L-L_\eta$ 时，$|t-t_0|>\eta$，从而 $|t-z|>\dfrac{\eta}{2}$. 于是，

$$\Delta_1 = \left| \int_{L-L_\eta} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-z} \mathrm{d}t + \int_{L-L_\eta} \frac{f(t_0)-f(z_L)}{t-z} \mathrm{d}t - \int_{L-L_\eta} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant \int_{L-L_\eta} \frac{|f(t)-f(t_0)|\,|z-t_0|}{|t-z|\,|t-t_0|} |\mathrm{d}t| + \int_{L-L_\eta} \frac{|f(t_0)-f(z_L)|}{|t-z|} |\mathrm{d}t|$$

$$\leqslant \frac{4ML}{\eta^2} |z-t_0| + \frac{2L}{\eta} |f(t_0)-f(z_L)|.$$

由于 $z \to t_0$ 时，$f(z_L) \to f(t_0)$，故当 z 充分接近于 t_0 时，上式右边也 $< \frac{\varepsilon}{3}$；因而(2.21) 得证. 这样，

$$I_1(t_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{f(t)}{t-t_0} \mathrm{d}t - \frac{f(t_0)}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}.$$

再由(2.13) 与 $I_2^\pm(t_0)$ 的结果，便得(2.15) 式.

现设 $L = \widehat{ab}$ 是一开口分段光滑曲线，则可将 L 补充一段 L' 使 $L+L'$ 成为一封闭的分段光滑曲线(图 1-12)；同时，将 $f(t)$ 也延拓到 L' 上，使其在整个 $L+L'$ 上 $\in H$，这是做得到的，例如，把 $f(t)$ 在 L' 上作线性延拓即可. 由于

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{L'} \frac{f(t)}{t-z} \mathrm{d}t$$

当 $z \overline{\in} L'$ 时全纯，今 $t_0 \overline{\in} L'$ (因 t_0 不是 L 的端点)，故 $z \to t_0$ 时它就以

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{L'} \frac{f(t)}{t-t_0} \mathrm{d}t$$

为极限. 于是，由已证得的结果，立刻可知(2.15) 仍成立. □

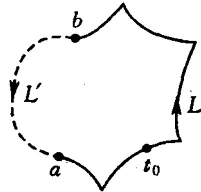


图 1-12

当 L 是由若干条互不相交的光滑或分段光滑曲线构成时，只要 $f(t) \in H$，(2.16) 或(2.15) 仍成立. 当然，L 中若含有开口弧段，则 t_0 不能为其端点.

从以上的证明中还可看出，只要 $f(t)$ 在 t_0 附近的一小段弧上 $\in H$，而在其余部分可积，(2.16) 或(2.15) 也成立.

最后我们还指出下一结果.

定理 1.2.2 设 L 是一分段光滑曲线，$f(t) \in H$ 于 L 上，则对任何 $t_0 \in L$（包括 L 的端点)，恒有

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)-f(t_0)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt\quad(z\overline{\in}L).\quad(2.22)$$

证 因为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)-f(t_0)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)-f(z_L)}{t-z}dt+\frac{f(z_L)-f(t_0)}{2\pi i}\int_L\frac{dt}{t-z},$$

而当 $z\to t_0$ 时，右边第二项显然趋于零；又由(2.21)，右边第一项趋于(2.22) 的右边(注意(2.21) 的证明对开口的 L 也适用)，因此(2.22) 成立. □

习 题

1. 设 t_0 是光滑曲线 L 上的一(非端) 点，L_η 的意义如正文所述. 求证：

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{L_\eta}\frac{dt}{t-t_0}=0.$$

2. 计算$\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\tau^{n-1}}{\tau^n-1}d\tau$，这里$|\tau|=1$ 已取定反时针向为正向，n 为一自然数.

答 1.

3. 计算 Cauchy 主值积分($n\geqslant 0$ 为整数)

$$I_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cot\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta,\quad J_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\theta\cot\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta.$$

提示 作变换 $\tau=e^{i\theta}$，并令 $t=e^{i\varphi}$.

答 当 $n>0$ 时，$I_n=-\sin n\varphi$，$J_n=\cos n\varphi$；当 $n=0$ 时，$I_0=J_0=0$.

4. 设 L 是一封闭光滑曲线，围成一区域 D^+. $f(z)$ 在 D^+ 内全纯，且其在 L 上的边值 $f(t)\in H$. 求证：

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t)}{t-t_0}dt=f(t_0),$$

这里 t_0 为 L 上任意一点，L 已取定反时针向为正向.

5. 上题中，若 $f(z)$ 在 L 所围的外域 D^- 中全纯(包括 ∞ 点)，则结果又将如何?

1.3 Cauchy 型积分边值的性质

1.3.1 Privalov 定理

上节中的 Plemelj 公式是在核密度 $f(t)\in H$ 的条件下推出的. 我们自然

要问：极限函数$F^{\pm}(t_0)$的性质如何？例如是否仍$\in H$？答案是肯定的(对于封闭曲线情况)．下面著名的 **Privalov** 定理解决了更为一般的一个问题．

定理 1.3.1 设L是一封闭的分段光滑曲线，取定(例如反时针向)正向．已给$f(t)\in H^{\alpha}$于L上，则由(1.1)定义的 Cauchy 型积分$F(z)$在L所围的内闭域$\overline{D}^{+}$与外闭域$\overline{D}^{-}$上分别属于H．详细说来，对于任何$z_1,z_2\in\overline{D}^{+}$(或$\overline{D}^{-}$)，我们有

$$|F(z_1)-F(z_2)|\leqslant C|z_1-z_2|^{\alpha},\quad 当\ \alpha<1\ 时; \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}|F(z_1)-F(z_2)|&\leqslant|z_1-z_2|\left(A+B\Big|\ln|z_1-z_2|\Big|\right)\\&\leqslant B'|z_1-z_2|\Big|\ln|z_1-z_2|\Big|\\&或\leqslant C|z_1-z_2|^{1-\varepsilon},\quad 当\ \alpha=1\ 时,\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中ε为任何小于 1 的正数，A,B,B',C均为常数；注意，当z_1或$z_2\in L$时，(3.1)和(3.2)中的$F(z_1)$或$F(z_2)$要分别理解为相应的边值$F^{+}(z_1)$或$F^{+}(z_2)$或者$F^{-}(z_1)$或$F^{-}(z_2)$，视所考虑的区域为$\overline{D}^{+}$或者$\overline{D}^{-}$而定．

这个定理的意思是说，当$f(t)\in H^{\alpha}$时，若$\alpha<1$，则$F(z)$连同其边值分别在$\overline{D}^{+}$与$\overline{D}^{-}$上属于同一个α阶的H类；而当$\alpha=1$时，它们一般只能属于$H^{1-\varepsilon}$而不属于H^{1}．

当$z_1=t_1$，$z_2=t_2$均在L上时，(3.1)，(3.2)就成为

$$|F^{\pm}(t_1)-F^{\pm}(t_2)|\leqslant C|t_1-t_2|^{\alpha},\quad 当\ \alpha<1; \tag{3.1$'$}$$

$$\begin{aligned}|F^{\pm}(t_1)-F^{\pm}(t_2)|&\leqslant|t_1-t_2|\left(A+B\Big|\ln|t_1-t_2|\Big|\right)\\&\leqslant B'|t_1-t_2|\Big|\ln|t_1-t_2|\Big|\\&或\leqslant C|t_1-t_2|^{1-\varepsilon},\quad 当\ \alpha=1.\end{aligned} \tag{3.2$'$}$$

此即表明，$F^{\pm}(t)$均$\in H$于L上．

为了证明这个定理，先引进下列两引理．

引理 1.3.1 假设条件同引理 1.2.7，则对平面中任何点$z\,\overline{\in}\,l$，有

$$\int_l\left|\frac{f(t)-f(z_l)}{(t-z)^2}\right||\mathrm{d}t|\leqslant M|z-z_l|^{\alpha-1},\quad 当\ \alpha<1\ 时; \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\int_l\left|\frac{f(t)-f(z_l)}{(t-z)^2}\right||\mathrm{d}t|&\leqslant A+B\Big|\ln|z-z_l|\Big|\\&或\leqslant M|z-z_l|^{-\varepsilon},\quad 当\ \alpha=1\ 时,\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中A,B,M均为与l和z无关的常数，$0<\varepsilon<1$．

证 由于当 z 远离 l 时，(3.3) 或(3.4) 的左边充分小，故只须证明当 z 充分接近 l 时此二式成立即可.

先设 $l=\widehat{ab}$ 是一光滑弧段. 由(2.18)，(2.17)，

$$\begin{aligned}\int_l\left|\frac{f(t)-f(z_l)}{(t-z)^2}\right||\mathrm{d}t| &\leqslant 2^\alpha A\int_l\frac{|\mathrm{d}t|}{|t-z|^{2-\alpha}}\leqslant 2^\alpha 3^{2-\alpha}A\int_l\frac{|\mathrm{d}t|}{(3|t-z|)^{2-\alpha}}\\ &\leqslant C_1\int_l\frac{|\mathrm{d}t|}{(|t-z_l|+|z-z_l|)^{2-\alpha}}\\ &\leqslant C_1\int_l\frac{\mathrm{d}s}{(C|s-s_{z_l}|+|z-z_l|)^{2-\alpha}}\\ &=C_1\left\{\int_{s_a}^{s_{z_l}}\frac{\mathrm{d}s}{[C(s_{z_l}-s)+|z-z_l|]^{2-\alpha}}\right.\\ &\qquad\left.+\int_{s_{z_l}}^{s_b}\frac{\mathrm{d}s}{[C(s-s_{z_l})+|z-z_l|]^{2-\alpha}}\right\}.\end{aligned}$$

当 $\alpha<1$ 时，上式右端显然不超过 $\dfrac{2C_1}{C(1-\alpha)}|z-z_l|^{\alpha-1}$，即(3.3) 成立；当 $\alpha=1$ 时，右端等于

$$\frac{C_1}{C}\Big[\ln\big|C(s_{z_l}-s_a)+|z-z_l|\big|+\ln\big|C(s_b-s_{z_l})+|z-z_l|\big|-2\ln|z-z_l|\Big].$$

当 $|z-z_l|$ 不太大，例如小于 1 时，上式不超过

$$\frac{2C_1}{C}\Big[\ln(1+Cl)+\big|\ln|z-z_l|\big|\Big],$$

此即表明(3.4) 式成立.

现设 $l=\widehat{ab}$ 上有角点. 不失一般性，可设 l 上有唯一角点 t_0. 记 $l_1=\widehat{at_0}$，$l_2=\widehat{t_0b}$. 当 $\alpha<1$ 时，由上面所证，

$$\begin{aligned}\int_l\left|\frac{f(t)-f(z_l)}{(t-z)^2}\right||\mathrm{d}t| &\leqslant\int_{l_1}+\int_{l_2}\leqslant M(|z-z_{l_1}|^{\alpha-1}+|z-z_{l_2}|^{\alpha-1})\\ &\leqslant 2M|z-z_l|^{\alpha-1},\end{aligned}$$

因为 $|z-z_l|=\min\{|z-z_{l_1}|,|z-z_{l_2}|\}$，即(3.3) 成立. 当 $\alpha=1$ 时，同样可得

$$\int_l\leqslant 2A+B\Big(\big|\ln|z-z_{l_1}|\big|+\big|\ln|z-z_{l_2}|\big|\Big).$$

故当 $|z-z_l|\leqslant 1$ 时，或者 $|z-z_{l_1}|$ 与 $|z-z_{l_2}|$ 都不超过 1，则

$$\ln|z-z_l|\leqslant\ln|z-z_{l_j}|<0,\quad j=1,2,$$

于是

$$\int_l\leqslant 2\Big(A+B\big|\ln|z-z_l|\big|\Big);$$

或者$|z-z_{l_1}|$与$|z-z_{l_2}|$中有一个等于$|z-z_l|$，另一个大于1且必有界. 在这两种情形下(3.4) 均成立. □

引理1.3.2 设L是一封闭的分段光滑曲线，$f(t)\in H^\alpha$于L上，$F(z)$由(1.1) 定义，则当$z\overline{\in}L$时，

$$|F'(z)|\leqslant M|z-z_L|^{\alpha-1}, \quad 当\ \alpha<1\ 时; \tag{3.5}$$

$$|F'(z)|\leqslant A+B\Big|\ln|z-z_L|\Big|\ 或\leqslant M|z-z_L|^{-\varepsilon}, \quad 当\ \alpha=1\ 时, \tag{3.6}$$

其中A,B,M与z的位置无关，$\varepsilon>0$.

证 由于z不在L上，故

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{(t-z)^2}\mathrm{d}t, \quad z\overline{\in}L.$$

注意到$\int_L\frac{\mathrm{d}t}{(t-z)^2}=0$，故

$$|F'(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_L\frac{f(t)-f(z_L)}{(t-z)^2}\mathrm{d}t\right|,$$

由此应用引理 1.3.1，即得所要的结论. □

定理 1.3.1 之证 我们将只证明(3.1) 式，因为用类似的方法，引用上面两引理的相应结论，同样可证得(3.2) 式. 因此，设$\alpha<1$.

我们先证明，当z_1,z_2中至少有一点在L上时，(3.1) 式成立. 与证明定理 1.2.1 时相仿，写

$$\begin{aligned}F(z)&=I_1(z)+I_2(z)\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)-f(z_L)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+\frac{f(z_L)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-z}, \quad z\overline{\in}L.\end{aligned} \tag{3.7}$$

当$z\in D^+$时，$I_2(z)=f(z_L)$，$I_2^+(t)=f(t)$，故由(2.18)，

$$|I_2(z)-I_2^+(t)|\leqslant 2^\alpha A|z-t|^\alpha, \quad z\in D^+,\ t\in L.$$

当z从D^+内趋于L上另一点t_0时，便有

$$|I_2^+(t_0)-I_2^+(t)|\leqslant 2^\alpha A|t_0-t|^\alpha, \quad t_0,t\in L.$$

这样，如果用$I_2^+(z)$表示$I_2(z)$ $(z\in D^+)$连同其延拓到边界L上的函数，则有

$$|I_2^+(z)-I_2^+(t)|\leqslant 2^\alpha A|z-t|^\alpha, \quad z\in\overline{D^+},\ t\in L. \tag{3.8}$$

当$z\in D^-$时，$I_2(z)=0$，$I_2^-(t)=0$. 因此，用类似记号，

$$|I_2^-(z)-I_2^-(t)|=0, \quad z\in\overline{D^-},\ t\in L. \tag{3.8$'$}$$

现在我们要证明，对于任何 $z\overline{\in} L$，$t\in L$，有

$$|I_1(z)-I_1(t)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_L\frac{f(\tau)-f(z_L)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau-\int_L\frac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\right|$$

$$\leqslant B|z-t|^{\alpha},\quad 0<\alpha<1. \tag{3.9}$$

为此，只须证明 $|z-t|$ 充分小时此式成立即可. 以 t 为圆心、$\eta=2|z-t|$ 为半径作圆 D_η（η 已充分小）. 考虑 L 上按正向首先进入和最后离开 D_η 的二交点间的弧段. 此弧段上有一些小段可能越出 D_η，把越出的小弧段中含有角点者（只会有有限个）从该弧段中去掉，剩下的记为 L_η，设 L 上共有 n 个角点，则显然 $L_\eta\leqslant\dfrac{2(n+1)\eta}{C}$（此处 C 的意义见(2.9)）. 于是

$$|I_1(z)-I_1(t)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left[\left|\int_{L_\eta}\frac{f(\tau)-f(z_L)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau\right|+\left|\int_{L_\eta}\frac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\right|\right.$$

$$+\left|\int_{L-L_\eta}\frac{f(\tau)-f(z_L)}{(\tau-t)(\tau-z)}(z-t)\mathrm{d}\tau\right|$$

$$\left.+\left|\int_{L-L_\eta}\frac{f(t)-f(z_L)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\right|\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4).$$

由引理 1.2.7，

$$\delta_1,\delta_2\leqslant ML_\eta^{\alpha}\leqslant M_1\eta^{\alpha}=2^{\alpha}M_1|z-t|^{\alpha}.$$

由引理 1.3.1 并考虑到 $\left|\dfrac{\tau-z}{\tau-t}\right|\leqslant 2$，知

$$\delta_3\leqslant 2|z-t|\int_{L-L_\eta}\left|\frac{f(\tau)-f(z_L)}{(\tau-z)^2}\right||\mathrm{d}\tau|$$

$$\leqslant 2M|z-t|\cdot|z-z_{L-L_\eta}|^{\alpha-1}$$

$$\leqslant 2M|z-t|^{\alpha},$$

这是因为 z_{L-L_η} 必在 D_η 之外的缘故.

由(2.18)，易见

$$\delta_4=|f(t)-f(z_L)|\left|\int_{L-L_\eta}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}\right|$$

$$\leqslant M_2|f(t)-f(z_L)|\leqslant M_3|z-t|^{\alpha}.$$

把以上诸式相加，便得(3.9)式.

再由(3.8)或(3.8)′，便知

$$|F(z)-F^{\pm}(t)|\leqslant C|z-t|^{\alpha},\quad z\in\overline{D^{\pm}},\ t\in L.$$

现设 $z_1,z_2\in D^+$. 记直线段$\overline{z_1z_2}$到 L 的距离为 ρ. 因此，在$\overline{z_1z_2}$上必存

在一点 z，使 $|z-z_L|=\rho$（注意，当 $\overline{z_1z_2}$ 与 L 相交时，$\rho=0$，$z=z_L$ 为其交点）.

如果 $|z_1-z_2|\geqslant|z-z_L|$，则

$$|z_1-z_L|\leqslant|z_1-z|+|z-z_L|\leqslant 2|z_1-z_2|.$$

同理，$|z_2-z_L|\leqslant 2|z_1-z_2|$. 故由前式知，

$$\begin{aligned}|F(z_1)-F(z_2)|&\leqslant|F(z_1)-F^+(z_L)|+|F^+(z_L)-F(z_2)|\\&\leqslant C(|z_1-z_L|^\alpha+|z_2-z_L|^\alpha)\\&\leqslant 2^{\alpha+1}C|z_1-z_2|^\alpha.\end{aligned}$$

如果 $|z_1-z_2|\leqslant|z-z_L|$，这时 $\overline{z_1z_2}$ 必全在 D^+ 内，则由引理 1.3.2（积分路径取作 $\overline{z_1z_2}$），

$$\begin{aligned}|F(z_1)-F(z_2)|&=\left|\int_{z_1}^{z_2}F'(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant M\int_{z_1}^{z_2}|\zeta-\zeta_L|^{\alpha-1}|\mathrm{d}\zeta|\\&\leqslant M\int_{z_1}^{z_2}|z-z_L|^{\alpha-1}|\mathrm{d}\zeta|\\&=M|z_1-z_2||z-z_L|^{\alpha-1}\\&\leqslant M|z_1-z_2|^\alpha.\end{aligned}$$

因此(3.1) 对 $z_1,z_2\in D^+$ 时也成立.

同理可证 $z_1,z_2\in D^-$ 时也是如此. □

如果当 $\alpha=1$ 时只想获得(3.2) 中最后不等式，则可直接从(3.1) 推得，因为 $H^1\subset H^{1-\varepsilon}$ 对任何 $0<\varepsilon<1$ 成立.

由这一定理，我们还可得到下一结果.

定理 1.3.2 设 L 是一封闭光滑曲线，$f(t)\in H^\alpha$ 于 L 上，则对 Cauchy 主值积分

$$F(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau,\quad t\in L,\tag{3.10}$$

当 $\alpha<1$ 时 $F(t)\in H^\alpha$，当 $\alpha=1$ 时 $F(t)\in H^{1-\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$.

证 由前一定理，$F^\pm(t)$ 有所述性质. 但另一方面，由 Plemelj 公式，

$$2F(t)=F^+(t)+F^-(t),$$

故得所要求的结果. □

注意，此定理对封闭的分段光滑曲线并不处处成立，因为这时由(2.15)，有

$$2F(t)=F^+(t)+F^-(t)-\left(1-\frac{\theta_t}{\pi}\right)f(t),$$

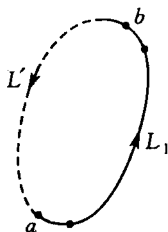


图 1-13

其中θ_t是L在t处的正侧夹角，作为t的函数，它在角点处不连续.

但是，定理 1.3.2 可推广到开口的光滑曲线 $L=\widehat{ab}$. 这时对于 L 上不包含其端点的任何一段弧L_1来说，$F(t)\in H^{\alpha}(L_1)$ $(\alpha<1)$ 或 $H^{1-\varepsilon}(L_1)$ $(\alpha=1)$. 这是因为，我们可以把 L 延拓为光滑封闭曲线 $L+L'$（图 1-13），$f(t)$ 也作相应线性延拓，则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L+L'}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=F(t)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L'}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau,\quad t\in L_1,$$

必在L_1上$\in H^{\alpha}$或$H^{1-\varepsilon}$. 而由于整个L_1与L'无公共点，故上式右边最后一项是$t\in L_1$上的全纯函数，当然也属于相应的H类，从而$F(t)$也是如此.

习　题

1. 假设条件同引理 1.2.7，求证：对于任何点 $z\overline{\in} l$，有

$$\int_l\left|\frac{f(t)-f(z_L)}{(t-z)^n}\right||\mathrm{d}t|\leqslant M|z-z_l|^{\alpha-n+1}\quad(n>1).$$

2. 如果L是由若干条互不相交的封闭光滑曲线所构成的，定理 1.3.1 应如何叙述？

1.3.2 Cauchy 型积分边值的导数

设 L 为一光滑的封闭曲线. 现设核密度 $f(t)$ 有满足 H 条件的导数：$f'(t)\in H$. 由(1.3)，用分部积分法，易知

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{f'(t)}{t-z}\mathrm{d}t,\quad z\overline{\in} L. \tag{3.11}$$

再由 Plemelj 公式，就有

$$F'^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}f'(t_0)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{f'(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L; \tag{3.12}$$

而且由 Privalov 定理知，$F'^{\pm}(t_0)\in H$. 另一方面，$F^{\pm}(t_0)$ 作为 L 上的函数时，其导数$F^{\pm\prime}(t_0)$是否存在？是否就是$F'^{\pm}(t_0)$？答案是肯定的：

定理 1.3.3　如果 L 是封闭光滑曲线，$f'(t)\in H$ 于L 上，则对于 Cauchy 型积分(1.1) 来说，$F^{\pm\prime}(t_0)\in H$，且

$$F^{\pm\prime}(t_0)=F'^{\pm}(t_0),\quad t_0\in L. \tag{3.13}$$

证 我们只证关于$F^+(t)$的性质，关于$F^-(t)$可类似地证明.

设 L 所围内域为 D^+. 由于 $f'(t) \in H$，故由(3.11)，$F'(z)$ 连同其边值 $F'^+(t)$ 根据 Privalov 定理在$\overline{D^+}$上 $\in H$. 今在 L 上取定一点 a 以及任意点 t，记 $\widehat{at} = l$ (图 1-14). 另在 D^+ 内连接 a 到 t 作一光滑弧 γ. 由 Cauchy 定理，

$$\int_\gamma F'(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_l F'^+(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

但$\int_\gamma F'(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F^+(t) - F^+(a)$，故上式成为

$$F^+(t) - F^+(a) = \int_a^t F'^+(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

右边积分为沿 l 进行的. 已知$F'^+(\tau)$在 l 上连续，两边取导数即得(3.13)式. □

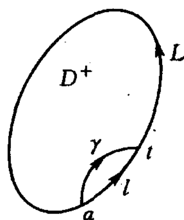


图 1-14

由此定理，立即可得

推论 1.3.1 假设同定理 1.3.3，如果记

$$F(t_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t, \quad t_0 \in L,$$

则有

$$F'(t_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f'(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t, \quad t_0 \in L, \tag{3.14}$$

且 $F'(t_0) \in H$.

证 由 Plemelj 公式知，

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2}f(t_0) + F(t_0).$$

故由定理 1.3.3 知，

$$F'^+(t_0) = F^{+\prime}(t_0) = \frac{1}{2}f'(t_0) + F'(t_0).$$

再由(3.12)便得(3.14). $F'(t_0) \in H$ 显然. □

以上定理和推论很容易推广到 L 为有限条互不相交的光滑曲线情况.

1.4 核密度中含有参数的 Cauchy 主值积分和积分换序问题

1.4.1 核密度带参数的 Cauchy 主值积分

现在来考虑下列 Cauchy 主值积分：

$$F(t_0,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t,\tau)}{t-t_0}dt,\quad t_0\in L,\ \tau\in T,\tag{4.1}$$

其中 T 为平面中某一点集. 这里积分核密度中含有一参数 τ. 对于 $F(t_0,\tau)$，我们有下面的

定理 1.4.1 设 L 是一光滑封闭曲线(或一组互不相交的这种曲线)，T 为平面中的一有界闭集，且 $f(t,\tau)\in H$ 于 $L\times T$ 上，则 $F(t_0,\tau)$ 也必 $\in H$ 于 $L\times T$ 上.

证 根据 1.2.3 段习题 1，只要证明 $F(t_0,\tau)$ 分别对 t_0 与 τ 作为一元函数时一致地 $\in H$ 即可. 设 $f(t,\tau)\in H^{\alpha,\beta}$.

当 $\tau\in T$ 固定时，由于

$$|f(t_1,\tau)-f(t_2,\tau)|\leqslant B|t_1-t_2|^\alpha,\quad t_1,t_2\in L,$$

且 B 与 $\tau\in T$ 的位置无关，所以前面有关 Cauchy 主值积分的论证这里全都成立，因而 $F(t_0,\tau)$ 作为 t_0 的函数时关于 $\tau\in T$ 一致地 $\in H$.

现任意固定 $t_0\in L$. 任取 $\tau_1,\tau_2\in T$ 且设 $|\tau_1-\tau_2|=\eta$ 已充分小. 我们有

$$\begin{aligned}
&F(t_0,\tau_2)-F(t_0,\tau_1)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t,\tau_2)-f(t,\tau_1)}{t-t_0}dt\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_\eta} \frac{f(t,\tau_2)-f(t,\tau_1)}{t-t_0}dt\\
&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\eta} \frac{f(t,\tau_2)-f(t_0,\tau_2)}{t-t_0}dt\\
&\quad-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\eta} \frac{f(t,\tau_1)-f(t_0,\tau_1)}{t-t_0}dt\\
&\quad+\frac{f(t_0,\tau_2)-f(t_0,\tau_1)}{2\pi i}\int_{L_\eta}\frac{dt}{t-t_0}\\
&=\frac{1}{2\pi i}(I_1+I_2+I_3+I_4),
\end{aligned}$$

其中 L_η 是以 t_0 为中心、η 为半径作圆截下 L 上的一段小弧.

由(2.6)′式，注意到 L_η 的作法，若 $\left|\int_{L_\eta}\frac{dt}{t-t_0}\right|$ 有界，则

$$|I_4|\leqslant 2\pi B|\tau_2-\tau_1|^\beta.$$

应用引理 1.2.7，并注意这里虽然核密度 $f(t,\tau)$ 中含有参数 τ，但由于它关于 τ 一致地 $\in H^\alpha$，所以那里的论证和结论这里完全成立，因此知道

$$|I_2|,|I_3|\leqslant ML_\eta^\alpha=M'|\tau_2-\tau_1|^\alpha.$$

最后来估计 $|I_1|$. 我们有

$$\begin{aligned}|I_1| &\leqslant B|\tau_2-\tau_1|^{\beta}\int_{L-L_\eta}\frac{|\mathrm{d}t|}{|t-t_0|}\\&=\frac{B}{C}|\tau_2-\tau_1|^{\beta}\left(A_1+B_1\left|\ln|\tau_2-\tau_1|\right|\right)\\&\leqslant C_1|\tau_2-\tau_1|^{\beta-\varepsilon}.\end{aligned}$$

由上面的证明，可知 $F(t,\tau)$ 在 L 上连续. 又由于 T 是有界闭集，故 $|F(t,\tau)|\leqslant K$ 有界. 因此，当 $|\tau_2-\tau_1|$ 不太小，例如 $\geqslant\delta_0$ (>0) 时，

$$\frac{|F(t,\tau_2)-F(t,\tau_1)|}{|\tau_2-\tau_1|}\leqslant\frac{2K}{\delta_0},$$

亦即 $F(t,\tau)$ 作为 τ 的函数时关于 $t\in L$ 一致地 $\in H$. □

由定理 1.4.1 立刻可得

推论 1.4.1 *L 同上，且 $f(t,\tau)$ 在 $L\times L$ 上 $\in H$，则*

$$F(t_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t,t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}t\in H,\quad t_0\in L.$$

此由 1.2.3 段习题 3 可知.

我们还要指出，对核密度含参数的 Cauchy 型积分，Plemelj 公式仍然成立. 即，我们有

定理 1.4.2 *设 L 是一封闭光滑曲线，若 $f(t,z)$ 是一函数，当 $t\in L$，$z\in T$ 时 $\in H$，其中 T 是包含 L 在其内部的某一区域. 令*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau,z)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\quad z\in T-L,\tag{4.2}$$

则对于 $t\in L$，有

$$F^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}f(t,t)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau,t)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau.\tag{4.3}$$

此定理的证明方法完全与定理 1.2.1 的相同. 首先，在引理1.2.7 中把 $f(t)$ 改为 $f(t,z)$，$f(z_L)$ 改为 $f(z_L,z)$，那里的论证与结论都成立. 其次，代替定理 1.2.1 证明中的(∗)式，现在有

$$\begin{aligned}F_2(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t,z)-f(z_L,z)}{t-z}\mathrm{d}t+\frac{f(z_L,z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-z}\\&=I_1(z)+I_2(z),\quad z\overline{\in}L.\end{aligned}$$

于是，

$$I_2^+(t_0)=f(t_0,t_0),\quad I_2^-(t_0)=0;$$

而(2.21) 须改为证明

$$\lim_{z\to t_0} I_1(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,t_0)-f(t_0,t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}t.$$

以下的证法完全一样，不过在讨论 $I_1(z)$ 与上式右端的差的模对于 Δ_1 作估计时，要增添两项：

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{L-L_\eta}\frac{f(t,z)-f(t,t_0)}{t-z}\mathrm{d}t\right|,$$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{L-L_\eta}\frac{f(z_L,z)-f(t_0,t_0)}{t-z}\mathrm{d}t\right|,$$

但当 $z\to t_0$ 时它们显然都趋于零. 因此整个证明方法仍有效.

还可注意，在定理 1.4.2 中，如果 $f(t,z)$ 关于 t 仅在 L 的某一侧(包括 L 本身在内) 有意义并满足所设条件，则(4.3) 式也就仅对这一侧的边值成立.

为了以后的需要，我们还来讨论下列类型的 Cauchy 型积分：

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau,z)}{\Pi(\tau)(\tau-z)}\mathrm{d}\tau,\quad z\overline{\in}L,\tag{4.4}$$

其中

$$\Pi(\tau)=\prod_{j=1}^{n}(\tau-t_j),\quad t_j\in L,\tag{4.5}$$

而 L 为一封闭的光滑曲线. 首先我们有

定理 1.4.3 设 $f(t,z)$ 满足定理 1.4.2 的条件，则当 $t\ (\neq t_j)\in L$ 时，下列 Plemelj 公式成立：

$$F^{\pm}(t)=\pm\frac{f(t,t)}{2\Pi(t)}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau,t)}{\Pi(\tau)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau.\tag{4.6}$$

证 将 $1/\Pi(\tau)$ 写成分项分式：

$$\frac{1}{\Pi(\tau)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{C_j}{\tau-t_j}\quad (C_j\ 为常数),$$

于是立即可得

$$F(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{C_j}{z-t_j}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L f(\tau,z)\left(\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{\tau-t_j}\right)\mathrm{d}\tau.$$

再引用 Plemelj 公式即得(4.6). □

同样，若 $f(t,z)$ 的上述条件只对 z 在 L 的一侧邻域中成立，则 Plemelj 公式(4.6) 也只对这一侧成立.

以后还需要下列二引理.

引理 1.4.1 设 L 同前，$f(\tau,t)$ 在 $L\times L$ 上 $\in H$. 记

$$F(t,\zeta)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau,\quad t,\zeta\in L. \tag{4.7}$$

(ⅰ) 如果 $f'_t(t,\tau)\in H$，则

$$F'_t(t,\zeta)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f'_t(t,\tau)}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau\in H. \tag{4.8}$$

(ⅱ) 如果 $f'_\tau(t,\tau)\in H$，则

$$F'_\zeta(t,\zeta)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f'_\tau(t,\tau)}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau\in H. \tag{4.9}$$

证 令

$$F(t,z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\quad z\overline{\in} L.$$

因此，若 L 所围内域为 D^+，则

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D^+}} F(t,z)&=F^+(t,\zeta)=\frac{1}{2}f(t,\zeta)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau\\ &=\frac{1}{2}f(t,\zeta)+F(t,\zeta).\end{aligned} \tag{4.10}$$

(ⅰ) 当 $f'_t(t,\tau)\in H$ 时，显然

$$F'_t(t,z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f'_t(t,\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,$$

所以

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D^+}} F'_t(t,z)=F'^+_t(t,\zeta)=\frac{1}{2}f'_t(t,\zeta)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f'_t(t,\tau)}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau.$$

注意到

$$F(t,z)=\int_a^t F'_t(t,z)\mathrm{d}t+F(a,z),$$

其中 a 是 L 上任一定点，积分是沿 L 进行的，且

$$F^+(t,\zeta)=\int_a^t F'^+_t(t,\zeta)\mathrm{d}t+F^+(a,\zeta),$$

故知

$$F^{+\prime}_t(t,\zeta)=F'^+_t(t,\zeta)=\frac{1}{2}f'_t(t,\zeta)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f'_t(t,\tau)}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau.$$

但由(4.10)知，

$$F^{+\prime}_t(t,\zeta)=\frac{1}{2}f'_t(t,\zeta)+F'_t(t,\zeta).$$

比较以上两式，便知(4.8)成立. $F'_t(t,\zeta)\in H$ 显然.

(ii) 当 $f'_\tau(t,\tau) \in H$ 时，(4.9) 可由(3.14) 推知，从略. □

推论 1.4.2 若 $f'_t(t,\tau), f'_\tau(t,\tau)$ 均 $\in H$，令

$$F(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau,$$

则 $F'(t) \in H$，且

$$F'(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f'_t(t,\tau) + f'_\tau(t,\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau.$$

引理 1.4.2 L 同前. 设

$$F(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\Pi(\tau)(\tau - t)}\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\Pi(t)$ 由(4.5) 给出，而 $f'_t(t,\tau), f'_\tau(t,\tau)$ 均 $\in H$，则 $F(t)$ 连续于 L 上，但 $F(t_j)$ 要理解为 $\lim\limits_{t\to t_j} F(t)$ $(j = 1,2,\cdots,n)$.

证 把 $F(t)$ 改写为

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j \frac{G(t) - G_j(t)}{t - t_j}, \tag{4.11}$$

其中

$$G(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau, \quad G_j(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau - t_j}\mathrm{d}\tau;$$

注意 $G(t_j) = G_j(t_j)$，再把(4.11) 进一步改写为

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j \frac{G(t) - G(t_j)}{t - t_j} - \sum_{j=1}^{n} C_j \frac{G_j(t) - G_j(t_j)}{t - t_j},$$

则由引理 1.4.1 及推论 1.4.2 知，$G'(t), G'_j(t)$ 均 $\in H$. 因此 $F(t)$ 当 $t \to t_j$ 时极限存在，故知 $F(t)$ 连续于 L 上. □

1.4.2 积分换序问题

本段将讨论涉及 Cauchy 主值积分的累次积分交换积分次序的问题. 我们首先证明，一个 Cauchy 主值积分和一个普通积分可以交换次序. 亦即，我们有

定理 1.4.4 设 L 为一(封闭或开口) 光滑曲线，$f(t,\tau) \in H$ 于 $L \times L$ 上，则

$$\int_L \mathrm{d}t \int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = \int_L \mathrm{d}\tau \int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}t. \tag{4.12}$$

证 (4.12) 式两边的累次积分都存在毫无问题，因为当 L 是封闭的时，

两端里层积分均 $\in H$；当 L 为开口的时，它们在 L 的端点附近至多有对数型的奇异性.

把(4.12) 左端改写为

$$\int_L \mathrm{d}t\int_L \frac{f(t,\tau)-f(\tau,\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\int_L \mathrm{d}t\int_L \frac{f(\tau,\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau,$$

其中前一累次积分的次序显然可以交换，因为它的被积函数适合

$$\left|\frac{f(t,\tau)-f(\tau,\tau)}{\tau-t}\right|\leqslant\frac{B}{|\tau-t|^{1-\beta}}\quad(0<\beta\leqslant 1),$$

所以它实际上是一收敛的二重积分. 这样，为了证明(4.12)，只须证明

$$\int_L \mathrm{d}t\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=\int_L \mathrm{d}\tau\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}t, \tag{4.12$'$}$$

已设 $f(\tau)\in H$.

先设 L 是一封闭曲线. 令

$$F(z)=\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\quad z\overline{\in}L.$$

由 Plemelj 公式，

$$F^+(t)=\pi\mathrm{i}f(t)+\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau,\quad t\in L.$$

以此代入(4.12)′ 左边，得

$$\int_L [F^+(t)-\pi\mathrm{i}f(t)]\mathrm{d}t=-\pi\mathrm{i}\int_L f(t)\mathrm{d}t,$$

因为 $F(z)$ 为 L 所围内域中的全纯函数，且连续到 L 上. 另一方面，(4.12)′ 右边显然等于

$$-\int_L f(\tau)\mathrm{d}\tau\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-\tau}=-\pi\mathrm{i}\int_L f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

由此即知(4.12)′ 成立.

今设 $L=\widehat{ab}$ 为一开口弧段. 我们先证明，如果 $f(a)=f(b)=0$，则 (4.12)′ 成立. 为此，把$\widehat{ab}$补充成一光滑曲线C（图 1-15)，同时将 $f(t)$ 延拓，使在补充弧段$C-L$ 上恒等于零. 于是，$f(t)\in H$ 于C 上，由已证得的结果知，

$$\int_C \mathrm{d}t\int_C \frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=\int_C \mathrm{d}\tau\int_C \frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}t;$$

但这实际上就是

$$\int_C \mathrm{d}t\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=\int_L \mathrm{d}\tau\int_C \frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}t.$$

因此，为了证明(4.12)′，只须证明

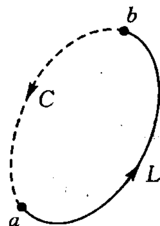


图 1-15

$$\int_{C-L}\mathrm{d}t\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=\int_L\mathrm{d}\tau\int_{C-L}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}t.$$

但此式两边都是通常的积分，因此可以交换次序. 这样，当 $f(a)=f(b)=0$ 时，(4.12)′ 已得证.

我们再证：当 $f(t)\equiv 1$ 时，(4.12)′ 成立，且更有

$$\int_L\mathrm{d}t\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}=\int_L\mathrm{d}\tau\int_L\frac{\mathrm{d}t}{\tau-t}\ (=0).\tag{4.13}$$

由(2.6) 式，上式左边等于

$$\begin{aligned}I&=\int_L\left(\log\frac{b-t}{a-t}+\pi\mathrm{i}\right)\mathrm{d}t\\&=\pi\mathrm{i}(b-a)+\int_L\log(b-t)\ \mathrm{d}t-\int_L\log(a-t)\ \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中对数的取法同图 1-6 及其说明. 用分部积分法，立刻可把上式写成

$$\begin{aligned}I&=\pi\mathrm{i}(b-a)+(b-a)\log(b-a)+(a-b)\log(a-b)\\&=\pi\mathrm{i}(b-a)+\mathrm{i}(b-a)\arg(b-a)+\mathrm{i}(a-b)\arg(a-b),\end{aligned}$$

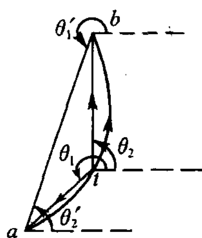


图 1-16

这里的辐角要如下理解：如图 1-16，记

$$\arg(a-t)=\theta_1,\quad \arg(b-t)=\theta_2,$$

则当 t 沿 L 趋于 b 时，$\arg(a-t)$ 趋于 θ_1'，即

$$\arg(a-b)=\theta_1';$$

当 t 沿 L 趋于 a 时，$\arg(b-t)$ 趋于 θ'_2，即

$$\arg(b-a)=\theta'_2.$$

因此 $\theta'_1-\theta'_2=\pi$. 亦即在上式中，

$$\arg(b-a)=\arg(a-b)-\pi.$$

以此代入上式，即知 $I=0$.

在(4.13) 右边把文字 t,τ 互换，立刻也知道它等于零. 因此(4.13) 式得证. 现再证 $f(\tau)=\tau$ 时下式也成立：

$$\int_L\mathrm{d}t\int_L\frac{\tau}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=\int_L\mathrm{d}\tau\int_L\frac{\tau}{\tau-t}\mathrm{d}t\ \left(=\frac{1}{2}(b-a)^2\right).\tag{4.14}$$

此式左边可写成

$$J=\int_L\mathrm{d}t\int_L\left(1+\frac{t}{\tau-t}\right)\mathrm{d}\tau=(b-a)^2+\int_L\left(\log\frac{b-t}{a-t}+\pi\mathrm{i}\right)t\,\mathrm{d}t,\quad (*)$$

其中对数取法如前. 再用分部积分法，易证

$$\begin{aligned}J=&(b-a)^2+\frac{\pi\mathrm{i}}{2}(b^2-a^2)-\frac{1}{2}(b^2-t^2)\log(b-t)\Big|_a^b\\&-\frac{1}{2}\int_L(b+t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}(a^2-t^2)\log(a-t)\Big|_a^b+\frac{1}{2}\int_L(a+t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= (b-a)^2 + \frac{\pi i}{2}(b^2-a^2) + \frac{1}{2}(b^2-a^2)\log(b-a)$$

$$+ \frac{1}{2}(a^2-b^2)\log(a-b) - \frac{1}{2}(b-a)^2$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)^2 + \frac{\pi i}{2}(b^2-a^2) + \frac{i}{2}(b^2-a^2)\arg(b-a)$$

$$+ \frac{i}{2}(a^2-b^2)\arg(a-b).$$

再根据 $\arg(b-a)$ 与 $\arg(a-b)$ 的前述关系，立即可得

$$J = \frac{1}{2}(b-a)^2.$$

再与(*)式比较，又可得出

$$\int_L \mathrm{d}t \int_L \frac{t}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2}(b-a)^2.$$

但这就是

$$\int_L \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\tau}{\tau - t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(b-a)^2.$$

因此(4.14) 式得证.

这样一来，(4.12)′式对于 $f(t) \equiv 1$ 以及 $f(t) = t$ 均告成立. 由积分算子的线性性质可知，当 $f(t)$ 为 t 的线性函数时，(4.12)′ 也成立.

对于任意的 $f(t) \in H$，可以 $f(a), f(b)$ 作线性插值函数

$$g(t) = f(b)\frac{t-a}{b-a} + f(a)\frac{b-t}{b-a}.$$

于是，$F(t) = f(t) - g(t) \in H$ 且 $F(a) = F(b) = 0$. 由上面所论知，(4.12)′ 对于 $F(t)$ 以及 $g(t)$ 均成立，从而对 $f(t)$ 本身也成立.

这样，(4.12)′ 对于 $L = \widehat{ab}$ 以及任何 $f(t) \in H$ 成立. 总之，它对封闭的或开口的光滑曲线 L 均成立. □

下面讨论两个 Cauchy 主值累次积分能否交换积分次序的问题. 我们先来看一个简单事实. 设 L 是一封闭光滑曲线，则由(2.4)′ 显然

$$\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t} = \pi i \int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-t_0} = -\pi^2, \quad t_0 \in L;$$

另一方面，

$$\int_L \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mathrm{d}t}{(t-t_0)(\tau-t)} = \int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t_0}\int_L \left(\frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t-\tau}\right)\mathrm{d}t = 0.$$

可见，积分次序交换后，结果不等.

一般，我们有下面的重要结果：

定理1.4.5 设L是一光滑(封闭或开口)曲线，$f(t,\tau)$在$L\times L$上$\in H$，则

$$\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau = -\pi^2 f(t_0,t_0)+\int_L \mathrm{d}\tau\int_L \frac{f(t,\tau)}{(t-t_0)(\tau-t)}\mathrm{d}t,$$
$$t_0\in L, \qquad (4.15)$$

这里t_0不能是L的端点.

(4.15) 就是著名的 **Poincaré-Bertrand 公式**. 它也可改写成

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau = f(t_0,t_0)+\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \mathrm{d}\tau\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{(t-t_0)(\tau-t)}\mathrm{d}t,$$
$$t_0\in L. \qquad (4.15)'$$

证 首先我们指出，(4.15) 或(4.15)′左右两边的累次积分存在. 记

$$I(t_0)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,$$

其中

$$g(t)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau, \quad t\in L.$$

当L为封闭曲线时，$g(t)\in H$，因此$I(t_0)$存在. 当L为开口曲线时，$g(t)$在端点附近有对数型奇异性，而在包含t_0在其内的L的一段小弧L_0上，$g(t)\in H$，因此$I(t_0)$也存在. 另一方面，记

$$J(t_0)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \mathrm{d}\tau\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{(t-t_0)(\tau-t)}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{h(t_0,\tau)-h(\tau,\tau)}{\tau-t_0}\mathrm{d}\tau,$$

其中

$$h(\zeta,\tau)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{t-\zeta}\mathrm{d}t, \quad \zeta,\tau\in L.$$

当L封闭时，$h(\zeta,\tau)$在$L\times L$上$\in H$，于是$J(t_0)$存在. 当L开口时，$h(\zeta,\tau)$当ζ在L的端点处有对数型奇异性，而在$L_0\times L_0$上$\in H$，由此可知$J(t_0)$也存在.

现在记

$$I(z)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-z}\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau, \quad z\overline{\in} L, \qquad (4.16)$$

$$J(z)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \mathrm{d}\tau\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t,\tau)}{(t-z)(\tau-t)}\mathrm{d}t, \quad z\overline{\in} L. \qquad (4.17)$$

由定理 1.4.4，$I(z)=J(z)$，从而

$$I^+(t_0)=J^+(t_0), \quad I^-(t_0)=J^-(t_0).$$

但由 Plemelj 公式，

$$I(t_0)=\frac{1}{2}[I^+(t_0)+I^-(t_0)],$$

因此

$$I(t_0)=\frac{1}{2}[J^+(t_0)+J^-(t_0)]. \tag{4.18}$$

现将(4.17) 改写为

$$\begin{aligned}J(z)&=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-z}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t,\tau)}{t-z}dt-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t,\tau)}{t-\tau}dt\right]\\&=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(z,\tau)}{\tau-z}d\tau,\end{aligned}$$

这里已令

$$\varphi(z,\tau)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t,\tau)}{t-z}dt-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t,\tau)}{t-\tau}dt,\quad z\overline{\in}L. \tag{4.19}$$

当 z 从 L 的正侧与负侧趋于 t_0 时，记 $\varphi(z,\tau)$ 的边值分别为 $\varphi(t_0^+,\tau)$ 与 $\varphi(t_0^-,\tau)$，则由 Plemelj 公式(4.3)，

$$J^+(t_0)=\varphi(t_0^+,t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t_0^+,\tau)}{\tau-t_0}d\tau,$$

$$J^-(t_0)=-\varphi(t_0^-,t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t_0^-,\tau)}{\tau-t_0}d\tau.$$

于是，由(4.18)，

$$I(t_0)=\frac{1}{2}[\varphi(t_0^+,t_0)-\varphi(t_0^-,t_0)]+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t_0^+,\tau)+\varphi(t_0^-,\tau)}{\tau-t_0}d\tau. \tag{4.20}$$

但由 $\varphi(z,\tau)$ 的定义(4.19) 式，再次应用 Plemelj 公式，得

$$\frac{1}{2}[\varphi(t_0^+,t_0)-\varphi(t_0^-,t_0)]=f(t_0,t_0),$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\varphi(t_0^+,\tau)+\varphi(t_0^-,\tau)]&=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t,\tau)}{t-t_0}dt-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t,\tau)}{t-\tau}dt\\&=\frac{\tau-t_0}{\pi i}\int_L\frac{f(t,\tau)}{(t-t_0)(\tau-t)}dt.\end{aligned}$$

把这两式代入(4.20)，便得

$$I(t_0)=f(t_0,t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L d\tau\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t,\tau)}{(t-t_0)(\tau-t)}dt.$$

此即(4.15)′式成立. □

显然，若 L 由有限条互不相交的光滑曲线构成，则(4.12) 或(4.12)′仍成立.

我们还可注意到，设 L 与 $f(t,\tau)$ 如前，则有

$$\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\int_L f(t,\tau)\mathrm{d}\tau = \int_L \mathrm{d}\tau\int_L \frac{f(t,\tau)}{t-t_0}\mathrm{d}t, \quad t_0 \in L. \tag{4.21}$$

这只要令 $f^*(t,\tau)=(\tau-t)f(t,\tau)$，它仍 $\in H$，且 $f^*(t_0,t_0)=0$，然后利用 (4.15) 式即得. (4.21) 说明另一形式的通常积分与 Cauchy 主值积分的换序可能性.

此外还可注意到，若核密度本身又含有 t_0：$f(t,\tau,t_0)$，本段的有关公式仍都成立，因为在所有这些论证中，t_0 是固定的.

1.4.3 Cauchy 主值积分反演公式

作为积分换序公式(4.15) 或(4.15)′ 的一个应用，我们来考虑封闭光滑曲线上 Cauchy 主值积分的反演问题. 设

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t, \quad t_0 \in L, \tag{4.22}$$

其中 L 是一组互不相交的光滑封闭曲线，已取定了正向，其正侧为一区域 S，且 $\varphi(t) \in H$ 为已知，要求求出 $f(t)$，当然也要求$f(t) \in H$. 由(4.15)′ 知，如果有这样的 $f(t)$ 存在，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau \\ &= f(t_0) + \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L f(\tau)\mathrm{d}\tau\int_L \frac{\mathrm{d}t}{(\tau-t)(t-t_0)};\end{aligned}$$

但里层积分前已看到为 0 (L 是封闭的!)，故得

$$f(t_0) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t. \tag{4.23}$$

于是，由 (4.22) 可推得 (4.23). 根据对称性，由 (4.23) 也可推出 (4.22). 这样，由(4.23) 确定的 $f(t)$ 确实满足(4.22)，亦即(4.22) 有唯一解 (4.23).

(4.22)，(4.23) 构成一对 Cauchy 主值积分的**反演公式，或称对合公式.**

上述结果可推广到更一般情形. 设 S 为一有限多连通区域，其边界 L 由有限条光滑封闭曲线所组成，且已取定正向使 S 在其正侧. 设 $K(z,\zeta)$ 在 $\bar{S}\times\bar{S}$ 上解析，但当 $z=\zeta$ 时有一阶极点，且其留数为 $+1$ 或 -1，即

$$K(z,\zeta) = \pm\frac{1}{z-\zeta} + K^*(z,\zeta), \tag{4.24}$$

其中 $K^*(z,\zeta)$ 在 $\bar{S}\times\bar{S}$ 上全纯. 我们要证明，下面这一对互为反演的公式成立：

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K(t,t_0)f(t)\mathrm{d}t, \quad t_0 \in L, \tag{4.25}$$

$$f(t_0)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K(t,t_0)\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad t_0\in L,\tag{4.26}$$

当然假定 $f(t),\varphi(t)$ 中有一个 $\in H$（于是另一个亦然）.

由(4.26)出发，用(4.24)，知

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K(t,t_0)\varphi(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K(t,t_0)\mathrm{d}t\,\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K(\tau,t)f(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L\left[\frac{\pm 1}{t-t_0}+K^*(t,t_0)\right]\mathrm{d}t \\
&\quad\cdot\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L\left[\frac{\pm 1}{\tau-t}+K^*(\tau,t)\right]f(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\,\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau \\
&\quad\pm\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\,\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K^*(\tau,t)f(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&\quad\pm\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K^*(t,t_0)\mathrm{d}t\,\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau \\
&\quad+\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K^*(t,t_0)\mathrm{d}t\,\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K^*(\tau,t)f(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= I_1\pm I_2\pm I_3+I_4.
\end{aligned}$$

前已证得 $I_1=f(t_0)$. I_2,I_3 中的累次积分都是一层是通常的、一层是奇异的，故可交换次序；I_4 中的更不必说可以交换次序. 再注意到下一事实：若 $\psi(z)$ 在 $\overline{S}$ 上全纯，则

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{\psi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t=\psi(t_0),\quad t_0\in L\tag{4.27}$$

（此由 Cauchy 积分公式和 Plemelj 公式立刻可知），即知

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L f(\tau)\mathrm{d}\tau\,\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{K^*(\tau,t)}{t-t_0}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K^*(\tau,t_0)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \\
I_3 &= \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L f(\tau)\mathrm{d}\tau\,\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{K^*(t,t_0)}{\tau-t}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K^*(\tau,t_0)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \\
I_4 &= \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L f(\tau)\mathrm{d}\tau\,\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L K^*(t,t_0)K^*(\tau,t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L f(\tau)\mathrm{d}\tau\cdot 0=0.
\end{aligned}$$

由此便知(4.26)成立.

例如，作为一特例，令 $K(z,\zeta)=\cot(z-\zeta)$，则以下一对反演公式成立：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(t_0)&=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L f(t)\cot(t-t_0)\,\mathrm{d}t,\\ f(t_0)&=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \varphi(t)\cot(t-t_0)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\right\}\quad t_0\in L, \tag{4.28}$$

其中 L 为一封闭光滑曲线，围成一内域 S，而对 $\overline{S}$ 上的任何两点 z,ζ，都有 $z-\zeta\neq\pi$. 这是由于，这时 $\cot(z-\zeta)$ 在 $\overline{S}\times\overline{S}$ 上除 $z=\zeta$ 外处处全纯，而又因

$$\lim_{z\to\zeta}(z-\zeta)\cot(z-\zeta)=1,$$

说明(4.24)成立. 因此，(4.28)得证. 核 $\cot(t-t_0)$ 称为 **Hilbert 核**，故(4.28)称为 Hilbert 核奇异积分的反演公式. 有关 Hilbert 核的其他类型反演公式，我们以后还要讨论到.

读者还可以根据上述原则创造出各种各样核的奇异积分反演公式.

习　题

*1. 设 L 是一封闭的 Lyapunov 曲线，即，其中 t 点处的切线倾角 θ 作为 t 的函数时 $\in H$. 求证：当 $f(t,\tau)\in H$ 时，

$$\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\int_L\frac{f(t,\tau)}{\bar{\tau}-\bar{t}}\mathrm{d}\bar{\tau}=-\pi^2 f(t_0,t_0)+\int_L\mathrm{d}\bar{\tau}\int_L\frac{f(t,\tau)}{(t-t_0)(\bar{\tau}-\bar{t})}\mathrm{d}t.$$

提示　注意$\dfrac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}$当 $\tau\to t$ 时趋于 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$，而$\dfrac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}\tau}\to\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}$. 为了证明$\dfrac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}\in H$，可先证明$\dfrac{\tau-t}{\sigma-s}\in H$，这里 σ,s 分别为 τ,t 的弧坐标(可利用 1.2.3 段例 5 中结果).

2. 设 L 同上题，求证：

$$\int_L\mathrm{d}\bar{\tau}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{(t-t_0)(\bar{\tau}-\bar{t})}=2\pi^2.$$

3. 设 L 为一光滑封闭曲线，$f(t,\tau)\in H$ 于 $L\times L$ 上. 令

$$F(z)=\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-z}\int_L\frac{f(t,\tau)}{t-z}\mathrm{d}t,\quad z\,\overline{\in}\,L,$$

求证：

$$\begin{aligned}F^{\pm}(t_0)=&-\pi^2 f(t_0,t_0)\pm\pi\mathrm{i}\int_L\frac{f(t_0,t)+f(t,t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}t\\&+\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t_0}\int_L\frac{f(t,\tau)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L.\end{aligned}$$

1.5 无穷直线上的 Cauchy 型积分

1.5.1 $\hat{H}$ 类

为了讨论无穷直线上的 Cauchy 型积分及其主值积分的问题，我们先要把 H 类函数的概念推广到无穷直线上定义的函数上面. 不失一般性，可认为此直线即为 x 轴，记为 X.

定义 1.5.1 设 $f(x)$ 是在 X 上的连续复函数. 如果：

（i） 在包含原点在内部的充分大的闭区间 I 上 $f(x) \in H^{\mu}$，

（ii） 在 I 之外亦即在 $\pm\infty$ 的邻域内满足条件

$$|f(x)-f(x')| \leqslant A\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}\right|^{\mu} \quad (0<\mu\leqslant 1),\ x,x' \in X-I, \tag{5.1}$$

则称 $f(x) \in \hat{H}^{\mu}(X)$，或简记为 $\hat{H}^{\mu}$. 若不强调 μ，可记为 $\hat{H}$.

由 Cauchy 收敛准则，(5.1) 隐含 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = f(\infty) = C$ 存在，且

$$|f(x)-C| \leqslant \frac{A}{|x|^{\mu}}, \quad x \in X-I. \tag{5.2}$$

如果用分式线性变换把 X 变成圆周，便可看出上述定义的意义. 令

$$T:\ \sigma+\mathrm{i} = \frac{-1}{z+\mathrm{i}} \quad 或即\ \sigma = \frac{-\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}}, \tag{5.3}$$

把 z 平面变到 σ 平面，易见 X 就变为 σ 平面中的圆周

$$\Gamma:\ \left|t+\frac{\mathrm{i}}{2}\right| = \frac{1}{2},$$

且上半平面 Z^{+} 变为 Γ 的内域，下半平面 Z^{-} 变为 Γ 的外域. 这时 $x \in X$ 变为 $t \in \Gamma$：

$$t+\mathrm{i} = \frac{-1}{x+\mathrm{i}} \quad 或即\ t = \frac{-\mathrm{i}x}{x+\mathrm{i}}, \tag{5.4}$$

且 $x=\infty\ (=\pm\infty)$ 变到 Γ 上 $t=-\mathrm{i}$ 这一点. 由于 $T^{-1}=T$，故也有

$$z = \frac{-\mathrm{i}\sigma}{\sigma+\mathrm{i}}, \quad x = \frac{-\mathrm{i}t}{t+\mathrm{i}}. \tag{5.5}$$

我们记 $f(x) = f^{*}(t)$，则 $f(\infty) = f^{*}(-\mathrm{i})$. 我们有

引理1.5.1 $f(x) \in \hat{H}^{\mu}$ 当且仅当 $f^*(t) \in H^{\mu}$ 于 Γ 上.

证 设 $f(x) \in \hat{H}^{\mu}$，并设 I 经(5.3)变为 Γ 上的弧 Γ'. 任取 $t, t' \in \Gamma'$，则其对应点 $x, x' \in I$，故

$$|f^*(t) - f^*(t')| = |f(x) - f(x')| \leqslant B|x - x'|^{\mu}$$
$$\leqslant B\left|\frac{t}{t+\mathrm{i}} - \frac{t'}{t'+\mathrm{i}}\right|^{\mu} = \frac{B|t-t'|^{\mu}}{|t+\mathrm{i}|^{\mu}|t'+\mathrm{i}|^{\mu}};$$

由于 $\frac{1}{|t+\mathrm{i}|}$ 当 $t \in \Gamma'$ 时有界，可见 $f^*(t) \in H^{\mu}(\Gamma')$. 再任取 $t, t' \in \Gamma - \Gamma'$，则其对应点 $x, x' \in X - I$，故

$$|f^*(t) - f^*(t')| = |f(x) - f(x')| \leqslant A\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right|^{\mu}$$
$$= A\left|\frac{t+\mathrm{i}}{t} - \frac{t'+\mathrm{i}}{t'}\right|^{\mu} = \frac{A|t-t'|^{\mu}}{|t|^{\mu}|t'|^{\mu}};$$

由于 $\frac{1}{|t|}$ 当 $t \in \Gamma - \Gamma'$ 时有界，故 $f^*(t) \in H^{\mu}(\Gamma - \Gamma')$. 所以 $f^*(t) \in H(\Gamma)$.

反之，当 $f^*(t) \in H(\Gamma)$ 时也可证得 $f(x) \in \hat{H}(X)$. □

由这引理，我们看出 $\hat{H}$ 的定义1.5.1的确是封闭曲线 L 上 H 类概念的推广. 条件(ⅱ)也称为 $f(x)$ 在 $x = \infty$ 附近 $\in H$.

对于不延伸到无穷远的曲线 L，函数 $f(t) \in H(L)$ 时1.2.3段中曾列举其一些性质 $1^\circ \sim 8^\circ$. 其中有些性质如 $1^\circ \sim 3^\circ, 6^\circ$ 对于 $\hat{H}(X)$ 中的函数也显然成立. 我们要特别注意性质 5° 不能搬到这里来，即，由 $f'(x)$ 连续甚至 $\in \hat{H}(X)$ 并不能导致 $f(x) \in \hat{H}(X)$. 例如 $f(x) = x$ 显然不属于 $\hat{H}(X)$，但 $f'(x) = 1 \in \hat{H}(X)$.

1.5.2 实轴上的 Cauchy 型积分及其性质

我们将恒假设 $f(x) \in \hat{H}$. 考察 Cauchy 型积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi, \quad z \overline{\in} X. \tag{5.6}$$

如果按照通常反常积分定义来理解，即把上述积分理解为

$$\lim_{R, R' \to +\infty} \int_{-R'}^{R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi,$$

则一般说来它不存在. 这是因为

$$\int_{-R'}^{R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \int_{-R'}^{R} \frac{f(\xi) - f(\infty)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi + f(\infty)\int_{-R'}^{R} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}$$
$$= I_1 + f(\infty)\left(\ln\left|\frac{R-z}{R'+z}\right| + \mathrm{i}\arg\frac{R-z}{-R'-z}\right),$$

其中 I_1 当 $R, R' \to +\infty$ 时有确定极限(见(5.2))，而 $\ln\left|\frac{R-z}{R'+z}\right|$ 的极限却不存在. 但若把(5.6) 理解为 $\xi=\infty$ 处的“主值积分”，即理解为

$$F(z)=\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-R}^{R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi, \tag{5.7}$$

则它的确存在，且

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)-f(\infty)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi+\frac{f(\infty)}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\arg\frac{R-z}{-R-z}.$$

然而当 $\mathrm{Im}\,z>0$ 即 $z\in Z^+$ 时，上式右边的极限等于 $\lim\limits_{R\to+\infty}\theta=\pi$（图 1-17）；同理，当 $\mathrm{Im}\,z<0$ 即 $z\in Z^-$ 时上述极限等于 $-\pi$. 于是

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)-f(\infty)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\pm\frac{1}{2}f(\infty). \tag{5.8}$$

今后我们总是把 $F(z)$ 理解为(5.7) 意义下的主值积分.

顺便我们已看到(或者令 $f(x)\equiv 1$)：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-z}=\pm\frac{1}{2},\quad z\in Z^{\pm}. \tag{5.9}$$

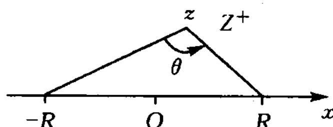


图 1-17

我们还指出，即使 $f(x)\,\overline{\in}\,\hat{H}$，只要它在 I 上可积，而在 $X-I$ 上满足(5.2)，则(5.8) 仍成立.

以上讨论了(5.6) 中的 $z\,\overline{\in}\,X$ 的情况. 下面讨论

$$F(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi,\quad x\in X, \tag{5.10}$$

这里仍设 $f(x)\in\hat{H}$；而且(5.10) 中的积分要理解为在 $\xi=x$ 处与 $\xi=\infty$ 处都取主值，即

$$F(x)=\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{-R}^{x-\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi+\int_{x+\varepsilon}^{R}\frac{f(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi\right).$$

这种主值意义下积分的存在性在所设条件下是很明显的.

任取一区间 $[a,b]\subset X$，使 $x\in(a,b)$，由于

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{X-[a,b]}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a}^{b}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,\quad z\,\overline{\in}\,X,$$

注意上式右边第一个积分在 $z=x$ 的邻域内全纯，而第二个积分当 z 从 $Z^{\pm}$ 分别趋于 x 时 Plemelj 公式成立，故立即知道下面的结果：

定理 1.5.1 当 $f(x)\in\hat{H}$ 时，下列 **Plemelj 公式**仍成立：

$$F^{\pm}(x)=\pm\frac{1}{2}f(x)+F(x),$$

亦即

$$F^{\pm}(x)=\pm\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi,\quad x\in X. \tag{5.11}$$

当 L 为封闭曲线时，我们知道，若 $f(t)\in H$，则以 $f(t)$ 为核密度的 Cauchy 主值积分仍 $\in H$（定理 1.3.1）. 现在我们相应地有

定理 1.5.2 若 $f(x)\in\hat{H}$，则由(5.10) 定义的 $F(x)\in\hat{H}$，且 $F(\infty)=0$.

证 作变换(5.4)，并记 $F(x)=F^*(t)$. 于是

$$F^*(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{f^*(\tau)(t+i)}{(\tau-t)(\tau+i)}\mathrm{d}\tau=F_1^*(t)-F_1^*(-\mathrm{i}),\quad t\in\Gamma,$$

其中已令(见本段末习题 3)

$$F_1^*(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{f^*(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau,\quad t\in\Gamma.$$

由上面提到的结果知，$F_1^*(t)\in H(\Gamma)$，从而 $F^*(t)\in H(\Gamma)$. 再由引理 1.5.1，立即得知 $F(x)\in\hat{H}$.

又因 $F(\infty)=F^*(-\mathrm{i})$，故 $F(\infty)=0$. □

由(5.6) 定义的函数 $F(z)$（当 $f(x)\in\hat{H}$ 时）显然分别在 Z^+ 与 Z^- 内全纯. 我们可证 $F(z)$ 连同其边值 $F^+(x)$ 在 $\overline{Z^+}$ 上连续. 如果我们把 $\hat{H}$ 类推广到 $\overline{Z^+}$ 上，即，一个 $z\in\overline{Z^+}$ 上的连续函数 $\varphi(z)$，如果满足下列两条件：

（i） 当 $|z|,|z'|\leqslant R$，$z,z'\in\overline{Z^+}$ 时，

$$|\varphi(z)-\varphi(z')|\leqslant A|z-z'|^{\mu};$$

（ii） 当 $|z|,|z'|>R$，$z,z'\in\overline{Z^+}$ 时，

$$|\varphi(z)-\varphi(z')|\leqslant A\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{z'}\right|^{\mu}\quad(0<\mu\leqslant 1),$$

则称 $\varphi(z)\in\hat{H}^{\mu}(\overline{Z^+})$ 或简记为 $\hat{H}(\overline{Z^+})$. 同样可定义 $\hat{H}(\overline{Z^-})$. 这样，我们会有相应的 **Privalov 定理**：

定理 1.5.3 当 $f(x)\in\hat{H}$ 时，由(5.6) 定义的 $F(z)$ 分别 $\in\hat{H}(\overline{Z^+})$ 与 $\hat{H}(\overline{Z^-})$.

此外，我们还有

定理 1.5.4 若 $f(x)\in\hat{H}$，$f'(x)\in\hat{H}$，则

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,\quad z\,\overline{\in}\,X, \tag{5.12}$$

$$F'(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi,\quad x\in X, \tag{5.13}$$

且 $F'(z) \in \hat{H}(\overline{Z^{\pm}})$，$F'(x) \in \hat{H}$；此外，$F'^{\pm}(x) = F^{\pm\prime}(x)$.

证 注意到 $f(x) \in \hat{H}$，当 $z \overline{\in} X$ 时，$F(z)$ 分别在 Z^+ 与 Z^- 内全纯，故易证得

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \quad z \overline{\in} X.$$

这只要在(5.6)中用变换 T 把 ξ 变成 Γ 上的参数(保留 z 不变)，从而 $F(z)$ 就变成 Γ 上的 Cauchy 型积分，然后求导数，再变回到 X 上的积分即可.

由于 $f(\infty) = C$ 有限，故

$$\int_{-R}^{R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = -\frac{f(\xi)}{\xi - z}\Bigg|_{-R}^{R} + \int_{-R}^{R} \frac{f'(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

令 $R \to +\infty$，注意右边双重代入等于零，代入前式即得(5.12).

在(5.12)中用 Plemelj 公式(因已知 $f'(x) \in \hat{H}$)，便得

$$F'^{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2} f'(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad x \in X.$$

用与证明定理 1.3.3 中的类似方法，可证 $F^{\pm\prime}(x) = F'^{\pm}(x)$. 因此上式左边又可写成 $F^{\pm\prime}(x)$. 但由(5.11)，

$$F^{\pm\prime}(x) = \pm\frac{1}{2} f'(x) + F'(x),$$

故得(5.13)式. □

习 题

1. 详细证明定理 1.5.3.

2. 若 $f(x) \in \hat{H}$，求证：$F^{\pm}(\infty) = \pm\frac{1}{2} f(\infty)$.

3. 试证：经变换(5.4)，X 上的主值积分 $F(x)$ 确实变为 Γ 上的主值积分 $F^*(t) = F_1^*(t) - F_1^*(-i)$.

1.6 解析函数边值的条件

1.6.1 全纯函数边值的条件

设 L 由有限条互不相交的光滑封闭曲线 $L_0, L_1, \cdots, L_n$ 所组成，它们把整个扩充平面分成有限个区域. 我们不妨把包含无穷远点的那个区域归入

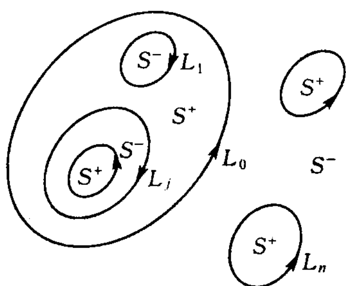


图 1-18

S^-(图 1-18)，而与这区域相邻的各区域归入S^+，与后面这些区域相邻的各区域又归入 S^-，如此继续下去. 因此全平面分成两部分 S^+与 S^-(都不一定连通). 对各 L_j 取定正向，从而 L 也有了正向，使S^+的各连通块都在L的正(左)侧，而 S^-的各块则在 L 的负(右) 侧.

当然我们也可以一开始把包含无穷远点的区域归入 S^+，然后再如上述方法进行下去，于是所有 S^+,S^-都要反号，同时各 L_j 因此L 的正向也要改为反向.

已给L上一连续函数$f(t)$，问如何去判定它是否为S^+中某全纯函数(确切地说，是 S^+的每连通块中某全纯函数) 的边值? 本段就要讨论这一问题. 我们有以下诸定理.

定理 1.6.1 在 L 上的函数 $f(t) \in H$[①] 是 S^+ 内某全纯函数$F(z)$ 的边值(如果 $\infty \in S^+$，则且 $F(\infty) = 0$) 的充要条件是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt = 0, \quad z \in S^-. \tag{6.1}$$

证 1° 必要性 如果$\infty \in S^-$，且$f(t) = F^+(t)$是S^+内全纯函数$F(\zeta)$的边值，故若 $z \in S^-$，则$\frac{F(\zeta)}{\zeta - z}$是$S^+$内 ζ 的全纯函数，且连续到 L 上. 故在 S^+ 的 每一连通块内应用 Cauchy 定理，知(6.1) 成立. 如果 $\infty \in S^+$，由于 $F(\infty) = 0$，故$\frac{F(\zeta)}{\zeta - z}$在$\zeta = \infty$处的留数为 0，故仍可得(6.1).

2° 充分性 记

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt, \quad z \overline{\in} L. \tag{6.2}$$

应用 Plemelj 公式，得

$$F^+(t) - F^-(t) = f(t), \quad t \in L. \tag{6.3}$$

但由假设，当 $z \in S^-$ 时，$F(z) \equiv 0$，从而$F^-(t) = 0$ 于 L 上，因此 $f(t) = F^+(t)$ 于 L 上. 当 $\infty \in S^+$ 时，显然有 $F(\infty) = 0$. □

---

① 事实上，要求 $f(t)$ 在 L 上连续就够了(证明从略)，这里作此假定是为了使论证简化.

(6.1) 中的 $z\in S^-$，因而用起来不太方便. 我们希望能找出 $t_0\in L$ 上的条件就更好. 这时我们有

定理 1.6.2 在 L 上的函数 $f(t)\in H$ 是 S^+ 内某全纯函数 $F(z)$ 的边值(如果 $\infty\in S^+$，则且 $F(\infty)=0$) 的充要条件是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt=\frac{1}{2}f(t_0),\quad t_0\in L. \tag{6.4}$$

证 1° 必要性 设 $f(t)=F^+(t)$. 则(6.1)成立. 应用 Plemelj 公式，得

$$-\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt=0,\quad t_0\in L,$$

由此即得(6.4).

2° 充分性 以(6.2)式定义 $F(z)$，则 $F(z)$ 在 S^+ 内全纯，且当 $\infty\in S^+$ 时 $F(\infty)=0$. 于是.

$$F^+(t_0)=\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt,\quad t_0\in L. \tag{6.5}$$

从而由假设条件，$F^+(t_0)=f(t_0)$. □

作为上述定理的应用，我们来证明下一重要的 **Harnack 定理**. 但为简洁计，对于 S^+,S^-，我们只限于下述情况. 设 S^+ 是一多连通区域，其边界由 $L=L_0+L_1+\cdots+L_n$ 构成，各 L_j 都是光滑封闭曲线，且 L_0 围住了其他诸 L_j. L 已取定正向使 S^+ 在其正侧. 各 L_j $(j=0,1,\cdots,n)$ 的负侧区域记为 S_j^-，又记 $S^-=S_0^-+S_1^-+\cdots+S_n^-$ (图 1-19 (a)). 也可能不存在 L_0，则 S^+ 是一无界区域(图 1-19 (b)).

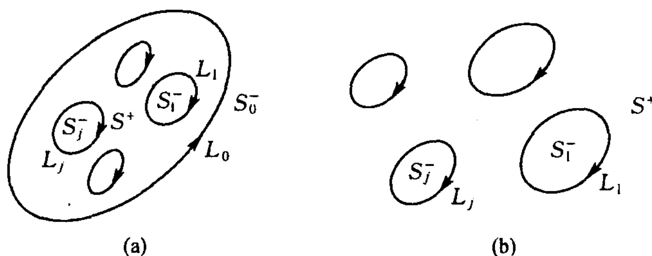


图 1-19

定理 1.6.3 设 L,S^+ 如上，$f(t)\in H$ 是 L 上的实值函数. 设 $F(z)$ 以(6.2)定义. 若 $F(z)\equiv 0$ 于 S^+，则 $f(t)\equiv c_j$ 于 L_j 上，其中 c_j 为(实)常数(当 L_0 存在时，且必 $c_0=0$)；若 $F(z)\equiv 0$ 于 S^-，则 $f(t)\equiv c$ (实常数) 于

整个 L 上(当 L_0 不存在时，且必 $c=0$).

证 1° 设 $F(z)\equiv 0$ 于 S^+. 于是，由定理 1.6.1，$f(t)$ 应是 S^- 中全纯函数的边值，亦即 $f(t)$ 分别为 S_j^- 中全纯函数 $f_j(\zeta)$ 的边值(当 L_0 存在时，且 $f_0(\infty)=0$). 但 $\operatorname{Im} f_j(t)=0$ 于 L_j 上，由调和函数的极值原理知，$\operatorname{Im} f_j(\zeta)=0$ 于 $\overline{S_j^-}$ 上，由此立得 $f(t)=f_j(t)=c_j$ 于 L_j 上. 当 L_0 存在时，由于 $f_0(\infty)=0$，故必有 $c_0=0$.

2° 设 $F(z)\equiv 0$ 于 S^-. 和 1° 一样，可证得 $f(z)\equiv c$ 于 $\overline{S^+}$ 上，从而又得 $f(t)=c$ 于 L 上. 当 L_0 不存在时，由于 $F(\infty)=0$，故必有 $c=0$. □

1.6.2 亚纯函数边值的条件

我们将把前段结果推广到亚纯函数的情况. 为简单起见，仍设 L 和 $S^\pm$ 如图 1-19 所示，L_0 仍可能存在或否. S^+ 内的亚纯函数是指 S^+ 内的单值解析函数，但可能有一些极点. 我们要找出在 L 上已给的 H 类中的函数是 S^+ 内亚纯函数边值的条件（这时它在 S^+ 内只可能有有限个极点）. 相应于定理 1.6.1，我们有

定理 1.6.4 *在 L 上的函数 $f(t)\in H$ 是 S^+ 内亚纯函数 $F(z)$ 的边值的充要条件是*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t=-R(z),\quad z\in S^-,\tag{6.6}$$

其中 $R(z)$ 是一有理函数，其极点全在 S^+ 内，且 $R(z)$ 就是 $F(z)$ 在各极点处主部的代数和(当 L_0 不存在时，这里也包括 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处的主部)①.

证 1° 必要性 设 $F(t)$ 是 S^+ 内亚纯函数 $F(z)$ 的边值，且 $F(z)$ 在各极点处主部的代数和为 $R(z)$.

先设 L_0 存在，故 S^+ 为有界区域. 现在 $F(z)-R(z)$ 在 S^+ 内全纯，它的边值是 $f(t)-R(t)$. 由定理 1.6.1，

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)-R(t)}{t-z}\mathrm{d}t=0,\quad z\in S^-.\tag{6.7}$$

但 $R(z)$ 在 S^- 内全纯，且 $R(\infty)=0$，故当 $z\in S_j^-$ $(j=0,1,\cdots,n)$ 时，

① 注意，我们把 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处的主部理解为包括它在 ∞ 点的Laurent 展式中的常数项.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_j}\frac{R(t)}{t-z}\mathrm{d}t &= -R(z),\\ \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_k}\frac{R(t)}{t-z}\mathrm{d}t &= 0,\ k\neq j,\end{aligned}\right\}\quad z\in S_j^-. \tag{6.8}$$

总之,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L}\frac{R(t)}{t-z}\mathrm{d}t = -R(z),\quad z\in S^-. \tag{6.8$'$}$$

由(6.7),(6.8)$'$便得(6.6).

当 L_0 不存在时,S^+ 是无界域,这时 $F(z)-R(z)$ 在 S^+ 内全纯,且在 $z=\infty$ 处为零,因此(6.7) 仍成立. 由于现在 $R(z)$ 的极点都不在 S^- 内,因此当 $z\in S_j^-$ 时,(6.8) 从而(6.8)$'$ 仍成立. 于是(6.6) 仍成立.

2° 充分性 今设(6.6) 成立.

先考虑 L_0 存在的情形. 由 $R(z)$ 的性质知 $R(\infty)=0$,且在每一 S_j^- 内全纯,故(6.8) 从而(6.8)$'$ 成立. 于是由(6.6) 知(6.7) 成立. 故由定理 1.6.1 知,$f(t)-R(t)$ 为 S^+ 内全纯函数的边值,亦即 $f(t)$ 为 S^+ 内亚纯函数的边值,且很明显,$R(t)$ 为其各极点的主部的代数和.

如果 L_0 不存在,则(6.8)$'$ 成立更为明显,于是(6.7) 成立. 以下推理同上. □

最常用的是下一推论.

推论 1.6.1 设 L_0 不存在. L 上的函数 $f(t)\in H$ 是 S^+ 内除 $z=\infty$ 可能有极点外到处全纯的函数 $F(z)$ 的边值的充要条件是

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L}\frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t = -P(z),\quad z\in S^-, \tag{6.9}$$

这里 $P(z)$ 是一多项式,它是 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处的主部. 特别,如果要求 $F(\infty)$ 有界,则(6.9) 成为

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L}\frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t = -c,\quad z\in S^-, \tag{6.10}$$

其中 c 为常数,且 $c=F(\infty)$.

注意,当 L_0 不存在时,如果改变各 L_j 的正向,即取反时针向为正向,则(6.6),(6.9),(6.10) 诸式的右边也要改变符号(但这时 $z=\infty$ 在 S^- 内).

习 题

1. 定理 1.6.1 中,如果 ∞ 点在 S^+ 内,且只知道 $F(\infty)$ 有限,则定理应如何修改?

2. 试把定理 1.6.4 中的条件改为 $t_0 \in L$ 的条件.

1.7 高阶奇异积分和留数定理的推广

1.7.1 Cauchy 定理的推广

我们知道，如果 D 是一以分段光滑曲线 L 为边界的有界区域，$F(z)$ 在 D 内全纯且连续到 $\overline{D}$ 上，则 Cauchy 定理成立：

$$\int_L F(t)\mathrm{d}t = 0.$$

为了以后的需要，我们将把这定理稍作推广.

定理 1.7.1（推广的 Cauchy 定理） 设 D, L 如上，若 $F(z)$ 在 D 内全纯，且除去 L 上一点 a 以外，它可连续延拓到 L 上，而在 $z=a$ 附近，

$$|F(z)| \leqslant \frac{A}{|z-a|^{\nu}}, \quad 0 \leqslant \nu < 1,\ z \in \overline{D}, \tag{7.1}$$

其中 A 为常数，则

$$\int_L F(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{7.2}$$

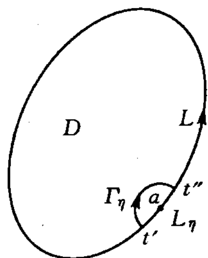


图 1-20

证 以 a 为中心、充分小的 $\eta > 0$ 为半径作圆，在 L 上截下一段弧 L_η，并在 D 内得一圆弧 Γ_η，并取正向如图 1-20. 我们设 η 已足够小，使 (7.1) 式在 L_η 上成立. 由 Cauchy 定理，

$$\left(\int_L - \int_{L_\eta} + \int_{\Gamma_\eta}\right) F(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0,$$

故

$$\int_L F(t)\mathrm{d}t = \int_{L_\eta} F(t)\mathrm{d}t + \int_{\Gamma_\eta^-} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta = I_1 + I_2. \tag{$*$}$$

设 L_η 的端点为 t', t''，而 t', a, t'' 的弧坐标分别为 s', s_a, s''，则由(7.1)（且设 $s' < s_a < s''$），

$$\begin{aligned}|I_1| &\leqslant A\int_{L_\eta} \frac{|\mathrm{d}t|}{|t-a|^{\nu}} \leqslant \frac{A}{C^{\nu}}\int_{L_\eta} \frac{\mathrm{d}s}{|s-s_a|^{\nu}} \\ &= \frac{A}{C^{\nu}}\left[\int_{s_a}^{s''} \frac{\mathrm{d}s}{(s-s_a)^{\nu}} + \int_{s'}^{s_a} \frac{\mathrm{d}s}{(s_a-s)^{\nu}}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{A}{(1-\nu)C^{\nu}}[(s''-s_a)^{1-\nu}+(s_a-s')^{1-\nu}] \leqslant \frac{2AL_\eta^{1-\nu}}{(1-\nu)C^{\nu}}.$$

因此，当 $\eta \to 0$ 时，$I_1 \to 0$. 又在 Γ_η 上，令 $z-a=\eta e^{i\theta}$，且设 t',t'' 相应的 θ 值分别为 θ',θ'' $(\theta''<\theta')$，故

$$|I_2| \leqslant \int_{\theta''}^{\theta'} \frac{A\eta d\theta}{\eta^{\nu}} = A\eta^{1-\nu}(\theta'-\theta'') \leqslant 2\pi A\eta^{1-\nu},$$

于是 $\eta \to 0$ 时 $I_2 \to 0$. 在(*)式中令 $\eta \to 0$，便得(7.2)式. □

如果 L 上有有限个类似于 a 的点，定理 1.7.1 显然依然成立.

从定理 7.1.1 的证明，启发我们可以得到下一结果.

定理1.7.2 设 D,L 如前. 设 $F(z)$ 在 D 内全纯，且除去 L 上一点 a 以外，可连续延拓到 L 上，而在 a 附近，(7.1) 式成立；此外，还设当 $t \in L$ 时，$\lim\limits_{t\to a} F(t)=\alpha$ 存在(有限)，且令 $F(a)=\alpha$ 后，$F(t) \in H$ 于 L 上，则 $F(z)$ 在整个 $\overline{D}$ 上 $\in H$，于是 $F(a)=\alpha$ 也就是 $F(z)$ 当 z 从 $\overline{D}$ 上趋于 a 点时的极限值.

证 在 D 内任意取定一点 z，取 $\eta>0$ 充分小如定理 1.7.1，并且要求

$$\eta < \frac{1}{2}|z-a|,$$

记号 L_η,Γ_η 如前. 在 $L-L_\eta$ 与 Γ_η 所围内域中(注意 z 点在其内部)应用 Cauchy 积分公式，得

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_\eta} \frac{F(t)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\eta} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\eta} \frac{F(t)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\eta} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \end{aligned}$$

由于已定义 $F(a)=\alpha$，故 $F(t)$ 在 L 上连续. 设 $M=\max\limits_{t\in L}|F(t)|$. 注意 L_η 的长不超过 $2\eta/C$，故

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\eta} \frac{F(t)}{t-z}dt\right| \leqslant \frac{M\eta}{\pi C|z_L-z|},$$

这里 z_L 为 L 上离 z 最近的一点. 在 Γ_η 上，由(7.1)，$|F(\zeta)| \leqslant \frac{A}{\eta^{\nu}}$，故

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\eta} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right| \leqslant \frac{2A\eta^{1-\nu}}{|z-a|}.$$

因此，在前面式子中令 $\eta \to 0$，便得

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(t)}{t-z}dt.$$

又因已知 $F(t)\in H$，故由 Privalov 定理，知道 $F(z)$ 在 $\overline{D}$ 上 $\in H$. □

当然，若在 L 上有有限个类似于 a 的点，定理 1.7.2 也是成立的.

注意，如果定理 1.7.2 中没有假设条件(7.1)，它就不能成立. 例如，考虑函数

$$F(z)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{z^2}},$$

D 为 $|z|<1$ 的上半圆盘. 现在 $a=0$. 不难验证，定理 1.7.2 中的条件除(7.1)外都满足，而显然当 z 在 D 内趋于 $z=0$ 时，$F(z)$ 的极限不存在.

很明显，对于定理 1.7.1 中的函数 $F(z)$，Cauchy 积分公式也是成立的：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=F(z),\quad z\in D. \tag{7.3}$$

此外，本段所论，可毫无困难地推广到多连通区域 D 上去.

习 题

求证：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

提示 考虑 $\displaystyle\int_{\Gamma_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z$，其中 Γ_R 为以原点为中心、充分大的 R 为半径的圆周在第一象限的部分以及 x 轴、y 轴所围区域的边界，并令 $R\to+\infty$；这里 $\sqrt{z}$ 是当 z 在正实轴上岸时取正实值的一分支，这个分支在上述区域内全纯. 此外，还要利用熟知的结果：

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1.7.2 高阶奇异积分

设 L 为一分段光滑曲线(开口或封闭). $f(t)\in H$ 于 L 上. 我们来考虑积分

$$\int_L \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^n}\mathrm{d}\tau,\quad t\in L,\ n>1. \tag{7.4}$$

这个积分由于在 $\tau=t$ 处出现了高于一阶的奇异性，一般说来它是发散的，即使在 Cauchy 主值意义下也是如此. 当然可以去研究对于怎样的 L 以及 n，积分(7.4) 在主值意义下收敛，也确有一些数学工作者对此进行了讨论并获得了一些结果. 但从实际应用观点来看，更有用处的是下面的从另一观点来讨论(7.4). 这个观点是 Hadamard 对实轴上的类似积分首先提出来的，即所谓积分的"有限部分"(例如，参看 L. Schwarz [34]). 将此概念推广到(7.4) 的情形(n 为正整数) 则是 C. Fox 在[32] 中提出的，后来王传荣在[1] 中也对此作了一些讨论. 著者对此也进行过一些讨论[11],[20]，并将 n 推广到一般正实数的情况[12]，并且允许有若干个奇点. 下面我们就来加以论述.

为了弄清楚高阶奇异积分的背景，我们先来看一个简单例子. 设 $L=\widehat{ab}$ 是一开口光滑弧段，$f(t)$ 在 L 上有导数，且 $f'(t)\in H$，或记为 $f(t)\in H_1$. 又设 t_0 为 L 上的一内点(图1-21). 我们设想，按照 Cauchy 主值积分的定义，以 t_0 为中心，作充分小半径 ε 的圆周，分别在 t_0 的两边交 L 上各一点 t',t''，设 $L_\varepsilon=\widehat{t't''}$ 为 L 上的一小段弧. 我们能否定义

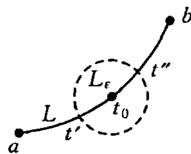


图 1-21

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{t'}\frac{f(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t+\int_{t''}^b\frac{f(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t\right]?$$

(积分都是沿 L 上的弧进行的.) 右边这一极限一般并不存在. 因为，用分部积分法，知

$$\begin{aligned}&\int_a^{t'}\frac{f(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t+\int_{t''}^b\frac{f(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t\\&=-\frac{f(t)}{t-t_0}\Big|_a^{t'}+\int_a^{t'}\frac{f'(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t-\frac{f(t)}{t-t_0}\Big|_{t''}^b+\int_{t''}^b\frac{f'(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t\\&=\left[\int_a^{t'}\frac{f'(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t+\int_{t''}^b\frac{f'(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t\right]+\left[\frac{f(a)}{a-t_0}-\frac{f(b)}{b-t_0}\right]\\&\quad+\left[\frac{f(t'')}{t''-t_0}-\frac{f(t')}{t'-t_0}\right]\\&=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，由于 $f'(t)\in H$，故

$$I_1\to\int_a^b\frac{f'(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t;$$

I_2 是与 ε 无关的常数；而

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}I_3&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{f(t'')-f(t_0)}{t''-t_0}-\frac{f(t')-f(t_0)}{t'-t_0}+f(t_0)\left(\frac{1}{t''-t_0}-\frac{1}{t'-t_0}\right)\right]\\&=f(t_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{t''-t_0}-\frac{1}{t'-t_0}\right)=f(t_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-i\theta''}-\mathrm{e}^{-i\theta'}}{\varepsilon}\end{aligned}$$

一般不存在(除非 $f(t_0)=0$)，其中已令

$$t''=t_0+\varepsilon\mathrm{e}^{i\theta''},\quad t'=t_0+\varepsilon\mathrm{e}^{i\theta'}.$$

因此，如果把引起积分发散的部分 I_3 去掉，则下面的定义是有意义的：

$$\int_a^b\frac{f(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{t'}\frac{f(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t+\int_{t''}^b\frac{f(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t-\frac{A(t_0,\varepsilon)}{\varepsilon}f(t_0)\right],\tag{7.5}$$

其中 $A(t_0,\varepsilon)=e^{-i\theta''}-e^{-i\theta'}$ 是一个与 $f(t)$ 以及 L 的端点 a,b 都无关的有界函数，因为上式右边的极限存在，且可算出

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(t-t_0)^2}dt=\int_a^b \frac{f'(t)}{t-t_0}dt+\frac{f(a)}{a-t_0}-\frac{f(b)}{b-t_0}. \tag{7.6}$$

当然，也可把(7.5)中的 $A(t_0,\varepsilon)$ 换作任何函数 $B(t_0,\varepsilon)$，只要它们的差为 ε 的高阶无穷小；而且在这个意义下，$A(t_0,\varepsilon)$ 是唯一确定的.

以上的想法很容易推广到高阶的奇异积分 $\int_a^b \frac{f(t)}{(t-t_0)^n}dt$ 上(对任何自然数 n)，只要多重复几次分部积分法，而把凡引起积分发散的那些项一概删去即可. 甚至还可推广到分数阶的高阶奇异积分：

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(t-t_0)^{n+\alpha}}dt,\quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

当然这里 $(t-t_0)^\alpha$ 要在 L 上已取定一单值分支.

这样，我们可给出如下的一般定义：

定义 1.7.1 设 L 为一分段光滑弧 $\widehat{ab}$，n 为一正整数，$0<\alpha\leqslant 1$，函数 $f(t)\in H_n$ (即 $f^{(n)}(t)\in H$) 于 L 上①，则定义高阶奇异积分如下：

$$\int_L \frac{f(t)}{(t-t_0)^{n+\alpha}}dt=\frac{1}{(n+\alpha-1)\cdots\alpha}\int_L \frac{f^{(n)}(t)}{(t-t_0)^\alpha}dt$$
$$+\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(n+\alpha-1)\cdots(n+\alpha-r-1)}\left[\frac{f^{(r)}(a)}{(a-t_0)^{n+\alpha-r-1}}-\frac{f^{(r)}(b)}{(b-t_0)^{n+\alpha-r-1}}\right],$$
$$t_0\in L,\ t_0\neq a,b. \tag{7.7}$$

这一定义实质上等价于和(7.5)类似的式子：

$$\int_L \frac{f(t)}{(t-t_0)^{n+\alpha}}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{t'} \frac{f(t)}{(t-t_0)^{n+\alpha}}dt+\int_{t''}^b \frac{f(t)}{(t-t_0)^{n+\alpha}}dt\right.$$
$$\left.-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{A_r(t_0,\varepsilon)}{\varepsilon^{n+\alpha-r-1}}f^{(r)}(t_0)\right], \tag{7.8}$$

其中 $A_r(t_0,\varepsilon)$ $(r=0,1,\cdots,n-1)$ 为与 $f(t)$ 无关的某些有界函数，这些函数构成的最后求和式就是由前面两积分经逐次分部积分后含有的所有“发散部分”，从而保证了(7.8)中的极限存在，于是得出(7.7)式. 由于我们对 $A_r(t_0,\varepsilon)$ 的具体表达式不感兴趣，所以宁可直截了当地以(7.7)式作为高阶奇异积分的定义.

---

① 当 $\alpha<1$ 时，只要 $f^{(n)}(t)$ 在 L 上连续就够了，因为这时实际上用不到它的主值积分.

特别注意，如果 $\alpha=1$，则有整数阶奇异积分的公式：

$$\int_L \frac{f(t)}{(t-t_0)^{n+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}\int_L \frac{f^{(n)}(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t$$

$$+\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{n\cdots(n-r)}\left[\frac{f^{(r)}(a)}{(a-t_0)^{n-r}}-\frac{f^{(r)}(b)}{(b-t_0)^{n-r}}\right],$$

$$t_0\in L,\ t_0\neq a,b, \tag{7.9}$$

当然这里仍已假定 $f(t)\in H_n$.

当 L 为封闭曲线时，(7.7),(7.9) 特别简单，分别成为

$$\int_L \frac{f(t)}{(t-t_0)^{n+\alpha}}\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+\alpha-1)\cdots\alpha}\int_L \frac{f^{(n)}(t)}{(t-t_0)^{\alpha}}\mathrm{d}t,$$

$$0<\alpha\leqslant 1,\ t_0\in L; \tag{7.10}$$

$$\int_L \frac{f(t)}{(t-t_0)^{n+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}\int_L \frac{f^{(n)}(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L. \tag{7.11}$$

公式(7.7),(7.9) ~ (7.11) 可以这样来记忆：对左边的积分形式地作多次分部积分(不顾 $t=t_0$ 处的奇异性)，直到最后的积分中只含有 $t=t_0$ 处不超过一阶的奇异性为止. 例如，设 $f(t)\in H_2$, $L=\widehat{ab}$, $t_0\in L$, $t_0\neq a,b$, 则

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f(t)}{(t-t_0)^{5/2}}\mathrm{d}t &=-\frac{2}{3}\int_a^b f(t)\mathrm{d}(t-t_0)^{-\frac{3}{2}}\\
&=\frac{2}{3}\int_a^b \frac{f'(t)}{(t-t_0)^{3/2}}\mathrm{d}t+\frac{2}{3}\left[\frac{f(a)}{(a-t_0)^{3/2}}-\frac{f(b)}{(b-t_0)^{3/2}}\right]\\
&=-\frac{4}{3}\int_a^b f'(t)\mathrm{d}(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad+\frac{2}{3}\left[\frac{f(a)}{(a-t_0)^{3/2}}-\frac{f(b)}{(b-t_0)^{3/2}}\right]\\
&=\frac{4}{3}\int_a^b \frac{f''(t)}{(t-t_0)^{1/2}}\mathrm{d}t+\frac{4}{3}\left[\frac{f'(a)}{(a-t_0)^{1/2}}-\frac{f'(b)}{(b-t_0)^{1/2}}\right]\\
&\quad+\frac{2}{3}\left[\frac{f(a)}{(a-t_0)^{3/2}}-\frac{f(b)}{(b-t_0)^{3/2}}\right];\end{aligned}$$

结果与从(7.7) 计算时一致.

上述高阶奇异积分概念易于推广到多个奇点的情况. 和通常的反常积分一样，我们给出下面的定义：

定义 1.7.2 仍设 $L=\widehat{ab}$ 为一分段光滑曲线，$t_1,t_2,\cdots,t_p$ 为 L 上的内点，依从 a 到 b 的正向次序排列. 在 $\widehat{t_kt_{k+1}}$ 上任取一内点 c_k $(k=1,2,\cdots,p-1)$，则定义

$$\int_L \frac{f(t)\,dt}{\prod_{j=1}^{p}(t-t_j)^{n_j+\nu_j}} = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{\widehat{c_kc_{k+1}}} \frac{f(t)\,dt}{\prod_{j=1}^{p}(t-t_j)^{n_j+\nu_j}}$$

$$(c_0 = a,\ c_p = b), \tag{7.12}$$

其中 n_j 为非负整数，$0 \leqslant \nu_j < 1$，且已设 $f(t) \in H_n$，$n = \max n_j$.

函数$(t-t_j)^{\nu_j}$ ($\nu_j > 0$时) 指的当然是L上的一确定连续分支，例如将平面从 t_j 到 ∞ 点用一剖线(除 t_j 外不与 L 相交) 割开，然后取定一分支. 此定义是有意义的，因为(7.12) 右边求和号下的每一积分中只含有一个奇点，而且易证(7.12) 右边和式与各个 c_k 的选法无关，因此其值是唯一确定了的.

如果记 $\Pi(t) = \prod_{j=1}^{p}(t-t_j)^{n_j}$，将 $1/\Pi(t)$ 分项分式:

$$\frac{1}{\Pi(t)} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{r=1}^{n_j}\frac{c_{jr}}{(t-t_j)^r}, \tag{7.13}$$

则形式地我们有

$$\int_L \frac{f(t)\,dt}{\prod_{j=1}^{p}(t-t_j)^{n_j+\nu_j}} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{r=1}^{n_j} c_{jr}\int_L \frac{f(t)\,dt}{\Pi_j(t)(t-t_j)^{r+\nu_j}}, \tag{7.14}$$

其中 $\Pi_j(t) = \prod_{k\neq j}(t-t_k)^{\nu_k}$. 此式右边是有确定意义的. (7.14) 实际上也确实是对的，因为在(7.12) 式右边各积分作形式的分部积分与在(7.14) 式右边各积分也作形式的分部积分时效果明显是一样的.

关于高阶奇异积分的进一步讨论，可参看[51] ~ [53].

特别，有关奇异积分的 Poincaré-Bertrand 换序公式(4.15) 可以推广到高阶奇异积分(参看[54] ~ [58]).

1.7.3 留数定理的推广

现设 L 是一分段光滑的封闭曲线，以反时针向为正向，围成一内域 D. 设 $\varphi(z)$ 为 D 内的全纯函数，在 t_0 附近，

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z-t_0)^n},\quad f(t_0) \neq 0,\ n \text{ 为正整数},$$

其中 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上 t_0 附近(包括 t_0) 连续，则称 $\varphi(z)$ 在 $\overline{D}$ 上的 t_0 处有 n 阶"极点". 如果上式对于 $z \in \overline{D}$ 均成立，且 $f(t) \in H_{n-1}$ 于 L 上，则由(7.11)，

$$\int_L \varphi(t)\,dt = \int_L \frac{f(t)}{(t-t_0)^n}\,dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_L \frac{f^{(n-1)}(t)}{t-t_0}\,dt.$$

但因 $f^{(n-1)}(z)$ 在 D 内全纯，且连续到 L 上，故由 Cauchy 积分公式知，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f^{(n-1)}(t)}{t-z}dt = f^{(n-1)}(z), \quad z \in D.$$

又因 $f^{(n-1)}(t) \in H$，由 Plemelj 公式(2.15)，

$$f^{(n-1)}(t_0) = \left(1-\frac{\theta_0}{2\pi}\right)f^{(n-1)}(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f^{(n-1)}(t)}{t-t_0}dt,$$

其中 θ_0 为 D 在 t_0 处的内角，于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f^{(n-1)}(t)}{t-t_0}dt = \frac{\theta_0}{2\pi}f^{(n-1)}(t_0).$$

代入前式，便得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)dt &= \frac{\theta_0}{2\pi}\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t_0)\\ &= \frac{\theta_0}{2\pi}\frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[\varphi(t)(t-t_0)^n]\right\}_{t=t_0}. \qquad (7.15)\end{aligned}$$

如果与通常一样，定义 $\varphi(t)$ 在 $\overline{D}$ 上 $t_0 \in L$ 处这一 n 阶极点的**留数**(**广义留数**)为

$$\operatorname{res}\varphi(t_0) = \frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[\varphi(t)(t-t_0)^n]\right\}_{t=t_0}, \qquad (7.16)$$

并称 $\alpha_0 = \frac{\theta_0}{2\pi}$ 为 $\overline{D}$ 在 t_0 处的**绕度**或**张度**(它表示 $\overline{D}$ 在 t_0 处的内角 θ_0 占有整个周角 2π 的几分之几这一份额；例如，当 t_0 是 L 上的光滑点时，$\alpha_0 = \frac{1}{2}$)，则(7.11)可写成

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)dt = \alpha_0 \operatorname{res}\varphi(t_0). \qquad (7.17)$$

(7.17)很容易推广到一般情形. 设 $\varphi(z)$ 在 D 内全纯，除掉 L 上的点 $t_1, t_2, \cdots, t_N$ 外连续到 $\overline{D}$ 上，而在 t_j 处有 n_j 阶极点，且设

$$f(t) = \prod_{j=1}^{N}(t-t_j)^{n_j}\varphi(t) \in H_{n-1}, \quad n = \max n_j$$

于 L 上. 如果在每一 t_j 附近在 D 内作一小段光滑弧使之与 L 上 t_j 附近的一段构成一封闭曲线 γ_j (图 1-22)，则由 $\varphi(z)$ 的性质，显然，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)dt = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\varphi(t)dt.$$

由(7.17)，立刻可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)dt = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j \operatorname{res}\varphi(t_j), \quad (7.18)$$

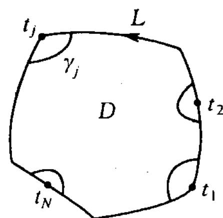


图 1-22

其中 $\alpha_j = \dfrac{\theta_j}{2\pi}$ (θ_j 为 $\overline{D}$ 在 t_j 处的内角) 为 $\overline{D}$ 在 t_j 处的张度.

当然(7.18) 还可推广到 $\varphi(z)$ 在 D 内部有孤立奇点的情况. 因此我们有下述**推广的留数定理**.

定理 1.7.3 设 L 为一分段光滑封闭曲线，围成一内域 D，已取定反时针向为其正向. 设函数 $\varphi(z)$ 在 D 内有孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_M$，而在 L 上有极点 $t_1, t_2, \cdots, t_N$，阶数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_N$，又

$$\prod_{j=1}^{N}(t-t_j)^{n_j}\varphi(t) \in H_{n-1}, \quad n = \max n_j,$$

则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \varphi(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{M}\operatorname{res}\varphi(z_k) + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j \operatorname{res}\varphi(t_j), \qquad (7.19)$$

其中 α_j 为 $\overline{D}$ 在 t_j 处的张度.

我们可以这样来理解(7.19) 式，$\varphi(z)$ 对于 D 内的奇点 z_k，由于其周围整个邻域都在 $\overline{D}$ 中，故可认为其张度 $\alpha_k = 1$. 因此，如果把 $\varphi(z)$ 在 $\overline{D}$ 上的奇点统一记为 ζ_j，则(7.19) 可写成

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \varphi(t)\mathrm{d}t = \sum_j \alpha_j \operatorname{res}\varphi(\zeta_j), \qquad (7.19)'$$

甚至，如果 $\varphi(z)$ 在 D 外以至在全平面解析并有孤立奇点，则(7.19)′ 右边还可理解为对全平面中 $\varphi(z)$ 的奇点求和，不过其在 $\overline{D}$ 外的奇点由于其周围整个邻域不在 $\overline{D}$ 上，故其相应张度$\alpha_j = 0$ 罢了.

定理 1.7.3 中，如果 L 取时针向为正向，D 为其外域，则(7.19) 式仍成立，不过其右端第一个和式中，要包括 $\operatorname{res}\varphi(\infty)$ (不论 $z=\infty$ 为 $\varphi(z)$ 的奇点与否).

以上所论很容易推广到分数阶奇异性情况. 设 L 与 D 仍如前述，$\varphi(z)$ 在 D 内全纯，在 $t_0 \in L$ 附近，

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z-t_0)^{n+\nu}}, \quad z \in \overline{D},\ f(t_0) \neq 0,$$

$$0 < \nu < 1,\ n \text{ 为正整数},$$

其中 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上 t_0 附近连续，这时我们也称 $\varphi(z)$ 在 $t = t_0$ 处有 $n+\nu$ 阶(广义)“极点”，其中 $(z-t_0)^{\nu}$ 已在 $\overline{D}$ 上取定一连续分支. 这时如果 $f^{(n)}(z)$ 在 $\overline{D}$ 上连续，且 $f^{(n)}(t) \in H$ 于 L 上，则由(7.10) 知，

$$\int_L \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+\nu-1)\cdots\nu}\int_L \frac{f^{(n)}(t)}{(t-t_0)^{\nu}}\mathrm{d}t.$$

但因 $f^{(n)}(z)$ 在 D 内全纯，且连续到 L 上，故由定理 1.7.1 知，

$$\int_L \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

如果 $\varphi(z)$ 在 L 上还有其他类似极点，结果也是一样. 再推广些，如果 $\varphi(z)$ 在 L 上还有整数阶极点，并在 D 内还有孤立奇点，则可得更一般的推广的留数定理如下：

定理 1.7.4 设分段光滑封闭曲线 L 围成一内域 D，L 已取定反时针向为其正向. 设 $\varphi(z)$ 为 D 内的单值解析函数，以 $z_1,z_2,\cdots,z_M$ 为孤立奇点，而在 L 上有极点 $t_1,t_2,\cdots,t_N$，阶数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_N$ (r_j 可为整数或分数)，又

$$\prod_{j=1}^{N}(t-t_j)^{r_j}\varphi(t) \in H_r,\quad r=\max[r_j] \tag{7.20}$$

于 $\overline{D}$ 上①，则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{M}\operatorname{res}\varphi(z_k) + \sum_j{}^{*}\alpha_j \operatorname{res}\varphi(t_j), \tag{7.21}$$

其中 $\sum_j{}^{*}$ 表示对使 r_j 为整数的那些 j 求和；且对于这种 j，按(7.12)，$\operatorname{res}\varphi(t_j)$ 是有意义的.

这是明显的，因为对于分数阶的极点 t_j，前已看到，在高阶奇异积分计算中不起作用.

我们还可这样理解(7.19)′式：在所设条件下，$\int_L \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ 等于 $\overline{D}$ 上诸奇点的留数的和，不过，对于 L 上的一个极点 t_j，我们想像把这点分成两部分，α_j 部分算作属于 $\overline{D}$，而其余的 $1-\alpha_j$ 部分算作不属于 $\overline{D}$；所以，虽然 $\varphi(t)$ 在 t_j 处的整个留数是 $\operatorname{res}\varphi(t_j)$，但由于上述原因，它属于 $\overline{D}$ 上的留数只能算作 $\alpha_j\operatorname{res}\varphi(t_j)$. 至于出现分数阶极点 t_j 时，由于 $\varphi(z)$ 在该处(在条件(7.20)之下)无留数可言(也可说留数为 0)，所以(7.17)仍可作上述解释.

同样我们可以引进函数在 L 上有分数阶零点的概念，也可以说这个零点有几分之几属于 $\overline{D}$，而其余部分不属于. 这样一来，读者不难证明，当 $\varphi(z)$ 在 D 内解析，可连续延拓到 $\overline{D}$ 上，但要除去一些极点(在 D 内或 L 上)，则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = N-P, \tag{7.22}$$

---

① 实际上只要在各 t_j 附近，它 $\in H_{[r_j]}$，而在其他点处函数连续就够了.

其中 N 为 $\varphi(z)$ 属于 $\overline{D}$ 的零点个数，P 为其属于 $\overline{D}$ 的极点个数. 这里计算零点与极点个数的方法按照上述原则进行，并且也要把重数考虑在内，例如函数

$$(z-t_0)^{\frac{4}{3}} \quad (t_0 \text{ 为 } L \text{ 的一个光滑点})$$

在 $\overline{D}$ 上的 t_0 处有半个 4/3 重零点，因此属于 $\overline{D}$ 的这个零点的个数应算作

$$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}.$$

(7.22) 是解析函数论中**推广的辐角原理**. 运用这里所阐述的观点，可使经典函数论中一些问题的叙述和论证简便得多.

我们熟知，留数定理可用来计算一些定积分的值. 推广的留数定理也有类似的用处. 今举数例如下：

例 1 试计算

$$I_{n,r}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^n x}{x^r}\mathrm{d}x, \quad n\geqslant r>0,$$

其中 n,r 同为奇数或同为偶数.

解 首先，我们来考虑高阶奇异积分

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{ikz}}{z^s}\mathrm{d}z \quad (k,s \text{ 均为正整数}),$$

其中 Γ 为以原点为中心、以 R 为半径的上半圆盘的周界，并取反时针向为正向. 被积函数在这闭半圆盘上只有唯一的一个 r 阶极点 $z=0$ 于 Γ 上. 由定理 1.7.3 知，

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{ikz}}{z^s}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{res}\,\frac{\mathrm{e}^{ikz}}{z^s}\bigg|_{z=0}=\frac{\pi\mathrm{i}^s}{(s-1)!}k^{s-1}.$$

但这时通常的 Jordan 引理成立，即当 $R\to+\infty$ 时，此积分在 Γ 的上半圆周部分趋于零，从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{x^s}\mathrm{d}x=\frac{\pi\mathrm{i}^s}{(s-1)!}k^{s-1}, \quad s,k=1,2,\cdots. \tag{7.23}$$

当然上式中左边积分在 ∞ 处要理解为主值积分. 分别考虑 s 为偶数或奇数情况，并将实部与虚部分开，便得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2kx}{x^{2s}}\mathrm{d}x=(-1)^s\pi\frac{(2k)^{2s-1}}{(2s-1)!}, \quad s=1,2,\cdots; \tag{7.24}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{x^{2s+1}}\mathrm{d}x=(-1)^s\pi\frac{(2k+1)^{2s}}{(2s)!}, \quad s=0,1,\cdots. \tag{7.25}$$

但是，我们有恒等式①：

① 见[43]. 也不难用归纳法证明.

$$\sin^{2m}x = \frac{1}{4^m}\left[C_m^{2m} + 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^k C_{m-k}^{2m}\cos 2kx\right],$$

$$\sin^{2m+1}x = \frac{1}{4^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_{m-k}^{2m+1}\sin(2k+1)x.$$

于是，当 $n = 2m$，$r = 2s$ 时，利用(7.23)，(7.24)，并注意(7.23) 当 $k = 0$，$s \geqslant 2$ 时也成立，便得

$$\begin{aligned} I_{2m,2s} &= \frac{2}{4^m}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k C_{m-k}^{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2kx}{x^{2s}}dx \\ &= \frac{2\pi}{4^m}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-s}C_{m-k}^{2m}\frac{(2k)^{2s-1}}{(2s-1)!} \\ &= \frac{(2m)!\pi}{4^{m-s}(2s-1)!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-s}\frac{k^{2s-1}}{(m-k)!(m+k)!} \\ &= \frac{(-1)^{m-s}(2m)!\pi}{4^{m-s}(2s-1)!}\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\frac{(m-j)^{2s-1}}{j!(2m-j)!}. \end{aligned}$$

当 $n = 2m+1$，$r = 2s+1$ 时，利用(7.25)，类似地可得

$$\begin{aligned} I_{2m+1,2s+1} &= \frac{1}{4^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_{m-k}^{2m+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{x^{2s+1}}dx \\ &= \frac{(2m+1)!\pi}{4^m(2s)!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k-s}\frac{(2k+1)^{2s}}{(m-k)!(m+k+1)!} \\ &= \frac{(-1)^{m-s}(2m+1)!\pi}{4^{m-s}(2s)!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{\left(m+\frac{1}{2}-j\right)^{2s}}{j!(2m+1-j)!}. \end{aligned}$$

以上两个式子可统一写成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^n x}{x^r}dx = \frac{(-1)^{\frac{n-r}{2}}\pi}{2^{n-r}(r-1)!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^j C_j^n\left(\frac{n}{2}-j\right)^{r-1} \quad (n \geqslant r). \tag{7.26}$$

当 $n < r$ 时，(7.26) 在高阶奇异积分的意义下也成立.

例 2 如图 1-23 所示，考虑积分 $\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz$，其中扇形中心角为 γ，$0 < \gamma \leqslant \pi$，由此计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x}\sin x}{x}dx, \quad \lambda > 0.$$

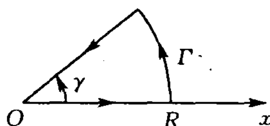


图 1-23

解 由推广的留数定理，应有

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = 2\pi i \cdot \frac{\gamma}{2\pi} = \gamma i.$$

令 $R\to+\infty$，由上式立即可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{+\infty}^{0}\frac{e^{i\rho e^{i\gamma}}}{\rho}d\rho=\gamma i.$$

取此式两边的虚部，便得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x-e^{-x\sin\gamma}\sin(x\cos\gamma)}{x}dx=\gamma,$$

从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x\sin\gamma}\sin(x\cos\gamma)}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\gamma=\frac{\pi}{2}-\gamma;$$

最后式子左边的积分已是收敛的反常积分. 在上式中令 $\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$，便得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x\cos\beta}\sin(x\sin\beta)}{x}dx=\beta,\quad |\beta|\leqslant\frac{\pi}{2}.\tag{7.27}$$

特别，当 $\beta>0$ 时，令 $\lambda=\cot\beta$，(7.27) 还可写成

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x}\sin x}{x}dx=\operatorname{arccot}\lambda,\quad \lambda>0;\tag{7.27'}$$

这与熟知的结果是一致的.

例 3 考察积分

$$\int_\Gamma\frac{1-e^{2iz}}{z^{p+1}}dz,\quad 0<p<1,$$

其中 Γ 为图 1-23 中 $\gamma=\pi$ 时上半圆盘的边界，z^{p+1} 取定在这半圆盘中的一全纯分支，使在正实轴上取正值. 由此证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx=\tan\frac{p\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx.\tag{7.28}$$

证 由于 p 为分数，故由推广的留数定理，上述积分等于零. 令 $R\to+\infty$，分开实部与虚部，并注意到 z^{p+1} 在负实轴上的辐角为 $(p+1)\pi$，可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^{p+1}}dx=\frac{\sin p\pi}{1-\cos p\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^{p+1}}dx.$$

此式又可改写为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{p+1}}dx=\frac{\cot\frac{p\pi}{2}}{2^{1-p}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{p+1}}dx,\quad 0<p<1.\tag{7.29}$$

若在 (7.29) 两边分部积分，经化简后，便可得 (7.28).

最后我们提醒注意，定理 1.7.4 中的条件 (7.20) 不能省去. 如果没有这一条件，公式 (7.21) 一般不成立. 例如，设

$$\varphi(t)=\frac{A}{(t-t_0)^p}+\frac{B}{t-t_0}=\frac{A+B(t-t_0)^{p-1}}{(t-t_0)^p},\quad 1<p<2,$$

其中 t_0 为 L 上一点. 现在 $(t-t_0)^p\varphi(t)$ 在 $t=t_0$ 处无导数，但这时显然

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \varphi(t)\,\mathrm{d}t=\alpha_0 B,$$

其中 α_0 为 $\overline{D}$ 在 t_0 处的张度. 这就是说，在这种情况下，$\varphi(t)$ 虽然在 t_0 处有分数阶"极点"，但在计算上述积分时，这个极点还是要起作用的，不能把它略去不予考虑，且仍可记 $B=\operatorname{res}\varphi(t_0)$. 对于这类极点，仍应计入(7.17)式右边最后的 $\sum^*$ 求和记号中.

一般，如果在 L 上一点 $t=t_0$ 附近，

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{p}\frac{c_j}{(t-t_0)^{p_j}}+\frac{c_0}{t-t_0}+\varphi_0(t),\quad p_j>0,\ p_j\neq 1,$$

而 $\varphi_0(t)$ 在 L 上 t_0 附近连续，则仍记 $c_0=\operatorname{res}\varphi(t_0)$. 而对这种点 t_0，$f(t)$ 在该点的留数仍要计入(7.21)式右边的 $\sum^*$ 中. 或者也可这样看：对于满足条件(7.20)的诸点 t_j，可以认为 $f(t)$ 在这些点处的留数为零，因此推广的留数定理仍可统一地用(7.19)式表示.

有关留数定理的进一步推广及其应用，钟寿国做了不少工作，参看[59]～[62].

习　题

1. 试直接导出(7.28)式.

2. 试自行设计利用推广的留数定理导出一些定积分计算公式.

3. 对于多连通区域来说，推广的留数定理应如何叙述?

4. 设 D 为一无界区域，其边界为两端延伸到无穷远的分段光滑曲线. 试将留数定理推广到这类区域上去.

5. 试证：如果 $f(t)\in H_1$ 于 $L=\widehat{ab}$ 上，则

$$\int_{\widehat{ab}}\frac{(t-t_0)f(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t=\int_{\widehat{ab}}\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L,\ t_0\neq a,b;$$

这里算式左边要理解为

$$\int_{\widehat{ab}}\frac{\varphi(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t,$$

其中 $\varphi(t)=(t-t_0)f(t)$. 同样，试证：

$$A\int_{\widehat{ab}}\frac{f(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t+B\int_{\widehat{ab}}\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t=\int_{\widehat{ab}}\frac{[A+B(t-t_0)]f(t)}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t.$$

上述结果还可推广到更高阶的、甚至分数阶的奇异积分情形.

第二章　封闭曲线情况下的基本边值问题

本章将阐述在封闭曲线和 Hölder 连续系数下的最基本的 Riemann 边值问题、Hilbert边值问题和复合边值问题，并对(单和双)周期边值问题作详细的讨论.

2.1　引　　言

2.1.1　Riemann 边值问题的提法

设 $L=\sum_{j=1}^{n}L_j$ 是复平面中有限条互不相交的光滑封闭曲线组，各 L_j 从而整个 L 已取定了正向. 例如，不妨使整个平面分成两组区域，一组记为 S^+，都位于 L 的正(左)侧，另一组记为 S^-，都位于 L 的负(右)侧，并不妨认为 $z=\infty$ 在 S^- 内，如图 2-1 所示.

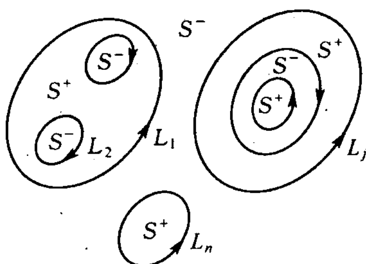


图 2-1

在本章中，我们将主要讨论下一有关解析函数的基本边值问题(及其一些应用)，称为 **Riemann 边值问题**，或简称为 **R 问题**：

求以 L 为跳跃(间断) 曲线的一分区全纯函数 $\Phi(z)$，满足边值条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L,\tag{1.1}$$

其中 $G(t)$, $g(t)$ 都是 L 上的已知函数，皆 $\in H$. 如果要求 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处至多为 m 阶的，则此问题将记为 R_m. 以后我们最常讨论的是问题 R_0 和 R_{-1}，前者要求 $\Phi(\infty)$ 有限，后者要求 $\Phi(\infty)=0$.

当 $G(t)$ 在 L 上处处不等于零时，称此 R 问题为**正则型的**；否则，称之为**非正则型或例外型的**.

2.1.2　跳跃问题及其解法

最简单的 R 问题莫过于跳跃问题，即在(1.1) 中的 $G(t)\equiv 1$：

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=g(t),\quad t\in L. \tag{1.2}$$

我们还设是在 R_m 中求解此问题.

由于 $g(t)\in H$，由 Plemelj 公式，立刻可以想见，

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(t)}{t-z}\mathrm{d}t,\quad z\overline{\in} L \tag{1.3}$$

是满足条件(1.2) 的：

$$\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t)=g(t),\quad t\in L. \tag{1.4}$$

由(1.2),(1.4) 知，

$$\Phi^{+}(t)-\Psi^{+}(t)=\Phi^{-}(t)-\Psi^{-}(t).$$

这就是说，$F(z)=\Phi(z)-\Psi(z)$ 在 S^{+}, S^{-} 内全纯，且在 L 的两侧有相同的边值. 根据解析延拓的定理，$F(z)$ 必在全平面内全纯.

先设 $m>0$. 因为 $\Psi(\infty)=0$，故 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处应与 $\Phi(z)$ 一样至多有 m 阶极点. 由推广的 Liouville 定理，知 $F(z)$ 必为一至多 m 次的多项式. 所以，问题(1.2) 的 R_m 中的一般解是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(t)}{t-z}\mathrm{d}t+P_m(z), \tag{1.5}$$

其中 $P_m(z)$ 为一任意的 m 次多项式①. 也就是，在这个一般解中，含有 $m+1$ 个任意(复) 常数. 我们称它是有 $m+1$ 个(复的) **自由度**.

如果(1.2) 在 R_0 中求解，即要求 $\Phi(\infty)$ 有限或 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处解析，则(1.5) 中应取 $P_0(z)=$ 常数(任意的)，即解的自由度为 1.

如果(1.2) 在 R_{-1} 中求解，即要求 $\Phi(\infty)=0$，则应取 $P_{-1}(z)=0$，从而问题有唯一解. 这时解的自由度为 0.

如果(1.2) 在 R_{-r} 中求解，$r\geqslant 2$，那么即使在(1.5) 中取 $P_{-r}(z)=0$ 也不能保证 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处有 r 阶零点. 这时，把(1.5) 式中的 Cauchy 型积分在 $z=\infty$ 附近展开为 Laurent 级数，可得

① 以后凡是讲到一个任意 m 次多项式，若无特别声明，都是指实际次数不超过 m 的任意复系数多项式.

$$\Phi(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_L g(t)t^k \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{z^{k+1}}.$$

于是，为了保证 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处有 r 阶零点，须且只须

$$\int_L g(t)t^k \mathrm{d}t = 0, \quad k = 0,1,\cdots,r-2. \tag{1.6}$$

这就是说，当且仅当 $g(t)$ 满足(1.6) 的 $r-1$ 个条件(它们显然是独立的) 时，问题在 R_{-r} 中才可解，且有唯一解(1.5) (其中多项式取为 0). 也就是，当 $m \leqslant -2$ 时(即 $r=-m$)，$g(t)$ 要受到 $-(m+1)$ 个(即 $r-1$ 个) 约束条件时，它才有唯一解. 在这种情况下，我们也说，解有 $m+1$ 个(为负数!) 自由度.

这样，我们便有

定理 2.1.1 跳跃问题(1.2) 在 R_m 中求解时，其一般解含有 $m+1$ 个自由度. 具体说来，当 $m \geqslant 0$ 时，其解由(1.5) 给出，其中 $P_m(z)$ 为 m 次任意多项式；当 $m=-1$ 时，它有唯一解(在(1.5) 中令 $P_0(z)=0$)；当 $m \leqslant -2$ 时，当且仅当满足 $-(m+1)$ 个可解条件时，它才有上述唯一解.

以后我们总把 m 次任意多项式 $P_m(z)$ 当 $m<0$ 时理解为恒等于零. 于是 (1.2) 在 R_m 中的解总可写为(1.5) (当 $m \leqslant -2$ 时如果它可解的话).

由 Privalov 定理，可知 $\Phi^{\pm}(t) \in H$ 于 L 上.

习　题

1. 在问题(1.2) 中，如果允许 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处有本性奇点，则会产生什么结果?

2. 在问题(1.2) 中，如果允许 $\Phi(z)$ 在扩充复平面上有有限个极点(当然都不在曲线 L 上)，结果又会怎样?

3. 设 L 为单位圆周 $|t|=1$，且已取定反时针向为其正向，求分区全纯函数 $\Phi(z)$，使

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) + \cos\theta, \quad t = e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

且要求 $\Phi(\infty)$ 有界.

2.2 齐次 Riemann 边值问题

2.2.1 齐次 R 问题与指标概念

在问题(1.1) 中，如果 $g(t) \equiv 0$，则称它为**齐次 Riemann 问题**或**齐次 R 问**

题. 即要求一分区全纯函数 $\Phi(z)$，以 L 为跳跃曲线，使得

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \quad t \in L, \tag{2.1}$$

其中 $G(t)$ 已给，$\in H$，且 $G(t) \neq 0$. 为简单起见，我们只在 R_0 中求解，即要求 $\Phi(\infty)$ 有限.

从形式上看，只要在(2.1) 中两边取对数，就可变为跳跃问题(1.2)，其中 $g(t) = \log G(t)$. 但一般说来这样做是不行的，因为这时 $\log G(t)$ 可能是多值函数，由于当 t 沿各个 L_j 正向环行一周时，其虚部 $\arg G(t)$ 可能会增加 2π 的某整数倍. 这样看来，整数值

$$\kappa_j = \frac{1}{2\pi i}[\log G(t)]_{L_j} = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_j}, \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{2.2}$$

有着重要的意义，称为 $G(t)$ **关于** L_j **的指标**，记为

$$\kappa_j = \operatorname{Ind}_{L_j} G(t);$$

而把 $\kappa = \sum_{j=1}^{n} \kappa_j$ 称为 $G(t)$ **关于** L **的指标**，记为

$$\kappa = \sum_{j=1}^{n} \kappa_j = \operatorname{Ind}_L G(t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Ind}_{L_j} G(t), \tag{2.3}$$

也称为问题(2.1) 的指标.

可注意到，κ_j 的值与 $\log G(t)$ 或 $\arg G(t)$ 在 L_j 上取定哪一支无关，即 κ_j 从而 κ 完全由 $G(t)$ 确定，而与(2.2) 中的对数支的选择无关. 还可看出，这时 $1/G(t)$ 的指标为 $-\kappa$. 还易证明，若 $H(t) \neq 0$ 也是 L 上的连续函数，则 $G(t)H(t)$ 的指标为 $G(t)$ 与 $H(t)$ 的指标之和，而 $G(t)/H(t)$ 的指标为它们之差. 最后我们指出，当 L（亦即各 L_j）改变相反的指向为正向时，$G(t)$ 的指标 κ 就变成 $-\kappa$.

2.2.2 齐次 R 问题的解法 —— 简单情况

本段讨论 L 仅由一条光滑封闭曲线构成的情况，并设它已取定反时针向为其正向；若无特别声明，指的是在 R_0 中求解. 随着 $G(t)$ 的指标 κ 为零、为正或为负，情况有所不同，今分述如下：

1° 设 $\kappa = 0$. 这一情况特别简单，因为这时 $\log G(t)$ 是 L 上的单值函数（如果取定一确定分支). 暂时认为 $\Phi^\pm(t)$ 在 L 上 $\neq 0$，并且单值，则在(2.1) 中取对数后，便成为下列跳跃问题：

$$\log \Phi^+(t) = \log \Phi^-(t) + \log G(t), \quad t \in L. \tag{2.4}$$

这时 $\Gamma(z) = \log \Phi(z)$ 也是分区全纯的. 由 2.1 节的结果知，

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G(t)}{t - z}\,dt, \quad z \overline{\in} L \tag{2.5}$$

是其一个解，且$\Gamma(\infty)=0$. 因此我们得到$X(z)=e^{\Gamma(z)}$应是(2.1)的一个解. 以上我们作了一些根据不足的假定. 但我们可以通过 Plemelj 公式直接进行验证，

$$X(z)=e^{\Gamma(z)}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\log G(t)}{t-z}dt\right\} \tag{2.6}$$

确实是(2.1) 的一个特解：

$$X^+(t)=G(t)X^-(t),\quad t\in L. \tag{2.7}$$

此外，还可看到，$X^{\pm}(t)\neq 0$ 于 L 上，又 $X(\infty)=1$.

为求得(2.1) 在 R_0 中的一般解，由(2.1) 和(2.7)，得

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)},$$

故 $F(z)=\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ 在全平面全纯，又因 $\Phi(\infty)$ 有界，故 $F(\infty)$ 也有界. 由 Liouville 定理，它是一常数，即问题(2.1) 在 R_0 中的一般解为

$$\Phi(z)=CX(z), \tag{2.8}$$

其中 C 为任意常数，而 $X(z)$ 由(2.6) 给出.

注意，如果在问题(2.1) 中还要求 $\Phi(\infty)=0$，则因 $X(\infty)=1$，故必须在(2.8) 中令 $C=0$，即问题(2.1) 在 R_{-1} 中只有零解；在 $R_{-r}(r>0)$ 中当然更只能有零解. 如果允许 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处至多有 m 阶极点，即在 $R_m(m>0)$ 中求解，则(2.1) 的一般解为

$$\Phi(z)=P_m(z)X(z), \tag{2.9}$$

这里 $P_m(z)$ 为 m 次任意多项式.

最后，提醒读者，在(2.6) 中另取 $\log G(t)$ 的一支时，$X(z)$ 并不会改变. 请读者自己验证.

2° 设 $\kappa>0$. 这时 $\log G(t)$ 是 L 上的多值函数，我们要设法避开这一困难. 在 L 所围内域中任意取定一点 z_0. 注意函数 $(t-z_0)^\kappa$ 关于 L 的指标为 κ，所以 $G_0(t)=(t-z_0)^{-\kappa}G(t)$ 关于 L 的指标为零. 因此，我们可以把问题(2.1) 改写为

$$\Phi^+(t)=G_0(t)(t-z_0)^\kappa\Phi^-(t),\quad t\in L, \tag{2.10}$$

并令 $\Psi(z)$ 为一新的分区全纯函数：

$$\Psi(z)=\begin{cases}\Phi(z), & \text{当 } z\in S^+;\\ (z-z_0)^\kappa\Phi(z), & \text{当 } z\in S^-,\end{cases} \tag{2.11}$$

则(2.10) 就是 $\Psi(z)$ 的一个 R 问题：

$$\Psi^+(t)=G_0(t)\Psi^-(t),\quad t\in L. \tag{2.12}$$

注意 $\Phi(\infty)$ 有界，因为在 R_0 中求解，故 $\Psi(z)$ 在 ∞ 处至多为 κ 阶. 即我们要求对(2.12) 在 R_κ 中求解. 如果记

$$X_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G_0(t)}{t-z}dt\right\}, \quad z \overline{\in} L,$$

则由(2.9) 知，问题(2.12) 的一般解为

$$\Psi(z) = P_\kappa(z) X_0(z),$$

这里 $P_\kappa(z)$ 是 κ 次任意多项式. 回到 $\Phi(z)$，则得问题(2.1) 在 R_0 中的一般解为

$$\Phi(z) = P_\kappa(z) X(z), \tag{2.13}$$

其中

$$X(z) = \begin{cases} X^+(z) = e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z \in S^+; \\ X^-(z) = (z-z_0)^{-\kappa} e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z \in S^-, \end{cases} \tag{2.14}$$

而这里

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log[(t-z_0)^{-\kappa} G(t)]}{t-z}dt. \tag{2.15}$$

注意，由于 $z_0 \in S^+$，所以 $X(z)$ 从而 $\Phi(z)$ 的确是分区全纯函数.

如果补充要求 $\Phi(\infty) = 0$，即在 R_{-1} 中求解，则(2.3) 中的多项式 $P_\kappa(z)$ 要改为 $P_{\kappa-1}(z)$. 同理，如果(2.1) 在 R_{-m} 中求解($m > 0$)，则其一般解要在(2.13) 中把 $P_\kappa(z)$ 改为 $P_{\kappa-m}(z)$；而当 $\kappa < m$ 时，它只有零解.

注 $\kappa = 0$ 的情况也可概括在这一情况中.

3° 设 $\kappa < 0$. 仍令 $z_0, G_0(z), \Psi(z)$ 如前. 这时，所不同的是：因 $\Phi(\infty)$ 有限，由(2.11)，故 $\Psi(z)$ 在 $z = \infty$ 处至少有 $-\kappa$ 阶零点. 由此可见，对指标为 0 的问题(2.12)，在 R_κ 中求解时，由 1° 知，它只有零解；从而(2.1) 在 R_0 中也只有零解.

综上所述，我们便得

定理 2.2.1 对于齐次 R 问题(2.1)，如果要求 $\Phi(\infty)$ 有界，即在 R_0 中求解，则当其指标 $\kappa \geq 0$ 时问题有 $\kappa + 1$ 个线性无关的解，而当 $\kappa < 0$ 时，它只有零解.

这里所说的 $\kappa + 1$ 个解($\kappa \geq 0$ 时)，由(2.13)，为

$$X(z), zX(z), \cdots, z^\kappa X(z),$$

易见它们为线性无关的(指在复系数域内).

同理，如果要求 $\Phi(\infty) = 0$ 即在 R_{-1} 中求解，则当 $\kappa > 0$ 时，(2.1) 有 κ 个线性无关的解；当 $\kappa \leq 0$ 时，它只有零解. 读者也容易给出(2.1) 在 R_m 中求解时的结果.

2.2.3 典则函数

无论κ取值如何，由(2.14)式定义的分区全纯函数$X(z)$有以下的特点：

Ⅰ. $X^{+}(t)=G(t)\,X^{-}(t)$；

Ⅱ. 在整个有限平面上$X(z)\neq 0$，包括在L上$X^{\pm}(t)\neq 0$；

Ⅲ. 在$z=\infty$处$X(z)$有有限阶，其阶数为$-\kappa$.

这几点都容易直接验证. 性质Ⅰ说明，不论κ如何，它是齐次R问题(2.1)的一个特解；且由Ⅲ，它是$\mathrm{R}_{-\kappa}$中的解. 我们把$X(z)$或$CX(z)$ (C为任意非零常数) 称为齐次R问题的**典则解**或**典则函数**. 一般说来，一个分区全纯函数$X(z)$若具有以上三个性质，就称它为问题(2.1)的一个**典则函数**. 注意，在这一定义中，并不一定要限定L的正向如何选取. 容易证明，(2.1)的任何典则函数必为$CX(z)$之形($C\neq 0$).

我们还应注意，$X^{\pm}(t)\in H$于L上. 这由1.3.1段中的Privalov定理以及$X(z)$的结构立刻可以看出，当然这里还要用到1.2.3段中的一些性质.

以上假定了L取反时针向为正向. 如果问题(2.1)中的L以顺时针向为正向，也可类似地去求其典则函数，从而求出其(例如在R_0中的)一般解. 这时典则函数的作法见本节末习题2. 当然这时也可把L的正向再掉转来成为反时针向，从而$\Phi^{\pm}(t)$也要相应地分别改为$\Phi^{\mp}(t)$，因而(2.1)成为

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{G(t)}\,\Phi^{-}(t),$$

然后再按本段中方法求解. 最后结果自然是一样的.

2.2.4 齐次R问题的解法——一般情况

现在回到$L=\sum\limits_{j=1}^{n}L_j$的一般情况($n>1$)，并设各$L_j$已取定正向如本章开始时所作的那样，且$z=\infty$在$S^{-}$内(参看图2-1). 虽然这样做并非必要，但却可使叙述简明. 现在来求解齐次问题(2.1)，仍设$G(t)\in H$，$G(t)\neq 0$，亦即，对每一j，当$t\in L_j$时，$G(t)\equiv G_j(t)\in H$，且$G(t)\neq 0$于L_j上.

我们对每一L_j ($j=1,2,\cdots,n$) 作问题(2.1) (限于$t\in L_j$上) 的典则函数$X_j(z)$，于是

$$X_j^{+}(t)=G_j(t)X_j^{-}(t),\quad t\in L_j,\tag{2.16}$$

且$X_j(z)\neq 0$于全复平面，在∞处有$-\kappa_j=-\mathrm{Ind}_{L_j}G_j(t)$阶. 由于各$L_j$互不相交，故$X_j(z)$在$L_k(k\neq j)$上全纯，从而

$$X_j^{+}(t)=X_j^{-}(t),\quad t\in L_k,\ k\neq j.\tag{2.17}$$

现在我们令

$$X(z)=\prod_{j=1}^{n}X_j(z),\tag{2.18}$$

则 $X(z)$ 是一以 L 为跳跃曲线的分区全纯函数. 由(2.16) 与(2.17) 可见,

$$X^+(t)=G(t)\,X^-(t),\quad t\in L,$$

且 $X(z)\neq 0$ 于全平面上，包括其边值$X^{\pm}(t)\neq 0$. 此外，$X(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶数为诸 $X_j(z)$ 在该处的阶数之和，即

$$-\sum_{j=1}^{n}\kappa_j=-\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Ind}_{L_j}G_j(t)=-\operatorname{Ind}_L G(t)=-\kappa.$$

总之，$X(z)$ 满足上段中的性质 Ⅰ～Ⅲ. 这种满足这三条性质的函数仍称为(2.1) 的典则函数或典则解. 因此 $X(z)$ 或$CX(z)$ $(C\neq 0)$ 都是(2.1) 的典则函数，且任何典则函数可证其必为此形. 又很明显，$X(t)\in H$ 于L 上，因为每个 $X_j(t)\in H$ 于 L_j 上.

这样一来，2.2.2 段中对 κ 三种情况的讨论都成立. 亦即，在这一情况下，定理2.2.1仍成立，且(2.1) 在 R_0 中的一般解仍以(2.13) 给出，但 $X(z)$ 要以(2.18) 给出.

最后我们指出，(2.1) 的解$\Phi^{\pm}(t)$ 均在 L 上 $\in H$，此仍由 Privalov 定理立刻可知.

习　题

1. 设 L 为一封闭光滑曲线，$G(z)$ 在 L 所围的闭区域$\bar{S}$ 上连续，在 S 内亚纯，且 $G(t)\neq 0$ 于 L 上. 求证：

$$\operatorname{Ind}_L G(t)=N-P,$$

其中 N,P 分别为 $G(z)$ 在 S 内零点与极点的个数(重数要计入个数中).

2. 试证：如果 L 为一封闭光滑曲线，以顺时针方向为其正向，则

$$X(z)=\begin{cases}(z-z_0)^{-\kappa}e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in S^+;\\ e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in S^-\end{cases}$$

为问题(2.1) 的典则解，其中 $\kappa=\operatorname{Ind}_L G(t)$，$G(t)\in H$，$G(t)\neq 0$ 于 L 上，而

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\log[(t-z_0)^{\kappa}G(t)]}{t-z}dt,$$

z_0 仍是 L 所围内域中的一点(即 $z_0\in S^-$). 由此说明定理 2.2.1 仍成立，并求出其一般解.

3. 设 S^+ 是一有界多连通区域，其边界 $L=\sum_{j=0}^{n}L_j$，其中 L_0 围住其他所

有的 L_j $(j=1,2,\cdots,n)$. 取 L 的正向使 S^+ 在其左侧，$S^+ + L$ 的余集记为 S^-. 仍设 $G(t)\in H$，$G(t)\neq 0$ 于 L 上，L_j 都是光滑的. 在这种情况下，求解 R_0 问题(2.1). 试证：这时

$$X(z)=\begin{cases}\dfrac{e^{\Gamma(z)}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(z-z_j)^{\kappa_j}}, & \text{当 } z\in S^+;\\ (z-z_0)^{-\kappa}e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in S^-\end{cases}$$

是问题(2.1)的典则函数，其中 z_0 为 S^+ 内取定的一点，z_j 为 L_j $(j\geqslant 1)$ 所围内域中取定的点，而 κ_j 为 $G(t)$ 在 L_j 上的指标，

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\log\left[(t-z_0)^{-\kappa}\prod\limits_{j=1}^{n}(t-z_j)^{\kappa_j}G(t)\right]}{t-z}dt,\quad z\,\overline{\in}\,L,$$

其中 $\kappa=\sum\limits_{j=0}^{n}\kappa_j$ 为 $G(t)$ 在 L 上的指标.

4. 上题中，如果不存在 L_0，这时 S^+ 是一无界多连通区域，则问题(2.1)的典则函数有怎样的表达式?

2.3 非齐次 Riemann 边值问题

2.3.1 非齐次 R 问题的求解

现在来求解非齐次 R 问题(1.1)，其中 $g(t)\not\equiv 0$. 这里 $L=\sum\limits_{j=1}^{n}L_j$ 已是上节中所说的一般情况，且其正向也已如前取定. 为简单起见，仍要求 $\Phi(\infty)$ 有界，即在 R_0 中求解. 仍称

$$\kappa=\mathrm{Ind}_L G(t)\tag{3.1}$$

为**问题(1.1)的指标**，并且把其相应的齐次问题(2.1)的典则解 $X(z)$（见(2.18)式，又见上节习题3）称为问题(1.1)的**典则函数**(但不能叫典则解).

由 $X(z)$ 的性质 Ⅰ(2.2.3段)，问题(1.1)可改写为

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}+\frac{g(t)}{X^+(t)},\quad t\in L.$$

如果记 $F(z)=\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$，则它也是一分区全纯函数，满足跳跃条件

$$F^+(t) - F^-(t) = \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L. \tag{3.2}$$

注意 $X(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶数为 $-\kappa$，而 $\Phi(\infty)$ 有界，因此 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶数至多为 κ. 亦即，这个跳跃问题要在 R_κ 中求解.

因此，根据 2.1.2 段中的结果，由 κ 取不同值的情况，可得问题(1.1) 在 R_0 中求解的结果如下：

1° 设 $\kappa \geqslant 0$. 由(1.5)，跳跃问题(3.2) 在 R_κ 中的一般解为

$$F(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)}\frac{\mathrm{d}t}{t-z} + P_\kappa(z);$$

回到 $\Phi(z)$，便得非齐次问题(1.1) 在 R_0 中的一般解为

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)}\frac{\mathrm{d}t}{t-z} + P_\kappa(z)X(z), \tag{3.3}$$

其中 $P_\kappa(z)$ 为一 κ 次任意多项式.

2° 设 $\kappa=-1$. 这时 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处至多有一阶零点，所以问题(1.1) 在 R_0 中有唯一解(3.3)，但其中 $P_{-1}(z)$ 如前所说要理解为恒等于零.

3° 设 $\kappa<-1$. 由 2.1.2 段知，跳跃问题(3.2) 在 R_κ 中当且仅当

$$\int_L \frac{g(t)t^k}{X^+(t)}\mathrm{d}t = 0, \quad k=0,1,\cdots,-\kappa-2 \tag{3.4}$$

时可解，且解唯一. 这样，这时问题(1.1) 在 R_0 中的可解条件为(3.4)，当它们满足时，它有唯一解，并仍以(3.3) 给出，当然 $P_\kappa(z)$ 要理解为恒等于零.

因此得到

定理 2.3.1 非齐次问题(1.1) 在 $\Phi(\infty)$ 有界的条件下，当其指标 $\kappa \geqslant -1$ 时无条件可解，其一般解可写成(3.3)，其中 $P_\kappa(z)$ 为 κ 次任意多项式；而当 $\kappa<-1$ 时，要满足 $-\kappa-1$ 个可解条件(3.4) 时才可解，且有唯一解(3.3) ($P_\kappa \equiv 0$). 总之，这个 R_0 问题的解含有 $\kappa+1$ 个自由度.

以后经常要用到的，除在 R_0 中外，问题(1.1) 也要在 R_{-1} 中求解，即要求 $\Phi(\infty)=0$. 这时 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶数至多为 $\kappa-1$. 所以相应的跳跃问题(3.2) 要在 $\mathrm{R}_{\kappa-1}$ 中求解. 这样，同理又可得

定理 2.3.2 非齐次问题(1.1) 在要求 $\Phi(\infty)=0$ 的条件下，当 $\kappa \geqslant 0$ 时无条件可解，且其一般解为

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)}\frac{\mathrm{d}t}{t-z} + P_{\kappa-1}(z)X(z), \tag{3.5}$$

其中 $P_{\kappa-1}(z)$ 为 $\kappa-1$ 次任意多项式($P_{-1}\equiv 0$)；而当 $\kappa<0$ 时，当且仅当

$$\int_L \frac{g(t)t^k}{X^+(t)}\mathrm{d}t = 0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-1 \tag{3.6}$$

满足时才有解，且解唯一，仍由(3.5)给出($P_{\kappa-1}\equiv 0$). 总之，这一问题在 R_{-1} 中的解有 κ 个自由度.

不消说，在任何情况下，$\Phi^{\pm}(t)\in H$ 于 L 上.

2.3.2 相联 R 问题

对于非齐次 R 问题(1.1)或其相应的齐次 R 问题(2.1)，我们称下一齐次 R 问题

$$\Psi^+(t) = \frac{1}{G(t)}\Psi^-(t),\quad t\in L, \tag{3.7}$$

为其**相联的 R 问题**. 它与原来的 R 问题(1.1)之间有着密切的关系.

首先注意，(3.7) 的指标 κ' 为

$$\kappa' = \mathrm{Ind}_L\left(\frac{1}{G(t)}\right) = -\mathrm{Ind}_L G(t) = -\kappa;$$

且若 $X(z)$ 为(1.1) 的典则函数，则 $1/X(z)$ 是(3.7) 的典则函数.

我们考虑问题(1.1) 与(3.7) 都在 R_{-1} 中求解，即分别要求

$$\Phi(\infty)=0,\quad \Psi(\infty)=0.$$

由 2.2.4 段知，当 $\kappa'>0$ (即 $\kappa<0$) 时，(3.7) 的一般解为

$$\Psi(z) = \frac{P_{-\kappa-1}(z)}{X(z)},$$

亦即，其线性无关完全解组为

$$\Psi_k(z) = \frac{z^k}{X(z)}\quad (k=0,1,\cdots,-\kappa-1).$$

于是条件(3.6) 就是

$$\int_L g(t)\Psi_k^+(t)\mathrm{d}t = 0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-1. \tag{3.8}$$

亦即，$g(t)$ 与 $\Psi_k^+(t)$ 正交，也就与(3.7) 的任何解的正边值$\Psi^+(t)$ 正交. 而当 $\kappa'\leqslant 0$ (即 $\kappa\geqslant 0$) 时，问题(3.7) 只有零解，这时也可说 $g(t)$ 与这零解正交，而这时问题(1.1) 在 R_{-1} 中是无条件可解的. 因此由定理 2.3.2 可知，我们有

定理 2.3.3 R 问题(1.1) 要求 $\Phi(\infty)=0$ 时当且仅当 $g(t)$ 与其相联问题(3.7) 满足 $\Psi(\infty)=0$ 的一切解的正边值正交时才是可解的.

注意，如果在别的 R_m 中(例如在 R_0 中) 考虑问题，上述定理不能成立.

最后我们指出，(3.7) 的相联问题是(2.1)，即相联关系是互逆的.

习　题

1. 设 L 为一封闭光滑曲线，以反时针向为正向，求解 R 问题

$$\Phi^+(t)=\frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t)+\frac{2t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)},\quad t\in L,$$

其中 i,2i 在 S^+ 内，$-i$，$-2i$ 在 S^- 内，并要求 $\Phi(\infty)=0$.

答 $\Phi^\pm(z)=\dfrac{\pm 1}{(z\pm i)^2(z\pm 2i)}+\dfrac{C_0+C_1z}{(z\pm i)(z\pm 2i)}$，其中 C_0,C_1 为任意常数.

2. L 同上，但设 $-i$ 在 S^+ 内，i,2i，$-2i$ 在 S^- 内. R 问题

$$\Phi^+(t)=\frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t)+\frac{2t(t-2i)(at+1)}{(t+i)(t+2i)},$$

$$t\in L,\quad \Phi(\infty)=0,$$

当 a 取何值时才是可解的?并求出解来.

答 $a=-i$；且这时 $\Phi^+(z)=\dfrac{-2iz(z-2i)}{z+2i}$，$\Phi^-(z)=0$.

3. 求解

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=g(t),\quad t\in L,\ g(t)\in H,\ \Phi(\infty)=0,$$

其中 L 为一条或有限条互不相交的封闭光滑曲线.

4. 设 $L=\sum_{j=1}^{n}L_j$ 如正文所述，但某些 L_j 与 L_k 在个别点处相切. 问本节所得结果是否适用于这种情况?

5. 若 L 由一些互不相交的分段光滑封闭曲线构成，试证本节所论对这种情况也成立，所求得的解即使在 L 的角点处也满足原 R 问题.

2.4 无穷曲线上的 Riemann 边值问题

实轴上的 R 问题

本段中考虑 L 是一无穷直线时的 R 问题，不妨设 L 就是整个 x 轴，记为 X. 要求解下一 R 问题：

$$\Phi^+(x)=G(x)\Phi^-(x)+g(x),\quad x\in X,\tag{4.1}$$

仍设 $G(x)\neq 0$，且 $G(\infty)$ 存在，也 $\neq 0$；而代替 H 类，我们假定 $G(x)$，

$g(x) \in \hat{H}$ 于 X 上(见1.5.1段)，于是 $g(\infty)$ 也存在. X 的正向已取定为 x 轴的正向，并把上半平面记为 Z^+，下半平面记为 Z^-. 为确定起见，要求 $\Phi(\infty)$ 有界，意指 $\Phi(z)$ 当 $z \in \overline{Z^+}$ 或 $z \in \overline{Z^-}$ 而 $\to \infty$ 时，极限 $\Phi^+(\infty)$ 和 $\Phi^-(\infty)$ 分别存在(当然在 X 上，$\Phi^{\pm}(+\infty) = \Phi^{\pm}(-\infty)$).

由于 $G(x) \neq 0$ 于 X 上，$G(x) \in \hat{H}$，故当 x 从 $-\infty$ 连续上升变到 $+\infty$ 时，其像形成一封闭连续曲线，不经过原点，因而仍可定义下一整数

$$\kappa = \operatorname{Ind}_X G(x) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(x)]_X \tag{4.2}$$

为 $G(x)$ 或问题(4.1) 的**指标**.

我们当然可以用分式线性变换把 X 变为 w 平面上的一圆周 Γ 且保持正向，因而 $Z^{\pm}$ 分别变成 Γ 的内域、外域 $S^{\pm}$，于是所提问题就可转化为 w 平面上关于 Γ 的 R 问题，且应在 R_0 中求解. 但用下面的方法直接讨论也并不麻烦.

令

$$G_0(x) = \left(\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\right)^{\kappa} G(x),$$

易证 $G_0(x) \in \hat{H}$，$G_0(x) \neq 0$，$G_0(\infty) = G(\infty) \neq 0$，且

$$\operatorname{Ind}_X G_0(x) = 0.$$

先考虑齐次问题

$$\Phi^+(x) = G(x)\, \Phi^-(x), \quad x \in X. \tag{4.3}$$

把它改写为

$$\Psi^+(x) = G_0(x)\, \Psi^-(x), \quad x \in X,$$

这里已令

$$\Psi(z) = \begin{cases} (z+\mathrm{i})^{\kappa}\Phi(z), & \text{当 } z \in Z^+; \\ (z-\mathrm{i})^{\kappa}\Phi(z), & \text{当 } z \in Z^-. \end{cases}$$

$\Psi(z)$ 也分区全纯，不过 $\Psi(z) = O(|z|^{\kappa})$ (当 $z \to \infty$). 再令

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log G_0(x)}{x-z}\mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

由于 $G_0(x)$ 的指标为 0，故其对数可取定为一单值支，且易证 $\log G_0(x) \in \hat{H}$，故 $\Gamma^{\pm}(x)$ 存在，且也 $\in \hat{H}$，又 $\Gamma(\pm\infty) = 0$ (定理 1.5.2). 再记

$$X(z) = \begin{cases} (z+\mathrm{i})^{-\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z \in Z^+; \\ (z-\mathrm{i})^{-\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z \in Z^-, \end{cases} \tag{4.5}$$

则立刻可知

$$X^+(x) = G(x)\, X^-(x). \tag{4.6}$$

易见 $X(z)$ 满足 2.2.3 段中的性质 Ⅰ ～ Ⅲ. 由于

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} = \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)},$$

故 $F(z) = \dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ 在全平面中全纯，且在 ∞ 处为 κ 阶. 故当 $\kappa \geqslant 0$ 时，(4.3) 的一般解为

$$\Phi(z) = X(z)P_\kappa(z), \tag{4.7}$$

其中 $P_\kappa(z)$ 为 κ 次任意多项式；而当 $\kappa < 0$ 时，它只有零解.

现对非齐次问题(4.1) 进行讨论. 由(4.6) 式，(4.1) 可改写为

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} = \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} + \frac{g(x)}{X^+(x)}. \tag{4.8}$$

但要注意，不能由此直接应用 Plemelj 公式，因为一般说来

$$\frac{g(x)}{X^+(x)} = (x+\mathrm{i})^\kappa \mathrm{e}^{-\Gamma^+(x)} g(x) \overline{\in} \hat{H}$$

(除非 $\kappa \leqslant 0$). 为了统一起见，不论 κ 如何，令

$$Y(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z \in Z^+; \\ \left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^\kappa \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z \in Z^-, \end{cases} \tag{4.9}$$

并在(4.8) 中遍乘 $(x+\mathrm{i})^{-\kappa}$，便得

$$\frac{\Phi^+(x)}{Y^+(x)} = \frac{\Phi^-(x)}{Y^-(x)} + \frac{g(x)}{Y^+(x)},$$

则 $\dfrac{g(x)}{Y^+(x)} \in \hat{H}$. 故可令

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)\,\mathrm{d}x}{Y^+(x)(x-z)}; \quad z \overline{\in} X. \tag{4.10}$$

这样，上式就可改写为

$$\frac{\Phi^+(x)}{Y^+(x)} - \Psi^+(x) = \frac{\Phi^-(x)}{Y^-(x)} - \Psi^-(x),$$

从而 $F(z) = \dfrac{\Phi(z)}{Y(z)} - \Psi(z)$ 在全平面中解析，除在 $z=-\mathrm{i}$ 处可能有极点外.

当 $\kappa \geqslant 0$ 时，$F(z)$ 在 $z=-\mathrm{i}$ 处有 κ 阶(即它当 $\kappa > 0$ 时有 κ 阶极点). 为使它在此处有界，可以乘上一因子 $(z+\mathrm{i})^\kappa$；但这样一来，在 $z=\infty$ 处它将有 κ 阶，亦即，它是一个 κ 次多项式：

$$(z+\mathrm{i})^\kappa F(z) = P_\kappa(z).$$

这样，由(4.10)，最后得(4.1) 在 R_0 中的一般解为

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)\,\mathrm{d}x}{Y^+(x)(x-z)} + X(z)P_\kappa(z), \tag{4.11}$$

这里已利用了$(z+\mathrm{i})^{-\kappa}Y(z)=X(z)$.

当$\kappa<0$时，$F(z)$在全平面有界，故必为常数C，即

$$\Phi(z)=Y(z)[\Psi(z)+C].$$

但这时在$z=-\mathrm{i}$处$\Phi(z)$一般要产生极点. 若$\kappa=-1$，为要消除它，只要取$C=-\Psi(-\mathrm{i})$就可达到目的，因此

$$\Phi(z)=Y(z)[\Psi(z)-\Psi(-\mathrm{i})].$$

这样，就得到(4.1)的唯一解

$$\Phi(z)=Y(z)\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)\mathrm{d}x}{Y^{+}(x)(x-z)}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)\mathrm{d}x}{Y^{+}(x)(x+\mathrm{i})}\right].\tag{4.12}$$

若$\kappa\leqslant-2$，即使这样选取C，一般仍不能消除在$z=-\mathrm{i}$处的极点，而还须满足

$$\Psi^{(k)}(-\mathrm{i})=0,\quad k=1,2,\cdots,-\kappa-1,$$

亦即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)\mathrm{d}x}{Y^{+}(x)(x+\mathrm{i})^{k+1}}=0,\quad k=1,2,\cdots,-\kappa-1.\tag{4.13}$$

当且仅当(4.13)满足时，(4.12)就是(4.1)的唯一解.

于是，我们有

定理2.4.1 实轴上的问题(4.1)，要求$\Phi(\infty)$有界时，若$\kappa\geqslant0$，则其一般解为(4.11)；若$\kappa=-1$，则它有唯一解(4.12)；若$\kappa<-1$，当且仅当(4.13)满足时，它才有解，且有唯一解. 总之，解的自由度为$\kappa+1$.

现在来考虑问题(4.1)使$\Phi(\infty)=0$的解. 这时，显然必须$g(\infty)=0$才可能有解，故上述$F(z)$在∞处为零. 因此，当$\kappa\geqslant0$时，$(z+\mathrm{i})^{\kappa}F(z)$为$\kappa-1$次多项式，故

$$\Phi(z)=\frac{Y(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)\mathrm{d}x}{Y^{+}(x)(x-z)}+X(z)P_{\kappa-1}(z)\tag{4.14}$$

为其一般解，其中$P_{\kappa-1}(z)$为$\kappa-1$次任意多项式($P_{-1}(z)\equiv0$). 当$\kappa\leqslant-1$时，$F(z)\equiv0$，故

$$\Phi(z)=Y(z)\Psi(z)=\frac{Y(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)\mathrm{d}x}{Y^{+}(x)(x-z)}.\tag{4.15}$$

但$Y(z)$从而一般说来$\Phi(z)$在$z=-\mathrm{i}$处有$-\kappa$阶极点. 为了消除这一点，应要求

$$\Psi^{(k)}(-\mathrm{i})=0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-1,$$

亦即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)\mathrm{d}x}{Y^+(x)(x+\mathrm{i})^k} = 0, \quad k = 1,2,\cdots,-\kappa. \tag{4.16}$$

于是我们有

定理2.4.2 实轴上的问题(4.1)要求$\Phi(\infty)=0$时，若$\kappa \geqslant 0$，则其一般解为(4.14)；若$\kappa \leqslant -1$，则当且仅当满足(4.16)中$-\kappa$个条件它才可解，且有唯一解(4.15). 在任何情况下，解的自由度为κ.

2.4.2 几点说明

1° 在上段讨论的问题中，取$\pm\mathrm{i}$这两个值不是本质的，可以取任何$z_1 \in Z^-$代替$-\mathrm{i}$，取任何值$z_2 \in Z^+$代替$+\mathrm{i}$.

2° 基于这一认识，上段中问题的求解方法可立刻推广到下列问题：求解R问题(1.1)，其中$L=\sum_{j=1}^{n} L_j$由任意有限条平行直线L_j组成. 设L_j的方程为$y=c_j$，则可取z_1使$\mathrm{Im}\,z_1 < \min c_j$，取$z_2 > \max c_j$，然后仿照前段方法就可求解.

3° 若在前段中把x轴改为任一两端无限延伸的光滑曲线L（设已取定正向，并把全平面分成S^+, S^-两区域），但要求L的伸向无穷的两端有确定的方向，即L上的动点t处的切线T_t当t沿L两端趋向无穷远时各有一确定的极限方向(图2-2). 对于这种曲线L上的R问题，也完全可用上段中的方法求解. 这时可取$z_1 \in S^-$，$z_2 \in S^+$，其余做法完全类似. 当然这里先要把1.5节中的有关概念和公式加以推广，例如L上的$\hat{H}$类，其上的Cauchy型积分以及Plemelj公式，等等.

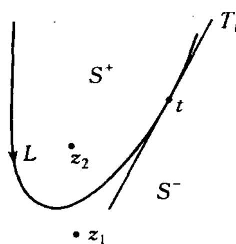


图 2-2

以上问题当然也可推广到$L=\sum_{j=1}^{n} L_j$的情形，其中每个L_j都具有上述曲线的特点，且彼此两两不相交.

4° 所有以上问题都可通过分式线性变换把L变成一条或若干条封闭曲线组成的Γ，不过在$z=\infty$的对应点处会产生一些特异情况，而问题就可化为Γ上的相应R问题去求解，且在求解过程中不难处理上述特异情况.

习 题

1. 用分式线性变换的方法证明定理2.4.2.

2. 设 $L=L_1+L_2$ 由两条平行直线 L_1,L_2 组成，试在 R_0 中求解问题(4.1).

3. 设在图 2-2 中，当 t 从一端 ∞ 处沿 L 正向趋于另一端 ∞ 处，其正向切线与 x 轴正向间的夹角从 θ_- 变为 θ_+. 求 $I=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-z}$ 的值.

答 当 $z\in S^+$ 时，$I=\frac{1}{2}+\frac{\theta_+-\theta_-}{2\pi}$；当 $z\in S^-$ 时，$I=-\frac{1}{2}+\frac{\theta_+-\theta_-}{2\pi}$；当 $z=t\in L$ 时，$I=\frac{\theta_+-\theta_-}{2\pi}$.

提示 用分式线性变换求证：将任何点 z 和 L 上的动点 t 连接成一直线，当 t 沿 L 某一指向趋于 ∞ 时，此直线的方向必趋于 L 在该指向在无穷远的方向.

2.5 非正则型的 Riemann 边值问题

2.5.1 齐次问题

此前我们讨论的 Riemann 边值问题，都是正则型情况，即在(1.1)中，$G(t)\neq 0$ 于 L 上. 本节将讨论非正则型情况(或称例外型情况)，允许 $G(t)$ 以及 $1/G(t)$ 在 L 上有一些整数阶零点. 仍设 L 由有限条互不相交的光滑封闭曲线所组成，且已取定正向如 2.1.1 段中所示.

我们先来讨论齐次问题：求分区全纯函数 $\Phi(z)$，使得

$$\Phi^+(t)=\frac{\Pi_1(t)}{\Pi_2(t)}G(t)\Phi^-(t),\quad t\in L,\tag{5.1}$$

其中 $G(t)\in H$，且 $\neq 0$，而

$$\Pi_1(t)=\prod_{j=1}^{m}(t-\alpha_j)^{\lambda_j},\quad \Pi_2(t)=\prod_{k=1}^{n}(t-\beta_k)^{\mu_k},\tag{5.2}$$

这里 α_j,β_k 都在 L 上，$\alpha_j\neq\beta_k$，λ_j,μ_k 都是正整数，我们并记

$$\lambda=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j,\quad \mu=\sum_{k=1}^{n}\mu_k.\tag{5.3}$$

为确定起见，我们在 R_0 中求解，即要求 $\Phi(\infty)$ 有限.

设 $G(t)$ 关于 L 的指标为 κ，如(2.3)所示. 又把 $G(t)$ 如(2.7)那样分解因子：

$$G(t)=\frac{X^+(t)}{X^-(t)},$$

其中 $X(z)$ 应以(2.18) 给出，则(5.1) 可改写为

$$\frac{\Pi_2(t)\,\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Pi_1(t)\,\Phi^-(t)}{X^-(t)}. \tag{5.4}$$

若记

$$\Omega(z) = \begin{cases} \dfrac{\Pi_2(z)\Phi(z)}{X(z)}, & \text{当 } z \in S^+ \text{ 时;} \\ \dfrac{\Pi_1(z)\Phi(z)}{X(z)}, & \text{当 } z \in S^- \text{ 时,} \end{cases}$$

则$\Omega^+(t) = \Omega^-(t)$，因此 $\Omega(z)$ 在全平面全纯. 又因 $X(z)$ 在$z = \infty$ 处有 $-\kappa$ 阶，而 $\Phi(\infty)$ 有限，故 $\Omega(x)$ 在 $z = \infty$ 处阶数不超过 $\kappa + \lambda$. 因此由推广的 Liouville 定理，$\Omega(z)$ 为一任意$\kappa+\lambda$ 次多项式 $P_{\kappa+\lambda}(z)$（当$\kappa+\lambda < 0$ 时，认为它恒等于零）. 因此，齐次问题(5.1) 如果在 R_0 中有解，则解必有下面形式：

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{X(z)P_{\kappa+\lambda}(z)}{\Pi_2(z)}, & \text{当 } z \in S^+ \text{ 时;} \\ \dfrac{X(z)P_{\kappa+\lambda}(z)}{\Pi_1(z)}, & \text{当 } z \in S^- \text{ 时.} \end{cases} \tag{5.5}$$

但由于$\Phi^+(t)$,$\Phi^-(t)$ 必须分别在 β_k,α_j 处有界，因此必须取

$$P_{\kappa+\lambda}(z) = \Pi_1(z)\Pi_2(z)P_{\kappa-\mu}(z),$$

这里 $P_{\kappa-\mu}(z)$ 为$\kappa-\mu$次任意多项式($\kappa-\mu < 0$ 时它$\equiv 0$). 所以，由(5.5)，最后得(5.1) 在 R_0 中的一般解

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Pi_1(z)X(z)P_{\kappa-\mu}(z), & \text{当 } z \in S^+ \text{ 时;} \\ \Pi_2(z)X(z)P_{\kappa-\mu}(z), & \text{当 } z \in S^- \text{ 时.} \end{cases} \tag{5.6}$$

于是我们有

定理 2.5.1 齐次问题(5.1) 在 R_0 中求解时，若$\kappa \geqslant \mu$，则其一般解为(5.6)，其中 $P_{\kappa-\mu}(z)$ 为任意 $\kappa-\mu$ 次多项式；若 $\kappa < \mu$，则它只有零解.

如果要求(5.1) 在 R_{-1} 中求解，则只要在上面结果中把$P_{\kappa-\mu}(z)$ 改为 $P_{\kappa-\mu-1}(z)$ 即可.

2.5.2 非齐次问题

现在来考虑非齐次 R 问题

$$\Phi^+(t) = \frac{\Pi_1(t)}{\Pi_2(t)}G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \tag{5.7}$$

其中 $g(t) \in H$ 于 L 上，其他记号及条件均同前，且仍设在 R_0 中求解.

根据上段的做法，(5.7) 立刻可化为

$$\Pi_2(t)\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\Pi_1(t)\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}+\Pi_2(t)\frac{g(t)}{X^+(t)},\quad t\in L. \tag{5.8}$$

显然，此式右边最后一项在 L 上仍 $\in H$. 令

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \Pi_2(\tau)\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z},\quad z\overline{\in} L, \tag{5.9}$$

则

$$\Psi^+(t)-\Psi^-(t)=\Pi_2(t)\frac{g(t)}{X^+(t)},\quad t\in L;$$

$$\Pi_2(t)\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}-\Psi^+(t)=\Pi_1(t)\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}-\Psi^-(t),\quad t\in L,$$

且 $\Psi(\infty)=0$. 如同(5.5) 时那样的推理，可知如果(5.7) 有解，故必有

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{X(z)[\Psi(z)+P_{\kappa+\lambda}(z)]}{\Pi_2(z)}, & 当\ z\in S^+\ 时;\\[2ex] \dfrac{X(z)[\Psi(z)+P_{\kappa+\lambda}(z)]}{\Pi_1(z)}, & 当\ z\in S^-\ 时.\end{cases} \tag{5.10}$$

但由于$\Phi^\pm(t)$ 应在 L 上有界，故必须

$$P_{\kappa+\lambda}^{(r)}(\alpha_j)+\Psi^{-(r)}(\alpha_j)=0,\quad r=0,1,\cdots,\lambda_j-1,\ j=1,2,\cdots,m,$$

$$P_{\kappa+\lambda}^{(s)}(\beta_k)+\Psi^{+(s)}(\beta_k)=0,\quad s=0,1,\cdots,\mu_k-1,\ k=1,2,\cdots,n.$$

由此去求解这一组联立方程，以确定 $P_{\kappa+\lambda}(z)$ 的系数所应满足的条件，便可完全解决所提出的问题. 但这样做较麻烦，甚至判定这方程组是否相容也不容易. 为了克服这一困难，我们可采取如下的方法：

先作 $\rho=\lambda+\mu-1$ 次 Hermite 插值多项式 $Q_\rho(z)$，使得

$$\left.\begin{aligned}Q_\rho^{(r)}(\alpha_j)&=\Psi^{-(r)}(\alpha_j),\quad r=0,1,\cdots,\lambda_j-1,\ j=1,2,\cdots,m,\\ Q_\rho^{(s)}(\beta_k)&=\Psi^{+(s)}(\beta_k),\quad s=0,1,\cdots,\mu_k-1,\ k=1,2,\cdots,n.\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

这种插值多项式是唯一存在的①. 我们令

$$\Phi_0(z)=\begin{cases}\dfrac{X(z)[\Psi(z)-Q_\rho(z)]}{\Pi_2(z)}, & 当\ z\in S^+\ 时;\\[2ex] \dfrac{X(z)[\Psi(z)-Q_\rho(z)]}{\Pi_1(z)}, & 当\ z\in S^-\ 时.\end{cases} \tag{5.12}$$

显然 $\Phi_0^\pm(t)$ 在 L 上连续，且满足(5.7). 但是 $\Phi_0(z)$ 在 ∞ 处的阶数现在是

---

① 可参看[39]. 虽然那里讲的是实域中的问题，但显然在复域中也是一样的.

$$-\kappa+\rho-\lambda=\mu-\kappa-1.$$

所以，当$\kappa\geqslant\mu-1$时，$\Phi_0(z)$是问题(5.7)在R_0中的一个特解. 结合其相应齐次问题(5.1)的一般解(5.6)，便知问题(5.7)当$\kappa\geqslant\mu-1$时在R_0中的一般解为

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{X(z)}{\Pi_2(z)}[\Psi(z)-Q_\rho(z)]+\Pi_1(z)X(z)P_{\kappa-\mu}(z), \\ \qquad\qquad \text{当 } z\in S^+ \text{ 时;} \\ \dfrac{X(z)}{\Pi_1(z)}[\Psi(z)-Q_\rho(z)]+\Pi_2(z)X(z)P_{\kappa-\mu}(z), \\ \qquad\qquad \text{当 } z\in S^- \text{ 时.}\end{cases} \tag{5.13}$$

现设$\kappa<\mu-1$. 由于相应的齐次问题在R_0中只有零解，故若(5.7)在R_0中有解，则必唯一，且即$\Phi_0(z)$. 但一般说来$\Phi_0(z)$在$z=\infty$处有$\mu-\kappa-1$阶极点，所以要想它在R_0中，还必须满足$\mu-\kappa-1$个条件. 这些是$g(t)$所应受约束的条件(部分地加在$Q_\rho(z)$上，间接地也是加在$g(t)$上). 如果记

$$Q_\rho(z)=A_0z^\rho+A_1z^{\rho-1}+\cdots+A_\rho \quad (\rho=\lambda+\mu-1),$$

则当$\lambda+\kappa\geqslant-1$时，上述约束条件应为

$$A_0=A_1=\cdots=A_{\mu-\kappa-2}=0,$$

即$Q_\rho(z)$只能是$\rho-(\mu-\kappa-2)-1=\lambda+\kappa$次多项式($\lambda+\kappa=-1$时恒为零). 当$\lambda+\kappa<-1$时，除应要求$Q_\rho(z)\equiv0$外，还应要求$\Psi(z)$在$z=\infty$处有$-(\lambda+\kappa)$阶零点，亦即应要求

$$\int_L\frac{\Pi_2(t)g(t)t^{\nu-1}}{X^+(t)}\mathrm{d}t=0,\quad \nu=1,2,\cdots,-\lambda-\kappa-1. \tag{5.14}$$

上述条件满足时，$\Phi_0(z)$显然确实是解.

因此我们有

定理 2.5.2 非齐次问题(5.7)在R_0中求解时，

(i) 若$\kappa+1\geqslant\mu$，其一般解为(5.13)，共含有$\kappa-\mu+1$个任意常数；

(ii) 若$\kappa+1<\mu$，还应要求$g(t)$满足$\mu-\kappa-1$个条件时才可解，且解唯一；

当$\lambda+\kappa\geqslant-1$时，此即要求由条件(5.11)所作的插值多项式$Q_\rho(z)$只能是$\lambda+\kappa$次多项式($\lambda+\kappa=-1$时，要求$Q_\rho(z)\equiv0$)，而当$\lambda+\kappa<-1$时，除要求$Q_\rho(z)\equiv0$外，还要求(5.14)满足；这时唯一解以(5.12)给出. 总之，问题解的自由度为$\kappa-\mu+1$.

习　题

1. 求问题(5.7)的 R_{-1} 中的解.
2. 把本节所论推广到 L 为实数轴的情形.

2.6 Hilbert 边值问题

2.6.1 问题的提法

为简单起见，我们设 S^+ 是一单连通区域，其边界 L 为一封闭光滑曲线，以反时针向为正向.

所谓 S^+ (L 所围内域)上的**Hilbert 边值问题**(简称**H 问题**)的提法如下：求在 S^+ 内的全纯函数 $\Phi^+(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$，连续到 S^++L 上，满足边值条件

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Phi^+(t)\}=c(t),\quad t\in L, \tag{6.1}$$

其中 $a(t),b(t),c(t)$ 都是已给在 L 上 $\in H$ 的实函数. (6.1) 也可改写为

$$a(t)u(t)-b(t)v(t)=c(t),\quad t\in L. \tag{6.1$'$}$$

经过保形映射，可以把 S^+ 变为单位圆内部，而 L 变为其圆周，且仍以反时针向为正向. 这时 Φ^+ 就变为单位圆内部的全纯函数 Φ_*^+，且也连续到闭圆域上；又 a,b,c 分别变为 a_*,b_*,c_*，也必连续于圆周上. 今设它们在单位圆周上 $\in H$①.

这样，问题(6.1)就化为单位圆域上的 H 问题. 因此，本节下面将只讨论在单位圆上的 H 问题. 即，假定 S^+ 就是单位圆域 $|z|<1$，L 是单位圆周 $|t|=1$.

当然也可通过保形变换，把问题化为半平面中的 H 问题.

更一般地，可考虑多连通区域中的类似问题，但情况要复杂得多，本书不拟讨论(可参看[36]与[10]).

注　有的作者把本书中所说的 Riemann 问题称为 Hilbert 问题(也称为**联结问题**)，而把这里的 H 问题称为 **Riemann-Hilbert 问题**.

---

① 如果 $a(t),b(t),c(t)$ 在 L 上 $\in H$，而 L 是 Lyapunov 曲线，即其上动点切线的倾角作为该点弧坐标的函数时 $\in H$，则 a_*,b_*,c_* 也必 $\in H$. 此由 Kellog 定理即可得知(参看[38]，第十章，§1，定理 6).

2.6.2 单位圆内的函数在圆外的对称扩张

为了求解圆内 H 问题，我们设法把它转化为 R 问题. 这就要求把单位圆内域 S^+ 中的一函数 $\Phi(z)$ 按下面方法定义出其在外域 S^- 中的**对称扩张**，或称为**对称函数**：

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \tag{6.2}$$

我们知道，z 与 $1/\bar{z}$ 关于单位圆是对称点. 因此，$\Phi(z)$ 与 $\Phi_*(z)$ 在对称点处的值互为共轭. 特别，$\Phi_*(\infty) = \overline{\Phi(0)}$. 如果引用记号

$$\bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})},$$

则(6.2) 还可写成

$$\Phi_*(z) = \bar{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{6.3}$$

同样，如果原来的 $\Phi(z)$ 定义在 S^- 内，则由(6.2) 确定的 $\Phi_*(z)$ 便定义在 S^+ 内.

注意 $\Phi(z) = \overline{\Phi_*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \bar{\Phi}_*\left(\frac{1}{z}\right)$，故

$$\Phi_{**}(z) = \Phi(z), \tag{6.4}$$

此即表示，$\Phi(z)$ 关于单位圆作两次对称扩张，就回到了原来的函数.

又，如果 $\Phi(z)$ 原来就定义在 $S^+ + S^-$ 内，则 $\Phi_*(z)$ 也是如此.

如果 $\Phi(z)$ 在 S^+ 内全纯，则易见 $\Phi_*(z)$ 在 S^- 内全纯，这是因为，当 $z \neq \infty$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Phi_*(z) = \overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{z}}\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \overline{\Phi'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\left(-\frac{1}{\bar{z}^2}\right)} = -\frac{1}{z^2}\overline{\Phi'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

的确存在，而 $z = \infty$ 为其可去奇点. 反之，如果 $\Phi(z)$ 在 S^- 内全纯(包括 $z = \infty$ 在内)，则 $\Phi_*(z)$ 在 S^+ 内全纯. 若 $\Phi(z)$ 在 $z = 0$ 处有奇点，则 $\Phi_*(z)$ 在 $z = \infty$ 处也有奇点. 一般，若 $\Phi(z)$ 在 S^+ 内有 Laurent 展式

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad z \in S^+,$$

则

$$\Phi_*(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{a}_n z^{-n}, \quad z \in S^-.$$

如果 $\Phi(z)$ 能从 S^+ 内连续延拓到单位圆周 L：$|t| = 1$ 上，则 $\Phi_*(z)$ 也能从 S^- 内连续延拓到 L 上，且因 $t = \frac{1}{\bar{t}}$，故

$$\Phi_*^-(t)=\bar{\Phi}^-\left(\frac{1}{t}\right)=\overline{\Phi^+(t)}. \tag{6.5}$$

若 $\Phi(z)$ 在 S^+ 内全纯，连续于 S^++L 上，则

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z), & \text{当 } z\in S^+;\\ \Phi_*(z), & \text{当 } z\in S^-\end{cases} \tag{6.6}$$

就是一分区全纯函数，以 L 为跳跃曲线，且 $\Omega(\infty)$ 有界，其在 L 上的边值满足条件

$$\Omega^-(t)=\overline{\Omega^+(t)}. \tag{6.7}$$

关于单位圆的函数对称扩张概念完全可类似地推广到关于任何圆或任何直线的对称扩张. 例如，关于实轴的对称扩张是：若 $\Phi(z)$ 定义在上半平面，则它在下半平面的对称扩张为

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi(\bar{z})},$$

或记为 $\bar{\Phi}(z)$.

2.6.3 单位圆的 H 问题

现在回到 H 问题(6.1)，其中 L 是单位圆周 $|t|=1$. 我们将假定 $a^2+b^2\neq 0$ 于 L 上. 首先，(6.1) 可改写为

$$(a+ib)\,\Phi^+(t)+(a-ib)\,\overline{\Phi^+(t)}=2c,\quad t\in L. \tag{6.1$''$}$$

把未知函数 $\Phi^+(z)=\Phi(z)$ 用上段中方法对称扩张到 S^- 中，得分区全纯函数 $\Omega(z)$ 如(6.6). 由于

$$\overline{\Phi^+(t)}=\Phi_*^-(t)=\Omega^-(t),$$

可知(6.1)$''$ 又可改写为

$$(a+ib)\,\Omega^+(t)+(a-ib)\,\Omega^-(t)=2c,\quad t\in L, \tag{6.8}$$

此即 R 问题

$$\Omega^+(t)=G(t)\,\Omega^-(t)+g(t),\quad t\in L, \tag{6.8$'$}$$

其中已令

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib},\quad g(t)=\frac{2c}{a+ib}. \tag{6.9}$$

由于 $\Phi(0)$ 有界，故 $\Omega(\infty)$ 亦有界. 因此，如果问题(6.1) 有解 $\Phi(z)$，则必 R 问题(6.8)$'$ 在 R_0 中有解. 但要注意，问题(6.8)$'$ 在 R_0 中的任一解 $\Omega(z)$ $(z\in S^+)$ 未必是(6.1) 的解 $\Phi(z)$. 这是因为，对于(6.1) 的解 $\Phi(z)$ 来说，由它经过(6.6) 作出的 $\Omega(z)$ 还必须满足(6.7). 而若(6.7) 一旦满足，则易见 $\Omega^+(z)=\Phi(z)$ 的确是(6.1) 的解. 总之，H 问题(6.1) 等价于 R 问题(6.8)$'$ 在 R_0 中求解并要求满足附加条件(6.7).

注意，如果(6.8)成立，两边取共轭，得

$$(a-\mathrm{i}b)\,\overline{\Omega^+(t)}+(a+\mathrm{i}b)\,\overline{\Omega^-(t)}=2c,$$

但

$$\overline{\Omega^+(t)}=\Omega_*^-(t),\quad \overline{\Omega^-(t)}=\Omega_*^+(t),$$

可见，如果 $\Omega(z)$ 是(6.8)′在 R_0 中的解，则 $\Omega_*(z)$ 也必是一个这样的解. 因此，

$$\Omega_0(z)=\frac{1}{2}[\Omega(z)+\Omega_*(z)] \tag{6.10}$$

也是这样的解. 对于这个解来说，已满足条件(6.7). 这样，只要求出(6.8)′在 R_0 中的解 $\Omega(z)$，作出 $\Omega_*(z)$，再由(6.10)求出 $\Omega_0(z)$，它便是原问题(6.1)的一个解 $\Phi(z)=\Omega_0(z)$，$z\in S^+$.

下面就按上述步骤来求解(6.1).

我们先在 R_0 中求解(6.8)′. 这个问题的指标是

$$\kappa=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\log G(t)]_L=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b}\right]_L.$$

但因 $[\arg(a+\mathrm{i}b)]_L=-[\arg(a-\mathrm{i}b)]_L$，故

$$\kappa=\frac{1}{\pi}[\arg(a-\mathrm{i}b)]_L \tag{6.11}$$

是一偶数. κ 也称为**问题(6.1)的指标**①.

为了求出问题(6.8)′的典则函数，根据 2.2.2 段中的说明，现在可取 $\kappa_0=0$，亦即可取典则函数为

$$X(z)=\begin{cases}C\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & \text{当}\ |z|<1\ \text{时};\\ Cz^{-\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & \text{当}\ |z|>1\ \text{时},\end{cases} \tag{6.12}$$

其中 C 为任一非零常数，而

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\log[t^{-\kappa}G(t)]}{t-z}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\Theta(t)}{t-z}\mathrm{d}t, \tag{6.13}$$

这里已令

$$\Theta(t)=\arg\left(-t^{-\kappa}\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b}\right),$$

此处辐角已在 L 上取定一连续分支，$\Theta(t)$ 是 L 上 $\in H$ 的实值函数.

我们还有必要讨论 $X_*(z)$ 的形状. 首先，由(6.3)式，

$$\Gamma_*(z)=\overline{\Gamma}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\Theta(t)}{\bar{t}-\dfrac{1}{z}}\mathrm{d}\bar{t}=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{z\Theta(t)}{t(t-z)}\mathrm{d}t$$

① 有的作者把 $\kappa/2$ 称为问题(6.1)的指标.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\Theta(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\Theta(t)}{t}dt.$$

如果记

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Theta(t)}{t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)d\theta, \quad t = e^{i\theta}, \tag{6.14}$$

它是一实常数，于是

$$\Gamma_*(z) = \Gamma(z) - i\alpha.$$

这样，当$|z|<1$时，

$$X_*(z) = \overline{X}\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{C}z^{\kappa}e^{\Gamma_*(z)} = \overline{C}e^{-i\alpha}z^{\kappa}e^{\Gamma(z)};$$

当$|z|>1$时，

$$X_*(z) = \overline{X}\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{C}e^{\Gamma_*(z)} = \overline{C}e^{-i\alpha}e^{\Gamma(z)}.$$

不论怎样，我们恒有

$$X_*(z) = \frac{\overline{C}}{C}e^{-i\alpha}z^{\kappa}X(z), \quad |z| \neq 1.$$

如果我们取定

$$C = e^{-\frac{i\alpha}{2}} = \exp\left\{-\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)d\theta\right\}, \tag{6.15}$$

则上式将变得特别简单：

$$X_*(z) = z^{\kappa}X(z). \tag{6.16}$$

以后我们恒取C值如(6.15)，因此(6.16)成立. 这样取定C后的$X(z)$，称为**规范化典则函数**.

下面我们回到问题(6.1). 先考虑齐次问题：设$c\equiv 0$.

先设$\kappa \geq 0$（不要忘记，κ是偶数）. 这时齐次R问题(6.8)′（其中$g(t)\equiv 0$）在R_0中的一般解为

$$\Omega(z) = X(z)(C_0z^{\kappa} + C_1z^{\kappa-1} + \cdots + C_{\kappa}), \tag{6.17}$$

其中$C_0, C_1, \cdots, C_{\kappa}$为任意常数. 于是，注意到(6.16)，得知

$$\Omega_*(z) = X_*(z)\left(\frac{\overline{C}_0}{z^{\kappa}} + \frac{\overline{C}_1}{z^{\kappa-1}} + \cdots + \overline{C}_{\kappa}\right)$$

$$= X(z)(\overline{C}_{\kappa}z^{\kappa} + \overline{C}_{\kappa-1}z^{\kappa-1} + \cdots + \overline{C}_0).$$

因此，为使$\Omega_*(z) = \Omega(z)$，须且只须

$$C_0 = \overline{C}_{\kappa},\ C_1 = \overline{C}_{\kappa-1},\ \cdots,\ C_{\kappa/2} = \overline{C}_{\kappa/2}. \tag{6.18}$$

所以，事实上只有$C_0, C_1, \cdots, C_{\frac{\kappa}{2}-1}$为任意复常数($\kappa=0$时就不存在这些数)，而$C_{\kappa/2}$必须是实常数. 如果按照实的任意常数来说，则(6.17)中共含$\kappa+1$个

实常数.

当 $\kappa<0$ 时，由于齐次 R 问题(6.8)′ ($c(t)=0$) 在 R_0 中只有零解，当然(6.1) 也只能有零解.

以上结果可写成

定理 2.6.1 齐次 H 问题(6.1) ($c\equiv 0$) 当 $\kappa\geqslant 0$ 时有一般解(6.17)，其中 C_k 须满足条件(6.18)，而 $X(z)$ 则由(6.12)给出(C 要用(6.15)给出，但可差一非零实常数因子)，这个一般解中含有 $\kappa+1$ 个实任意常数；当 $\kappa<0$ 时，它只有零解.

现在来讨论非齐次问题(6.1) ($c\neq 0$). 我们只须求出其中一个特解，再加上相应齐次问题的一般解就得它的一般解.

仍先设 $\kappa\geqslant 0$. 根据 2.3.1 段中的结果，这时问题(6.8)′ 在 R_0 中有一个特解

$$\Psi(z)=\frac{X(z)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{c\,\mathrm{d}t}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)(t-z)}. \tag{6.19}$$

因此，

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2}[\Psi(z)+\Psi_*(z)],\quad |z|<1$$

就是问题(6.1) 的一个特解.

为了把 $\Phi_0(z)$ 写成显式，我们来求出 $\Psi_*(z)$ 的明显表达式. 注意到(6.2) 与(6.16)，我们有

$$\overline{X^+(t)}=X_*^-(t)=t^\kappa X^-(t).$$

又由典则函数的性质知，

$$X^-(t)=-\frac{a+\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b}X^+(t),$$

所以，

$$(a-\mathrm{i}b)\,X^-(t)=-(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t),$$
$$(a+\mathrm{i}b)\,\overline{X^-(t)}=-(a-\mathrm{i}b)\,\overline{X^+(t)},$$

因而

$$(a-\mathrm{i}b)\,\overline{X^+(t)}=-(a+\mathrm{i}b)\,\overline{X^-(t)}=-(a+\mathrm{i}b)t^\kappa X^+(t). \tag{6.20}$$

于是

$$\begin{aligned}\Psi_*(z)&=-\frac{X_*(z)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\bar{c}\,\mathrm{d}t}{(a-\mathrm{i}b)\,\overline{X^+(t)}\left(\bar{t}-\dfrac{1}{z}\right)}\\&=\frac{z^\kappa X(z)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{cz\,\mathrm{d}t}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)t^{\kappa+1}(t-z)},\end{aligned} \tag{6.21}$$

或即

$$\Psi_*(z) = z^\kappa X(z)\left[\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{ct^{-\kappa}\mathrm{d}t}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)(t-z)} - \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{ct^{-\kappa-1}\mathrm{d}t}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)}\right]. \tag{6.21$'$}$$

这样，上面的这个特解就可写成

$$\begin{aligned}\Phi_0(z) = \frac{X(z)}{2\pi\mathrm{i}}&\left[\int_L \frac{c\,\mathrm{d}t}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)(t-z)}\right.\\ &\left.+z^\kappa\int_L \frac{t^{-\kappa}c\,\mathrm{d}t}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)(t-z)}\right]\\ &-\frac{z^\kappa X(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{ct^{-\kappa-1}\mathrm{d}t}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)}.\end{aligned} \tag{6.22}$$

把它加上相应齐次问题的一般解(6.17)便得问题的一般解.

再设 $\kappa<0$ 即 $\kappa\leqslant-2$. 这时非齐次 R 问题(6.8)′ 在 R_0 中的可解条件为

$$\int_L \frac{t^k g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t = 0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-2,$$

这就是

$$\int_L \frac{t^k c\,\mathrm{d}t}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)} = 0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-2. \tag{6.23}$$

当且仅当这些条件满足时，(6.8)′ 有唯一解(6.22). 这时这个解的形式还可化简. 注意(6.21) 也可写成

$$\begin{aligned}\Psi_*(z) &= \frac{X(z)}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{z^{\kappa+1}t^{-\kappa-1}c}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t\\ &= \frac{X(z)}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{z^{\kappa+1}(t^{-\kappa-1}-z^{-\kappa-1})c}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t\\ &\quad+\frac{X(z)}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{c\,\mathrm{d}t}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)(t-z)}.\end{aligned}$$

由于 $-\kappa\geqslant2$，$(t^{-\kappa-1}-z^{-\kappa-1})/(t-z)$ 是 t 的 $-\kappa-2$ 次多项式，故当条件(6.23) 满足时，上式右边第一项积分为零. 因此实际上 $\Psi_*(z)=\Psi(z)=\Phi_0(z)$ 可以(6.19) 给出①.

此外还可注意，若固定 k $(0\leqslant k\leqslant-\kappa-2)$，在(6.23) 中取共轭值，由(6.20)，就有

$$\int_L \frac{\bar{t}^k c\,\mathrm{d}\bar{t}}{(a-\mathrm{i}b)\,\overline{X^+(t)}} = \int_L \frac{t^{-\kappa-k-2}c\,\mathrm{d}t}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)}.$$

① $\Psi_*(z)=\Psi(z)$ 由(6.8)′ 在 R_0 中有唯一解这一点可直接得知.

这就说明，若对 $k=0,1,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-2$，(6.23) 满足，则对 $k=-\kappa-2$，$-\kappa-3,\cdots,-\frac{\kappa}{2}$ 也满足；而当 $k=-\frac{\kappa}{2}-1$ 时，上式说明(6.23) 左边是一实数，故(6.23) 又可改写为

$$\int_L \frac{t^k c\,\mathrm{d}t}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(t)}=0, \quad k=0,1,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1, \qquad (6.23)'$$

且其中最后一式为实方程. 如果把它们都化为实方程，则(6.23)′共有 $-\kappa-1$ 个实方程. 即问题(6.1) 共有 $\kappa+1$ 个实自由度.

于是我们有

定理 2.6.2 非齐次问题(6.1) 当 $\kappa\geqslant 0$ 时有一般解

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+X(z)(C_0z^\kappa+C_1z^{\kappa-1}+\cdots+C_\kappa), \qquad (6.24)$$

其中 $\Phi_0(z)$ 以(6.22) 给出，而 $C_0,C_1,\cdots,C_\kappa$ 须满足条件(6.18)；当 $\kappa\leqslant-2$ 时，当且仅当条件(6.23)′ 满足时，问题有唯一解(6.19). 此问题的一般解有 $\kappa+1$ 个实自由度.

习　题

1. 根据一般理论，求证：问题

$$\cos s\, u(s)-\left(\sin s+\frac{1}{2}\right)v(s)=\cos 2s+h$$

当且仅当 $h=\frac{1}{4}$ 时有解，且有唯一解 $u+\mathrm{i}v=z-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，这里 s 是单位圆周上的弧坐标，$u+\mathrm{i}v$ 是此圆内的全纯函数.

2. 考虑上题的直接简易解法.

3. 根据一般理论讨论单位圆上的 **Dirichlet 问题**，即，求一个在 $|z|<1$ 内调和、连续到 $|z|\leqslant 1$ 上的函数 $u(z)$，使其满足下列边值条件：

$$u^+(t)=f(t), \quad |t|=1,$$

其中 $f(t)\in H$ 已给在 L 上.

答 $u(z)=\mathrm{Re}\,\Phi(z)$，而 $\Phi(z)$ 由著名的 **Schwarz 公式**给出：

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|t|=1} f(t)\,\frac{t+z}{t-z}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}+\mathrm{i}C \quad (C\text{ 为实常数}).$$

2.6.4 半平面中的 H 问题

我们现在来考虑应用中也极为重要的半平面中的 H 问题. 设 $L=X$ 为实轴，Z^+ 为上半平面. 我们的问题是：要求一个在 Z^+ 内全纯、在 $\overline{Z^+}=Z^++X$

上连续的函数 $\Phi(z)$，使得

$$\mathrm{Re}\{[a(x)+\mathrm{i}b(x)]\Phi^+(x)\}=c(x),\quad x\in X,\tag{6.25}$$

其中 $a(x),b(x),c(x)\in\hat{H}$ 于 X 上，且 $a^2+b^2\neq 0$（包括 $x=\infty$）.

此问题当然也可通过分式线性变换变成 w 平面上单位圆内的 H 问题来处理，但也可仿照上段中的方法求解. 下面我们采用后一方法.

将未知函数 $\Phi(z)$ 按(6.8)式对称扩张到下半平面 Z^-：

$$\bar{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar{z})},$$

并令

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z), & \text{当 } z\in Z^+ \text{ 时};\\ \bar{\Phi}(z), & \text{当 } z\in Z^- \text{ 时}.\end{cases}$$

因此(6.25)又可改写为

$$\Omega^+(x)=G(x)\,\Omega^-(x)+g(x),\quad x\in X,\tag{6.26}$$

其中

$$G(x)=-\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b},\quad g(x)=\frac{2c}{a+\mathrm{i}b}.$$

与上段相仿，可知 H 问题(6.25)等价于 R 问题(6.26)在 R_0 中求解，并要求满足附加条件

$$\Omega^-(x)=\overline{\Omega^+(x)}.\tag{6.27}$$

问题(6.26)的指标

$$\kappa=\frac{1}{\pi}[\arg(a-\mathrm{i}b)]_{-\infty}^{+\infty},\tag{6.28}$$

即当 x 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，$a(x)-\mathrm{i}b(x)$ 辐角的改变除以 π. 由于 $a,b\in\hat{H}$，故

$$a(-\infty)=a(+\infty),\quad b(-\infty)=b(+\infty),$$

因此 κ 也是一偶数. κ 也称为**问题(6.25)的指标**.

如 2.4.1 段，仍以(4.5)定义 $X(z)$，以(4.9)定义 $Y(z)$，而其中 $\Gamma(z)$ 仍以(4.4)给出. 但由于现在 $|G(x)|=1$，故

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Theta(x)}{x-z}\mathrm{d}x,$$

其中

$$\Theta(x)=\arg\left[-\left(\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\right)^{\kappa}\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b}\right]=\arg[-(x+\mathrm{i})^{2\kappa}(a-\mathrm{i}b)^2]$$

为一实函数. 由此立刻知道，

$$\bar{\Gamma}(z)=\Gamma(z),\quad \Gamma^-(x)=\overline{\Gamma^+(x)}.\tag{6.29}$$

现在先考虑齐次问题(6.25)（$c\equiv 0$），其相应问题(6.26)中的 $g\equiv 0$. 由 2.4.1 段中的结果，后者在 R_0 中求解时，若 $\kappa\geqslant 0$，其一般解为

而

$$\Omega(z) = X(z)(C_0 z^{\kappa} + C_1 z^{\kappa-1} + \cdots + C_{\kappa}), \tag{6.30}$$

其中 C_k 为任意复常数；当 $\kappa < 0$ 时，它只有零解. 因此 $\kappa < 0$ 时，齐次 H 问题也只有零解. 现设 $\kappa \geqslant 0$. 这时此问题的一般解应为

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}[\Omega(z) + \overline{\Omega}(z)].$$

但由(4.5) 以及(6.29) 知，$\overline{X}(z) = X(z)$，因此

$$\overline{\Omega}(z) = X(z)(\overline{C}_0 z^{\kappa} + \overline{C}_1 z^{\kappa-1} + \cdots + \overline{C}_{\kappa}),$$

从而得知，(6.25) 的一般解就可以(6.30) 给出，但其中诸 C_k 应取为任意实常数.

这样，我们有

定理2.6.3 齐次 H 问题(6.25) ($c \equiv 0$) 当 $\kappa \geqslant 0$ 时其一般解为 $X(z)Q_{\kappa}(z)$，这里 $Q_{\kappa}(z)$ 为 κ 次任意实系数多项式；当 $\kappa < 0$ 时 它只有零解.

现在来考虑非齐次 H 问题(6.25). 我们只要能求出其一特解，再利用上述定理便可得出其一般解.

先设 $\kappa \geqslant 0$. 由(4.11) 知，

$$\Omega_0(z) = \frac{Y(z)}{\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c\,\mathrm{d}x}{(a + \mathrm{i}b)\, Y^+(x)(x - z)} \tag{6.31}$$

为(6.26) 在 R_0 中的一特解，其中 $Y(z)$ 由(4.9) 给出. 当 $z \in Z^+$ 时，由(6.29)，

$$\overline{Y}(z) = \overline{Y(\overline{z})} = \left(\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right)^{\kappa} \mathrm{e}^{\overline{\Gamma}(z)} = \left(\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right)^{\kappa} Y(z)\text{①};$$

而

$$\overline{Y^+(x)} = \overline{Y}^-(x) = \left(\frac{x - \mathrm{i}}{x + \mathrm{i}}\right)^{\kappa} Y^-(x),$$

又因$Y^+(x) = G(x)Y^-(x)$，故

$$\overline{Y^+(x)} = -\left(\frac{x - \mathrm{i}}{x + \mathrm{i}}\right)^{\kappa} \frac{a + \mathrm{i}b}{a - \mathrm{i}b} Y^+(x),$$

这样，

$$\overline{\Omega}_0(z) = \left(\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right)^{\kappa} \frac{Y(z)}{\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x + \mathrm{i}}{x - \mathrm{i}}\right)^{\kappa} \frac{c\,\mathrm{d}x}{(a + \mathrm{i}b)\, Y^+(x)(x - z)}.$$

于是，

---

① 即使当 $z \in Z^-$ 时，$\overline{Y}(z) = \left(\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right)^{\kappa} Y(z)$ 仍成立.

$$\Phi_0(z)=\frac{Y(z)}{2\pi \mathrm{i}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c\,\mathrm{d}x}{(a+\mathrm{i}b)\,Y^+(x)(x-z)}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^{\kappa}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\right)^{\kappa}\frac{c\,\mathrm{d}x}{(a+\mathrm{i}b)\,Y^+(x)(x-z)}\right] \tag{6.32}$$

便是 H 问题(6.25) 的一个特解.

现设 $\kappa\leqslant-2$. 由(4.12),(4.13) 知，当且仅当下列条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c\,\mathrm{d}x}{(a+\mathrm{i}b)\,Y^+(x)(x+\mathrm{i})^k}=0,\quad k=2,3,\cdots,-\kappa \tag{6.33}$$

成立时，问题(6.26) 在 R_0 中有唯一解

$$\Phi_0(z)=Y(z)\left[\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c\,\mathrm{d}x}{(a+\mathrm{i}b)\,Y^+(x)(x-z)}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c\,\mathrm{d}x}{(a+\mathrm{i}b)\,Y^+(x)(x+\mathrm{i})}\right]. \tag{6.34}$$

由于这时(6.26) 在 R_0 中的解唯一，且 $\overline{\Phi}_0(z)$ 亦必为其解，必然 $\overline{\Phi}_0(z)=\Phi_0(z)$①，从而(6.34) 已经就是原 H 问题(6.25) 的唯一解.

为了弄清楚(6.33) 中究竟有多少个实的条件并把它们写成实的形式，先把它们改写为等价的形式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\right)^{k}\frac{c\,\mathrm{d}x}{(a+\mathrm{i}b)\,Y^+(x)(x+\mathrm{i})^2}=0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-2.$$

记 $\arg(x+\mathrm{i})=\theta(x)$，故 $\arg\left(\frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\right)^{k}=-2k\theta(x)$. 注意，

$$Y^+(x)=\mathrm{e}^{\Gamma^+(x)}=\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\Theta(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Theta(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi\right\},$$

但当辐角取定一支后可使

$$\Theta(x)=\arg[-(x+\mathrm{i})^{2\kappa}(a-\mathrm{i}b)^2]=\pi+2\kappa\theta+2\varphi,$$

这里已令 $\varphi(x)=\arg(a-\mathrm{i}b)$. 又因

$$\frac{1}{a+\mathrm{i}b}=\frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

故 $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\Theta(x)}=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\kappa\theta+\varphi)}$，从而上面的条件就成为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\kappa+2k+2)\theta}\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-2,$$

其中已令

$$H(x)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}(1+x^2)}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Theta(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi\right\};$$

---

① 建议读者直接验证这一点(可参看第四章(3.17)′后面的方法).

而条件又可写为

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)\cos 2j\theta\,\mathrm{d}x=0,\quad j=0,1,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1;\\&\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)\sin 2j\theta\,\mathrm{d}x=0,\quad j=1,2,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1.\end{aligned}\right\}\tag{6.35}$$

(6.35) 中共含有 $-\kappa-1$ 个实的独立条件.

这样，我们便有

定理 2.6.4 非齐次 H 问题(6.25)，当 $\kappa\geqslant 0$ 时，其一般解为 $\Phi_0(z)+X(z)Q_\kappa(z)$，其中 $\Phi_0(z)$ 以(6.32) 给出，$Q_\kappa(z)$ 为 κ 次任意实系数多项式；当 $\kappa<0$ 时，当且仅当满足 $-(\kappa+1)$ 个实条件(6.35) 时有唯一解(6.34). 总之，此问题的解含 $\kappa+1$ 个实自由度.

习　题

1. 求证：$\kappa=0$ 时 H 问题(6.25) 的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c\,\mathrm{d}x}{(a+\mathrm{i}b)\,X^+(x)(x-z)}+CX(z)$$

(C 为任意实常数)，其中

$$X(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Theta(x)}{x-z}\mathrm{d}x\right\},\quad \Theta(x)=\arg\left(-\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b}\right).$$

2. 求解半平面 Z^+ 内的 **Dirichlet 问题**：已知 $\Phi(z)$ 在 Z^+ 内全纯，连续于 $\overline{Z^+}$ 上，且在 x 轴上，$\mathrm{Re}\,\Phi^+(x)=f(x)$，其中 $f(x)\in\hat{H}$ 为一已知函数.

答 $\Phi(z)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x-z}\mathrm{d}x+C\mathrm{i}$ (C 为任意实常数).

2.7 复合边值问题

2.7.1 复合边值问题的提法与转化

1962 年著者在[13] 中提出把 R 问题与 H 问题结合起来的所谓**复合边值问题**，简称 **RH 问题**，其提法如下：

设 L 为复平面中一光滑封闭曲线，其内域记为 D，且已取定反时针向为正向. 在 D 内又有一组互相外离的封闭光滑曲线 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_n$ ①，均取定

① 一般只要求 Γ_j 互不相交，但相切亦行. 但为行文简洁起见，作了上述限制.

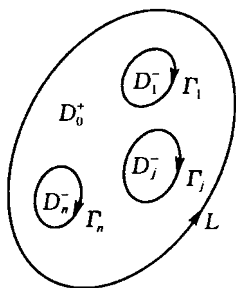


图 2-3

顺时针向为正向. 记$\Gamma=\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j$. Γ_j 所围内域记为D_j^-，而 L 与 Γ 间所围区域记为 D_0^+（图 2-3).

D 上的复合边值问题(RH 问题) 可表述为：求 D 中的一分区全纯函数$\Phi(z)$，以 Γ 为跳跃曲线(即 $\Phi(z)$ 在 D_0^+ 与诸 D_j^- 内全纯，在 L 上以及 Γ 的正、负侧均有极限值)，满足下列条件：

1° $$\Phi^+(\tau)=G(\tau)\,\Phi^-(\tau)+g(\tau),\quad \tau\in\Gamma, \tag{7.1}$$

其中 $G(\tau)$,$g(\tau)$ 均已给在 Γ 上，且 $\in H$，又 $G(t)\neq 0$；

2° $$\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\,\Phi^+(t)\}=c(t),\quad t\in L, \tag{7.2}$$

其中 $a(t)$,$b(t)$,$c(t)$ 均为已给在 L 上的实函数，$\in H$，且$a^2+b^2\neq 0$.

记

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_j}G(\tau)=\frac{1}{2\pi}[\arg G(\tau)]_{\Gamma_j}=\kappa_j,$$

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma}G(\tau)=\kappa=\sum_{j=1}^{n}\kappa_j,$$

$$\mathrm{Ind}_L[a(t)-\mathrm{i}b(t)]=\frac{1}{2\pi}\{\arg[a(t)-\mathrm{i}b(t)]\}_L=k,$$

而记 $K=k+\kappa$. $2K$ 称为所提 RH 问题的**指标**①.

我们先来求出 D 中的一分区全纯函数$\Phi_1(z)$ 且连续到 L 上者，使其满足条件(7.1)，而暂时不考虑条件(7.2). 如求解通常 R 问题一样(参看 2.2 节及其习题 3,4 和 2.3 节)，令

$$\Pi(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{\kappa_j},$$

其中 $z_j\in D_j^-$ 为任意的点，

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{\log[\Pi(\tau)G(\tau)]}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,$$

$$X(z)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{\Gamma(z)}}{\Pi(z)}, & \text{当 } z\in D_0^+ \text{ 时；}\\[2ex] \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in \sum\limits_{j=1}^{n}D_j^- \text{ 时.}\end{cases}$$

---

① 也可称 K 为 RH 问题的指标(与第 89 页底注一致). 但下面将看到，这时称 $2K$ 为指标更为合理. 在 4.4.1 段中，则又称 K 为指标.

$X(z)$ 也可称为问题(7.1) 的典则函数，它满足下式：

$$X^{+}(\tau)=G(\tau)X^{-}(\tau),\quad \tau\in\Gamma. \tag{7.3}$$

于是，

$$\Phi_1(z)=X(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\tau)d\tau}{X^{+}(\tau)(\tau-z)}+F(z)\right] \tag{7.4}$$

是这问题的一般解，但这里 $F(z)$ 是在 D 内全纯、在 $\overline{D}$ 上连续的任意函数. 由于原 RH 问题只考虑 $\overline{D}$ 上的问题，所以这一相应 R 问题一定可解，且出现了 D 中的全纯函数以代替全平面中的全纯函数.

得出 $\Phi_1(z)$ 后，我们用下式把未知函数 $\Phi(z)$ 变换为新的未知函数 $\Phi_0(z)$：

$$\Phi(z)=X(z)\Phi_0(z)+\Phi_1(z), \tag{7.5}$$

则 $\Phi_0(z)$ 仍应在 D 中分区全纯且连续到 L 上. 当 $\tau\in\Gamma$ 时，因 $\Phi_1(z)$ 满足(7.1)，故由(7.3) 知，

$$\begin{aligned}\Phi^{+}(\tau)&=\Phi_1^{+}(\tau)+X^{+}(\tau)\Phi_0^{+}(\tau)\\&=G(\tau)\Phi_1^{-}(\tau)+g(\tau)+G(\tau)X^{-}(\tau)\Phi_0^{+}(\tau)\\&=G(\tau)[\Phi_1^{-}(\tau)+X^{-}(\tau)\Phi_0^{+}(\tau)]+g(\tau).\end{aligned}$$

再由(7.1)，

$$\Phi^{+}(\tau)=G(\tau)[\Phi_1^{-}(\tau)+X^{-}(\tau)\Phi_0^{-}(\tau)]+g(\tau).$$

比较此两式，并注意$X^{-}(\tau)\neq 0$，故知

$$\Phi_0^{+}(\tau)=\Phi_0^{-}(\tau),\quad \tau\in\Gamma.$$

因此，$\Phi_0(z)$ 实际上是在 D 内全纯、在 $\overline{D}$ 上连续的函数.

反之，若 $\Phi_0(z)$ 在 D 内全纯、在 $\overline{D}$ 上连续，则也容易证明由(7.5) 所确定的分区全纯函数 $\Phi(z)$ 必满足(7.1)，且连续到 L 上.

这样，提出的 RH 问题就转化为求在 D 内全纯且在 $\overline{D}$ 上连续的函数 $\Phi_0(z)$，使它满足由(7.2) 转化的相应条件. 将(7.5) 代入(7.2)，便可立刻得到下述条件：

$$\operatorname{Re}\{[a(t)+ib(t)]X(t)\Phi_0^{+}(t)\}=c^{*}(t),\quad t\in L, \tag{7.6}$$

这里已令

$$c^{*}(t)=c(t)-\operatorname{Re}\{[a(t)+ib(t)]\Phi_1(t)\}. \tag{7.7}$$

由于 $X(t)$,$\Phi_1^{+}(t)$ 在 L 上 $\in H$，从而 $c^{*}(t)$ 也 $\in H$ 于 L 上，$(a+ib)X(t)$ 也 $\in H$ 于 L 上. 这样，原问题便转化为 D 中的 H 问题(7.6)，而消去了条件(7.1) 以及诸曲线 Γ_j. 我们称这种方法为**消去法**.

(7.4) 中的任意函数 $F(z)$ 如何选取没有关系. 因为，如果在 $F(z)$ 上再

添加一个同类型函数 $f(z)$，$\Phi_1(z)$ 就会增加一项$X(z)f(z)$，而由(7.5)，只要在所求函数$\Phi_0(z)$ 中减去 $f(z)$，就能使$\Phi(z)$ 不变；这等于在(7.6) 中两边各减去一项

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]X(t)f(t)\},\quad t\in L,$$

因而 $\Phi_0(z)$ 也没有改变. 所以，在(7.4) 中不妨取 $F(z)\equiv 0$.

消去法这一思想可广泛应用于求解更为广泛的一些边值问题，只要它是一个 R 问题与另一种边值问题的复合，因而值得注意.

2.7.2 RH 问题的求解

我们下面将设 L 为单位圆$|t|=1$. 因为否则的话可通过保形变换把 D^+ 变为$|t|<1$[①]. 为了求解 RH 问题(7.1)，现在只要求解 D^+ 中的 H 问题(7.6). 此问题的指标为

$$\mathrm{Ind}_L\{[a(t)-\mathrm{i}b(t)]\overline{X(t)}\}=k-\mathrm{Ind}_L X(t).$$

但当 $t\in L$ 时，

$$X(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-z_j)^{-\kappa_j}\mathrm{e}^{\Gamma(t)},$$

所以，

$$\mathrm{Ind}_L X(t)=-\kappa+\mathrm{Ind}_L\mathrm{e}^{\Gamma(t)},$$

而$\Gamma(t)$ 在 L 上单值连续，故

$$\mathrm{Ind}_L\mathrm{e}^{\Gamma(t)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\log\mathrm{e}^{\Gamma(t)}]_L=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\Gamma(t)]_L=0.$$

这样，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_L\{[a(t)-\mathrm{i}b(t)]\overline{X(t)}\}&=k+\kappa=K\\&=\mathrm{Ind}_L\{a(t)-\mathrm{i}b(t)\}+\mathrm{Ind}_\Gamma G(\tau).\end{aligned}\tag{7.8}$$

这就是说，转化后的 H 问题的指标就是原 RH 问题的指标之半.

于是，根据 2.6.3 段中的结果，我们就可对 RH 问题作出以下的讨论.

1） 设$g\equiv 0$，$c\equiv 0$ (齐次问题). 根据定理 2.6.1，当$K\geqslant 0$时，相应 H 问题(7.6) ($c^*\equiv 0$) 的一般解可写成

$$\Phi_0(z)=c_1\Psi_1(z)+c_2\Psi_2(z)+\cdots+c_{2K+1}\Psi_{2K+1}(z)$$

之形状，其中$\{\Psi_j(z)\}_1^{2K+1}$ 为其 $2K+1$ 个(在实系数域中的) 线性无关特解，而$\{c_j\}_1^{2K+1}$ 为任意实常数. 因此这时齐次 RH 问题的一般解为

① 这时要求 L 为 Lyapunov 曲线，参见第 86 页底注.

$$\Phi(z) = X(z)\sum_{j=1}^{2K+1} c_j \Psi_j(z). \qquad (7.9)$$

当 $K<0$ 时，由于相应 H 问题只有零解，从而原 RH 问题也只有零解.

2） 设 $g\equiv 0$，$c\not\equiv 0$. 由于这时可取 $\Phi_1(z)\equiv 0$，故 $\Phi(z)=X(z)\Phi_0(z)$，而 $\Phi_0(z)$ 为 D 中非齐次 H 问题

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]X(t)\Phi_0^+(t)\}=c(t), \quad t\in L$$

的解. 由定理 2.6.2，当 $K\geqslant 0$ 时，相应 H 问题有一般解

$$\widetilde{\Phi}_0(z)+\sum_{j=1}^{2K+1} c_j\Psi_j(z)$$

($\widetilde{\Phi}_0(z)$ 为其一特解)，故原 RH 问题有一般解

$$\Phi(z)=X(z)\left[\widetilde{\Phi}_0(z)+\sum_{j=1}^{2K+1} c_j\Psi_j(z)\right], \qquad (7.10)$$

其中 c_j 仍为实任意常数. 当 $K<0$ 时，当且仅当 $c^*(t)$ 从而 $c(t)$ 满足 $-2K-1$ 个实条件时，相应 H 问题从而原 RH 问题才有解，且解唯一.

3） 设 $g\not\equiv 0$. 于是 $\Phi_1(z)\not\equiv 0$. 这时又可分为两种情况：

（i） 如果 $c^*\not\equiv 0$，即

$$c(t)\not\equiv \mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Phi_1^+(t)\},$$

则与上面情况 2) 相同. 但当 $K\geqslant 0$ 时，一般解(7.10) 右边还要添加一项 $\Phi_1(z)$；当 $K<0$ 时，当且仅当 $c(t), a(t)+\mathrm{i}b(t), G(\tau), g(\tau)$ 间要满足 $-2K-1$ 个实条件时才有解，且有唯一解.

（ii） 如果 $c^*(t)\equiv 0$，即

$$c(t)=\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Phi_1(t)\},$$

则问题仍转化为齐次问题. 但当 $K\geqslant 0$ 时，问题的一般解(7.9) 右边还要添加一项 $\Phi_1(z)$；当 $K<0$ 时，由于相应 H 问题只有零解，故原 RH 问题有唯一非零解 $\Phi_1(z)$.

我们把这最后情况称为**准齐次 RH 问题**，而把情况 2) 和 3)（i）统称为**真非齐次 RH 问题.**

准齐次 RH 问题条件中的 $\Phi_1(t)$ 由下式给出：

$$\Phi_1(t)=\frac{X(t)}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{g(\tau)\mathrm{d}\tau}{X^+(\tau)(\tau-t)}, \quad t\in L.$$

如果一开始在(1.3) 中并不取 $F(z)\equiv 0$，而任意取定一个在 D 内全纯、在 $\overline{D}$ 上连续的某一函数(且其边值 $\in H$ 于 L 上)，则准齐次 RH 问题就可转化为下列 $\Phi_0(z)$ 的非齐次 H 问题：

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]X(t)\Phi_0^+(t)\}$$
$$=-\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]X(t)F(t)\},\quad t\in L.$$

当 $K\geqslant 0$ 时，原 RH 问题的一般解为

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+X(z)\left[\tilde{\Phi}_0(z)+\sum_{j=1}^{2K+1}c_j\Psi_j(z)\right],$$

其中 $\tilde{\Phi}_0(z)$ 为上述 H 问题的一特解. 当 $K<0$ 时，此 H 问题至多只可能有一个解，但 $-F(z)$ 显然是它的解，故

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)-F(z)X(z)$$

是原 RH 问题的唯一非零解. 结果与前相同.

所以，原 RH 问题是准齐次问题的一般条件是：有满足条件(7.1)的在 D 内分区全纯、连续到 L 上的函数 $\Phi_1(z)$ 存在(以(7.4)表出)，使得

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Phi_1^+(t)\}=c(t),\quad t\in L. \tag{7.11}$$

以上讨论可归结为

定理 2.7.1 对单位圆 D 内的 RH 问题，当 $K=k+\kappa\geqslant 0$ 时，问题的一般解中含有 $2K+1$ 个任意实常数；当 $K<0$ 时，

1) 对齐次问题($c\equiv 0$, $g\equiv 0$)只有零解；

2) 对准齐次问题有唯一非零解；

3) 对真非齐次问题，当且仅当问题中各已知函数间满足 $-2K-1$ 个实条件时，才有唯一解.

在本段的讨论中，我们没有把涉及的函数 $\tilde{\Phi}_0(z)$，$\Psi_j(z)$ 的具体表达式写出. 由 2.6.3 段中的结果，要写出它们也不难. 由于通过保形变换，2.6.3 段中的定性结论(包括一般解中含有的实任意常数个数以及实可解条件的个数)对任何边界为 Lyapunov 曲线的单连通区域也是成立的，所以上面的定理对这种一般情况也成立.

如果 D 是单位圆的外域(或上述这种 Lyapunov 曲线所围的外域)，诸 Γ_j 都在这外域内，也可有完全类似的 RH 边值问题. 这也可完全类似地讨论，也可用反演变成内域中的 RH 问题来讨论.

对于 D 为多连通区域时，RH 问题也可类似地讨论，这里从略.

И. С. Рогожина[46] 于 1965 年也曾讨论过类似的以及更复杂的问题.

习 题

1. 将 2.7.2 段中的结论利用 2.6.3 段中的结果写出具体表达式.
2. 试讨论半平面中的 RH 问题.

2.8 周期边值问题

2.8.1 周期 Riemann 边值问题的提法与转化

在实际问题中，常会遇到所谓的周期 **Riemann** 边值问题，简记为 **PR** 问题，其提法如下：

设 L_k $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷条封闭光滑曲线，它们彼此形状相同，互不相交，且以 $a\pi$ $(a>0)$ 为周期水平地排列(图 2-4). 各 L_k 均以反时针向为正向. 记 $L=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}L_k$. L_k 的内域记为 S_k^+，L 的外域记为 S^-. 不妨设原点 $O\in S_0^+$，而 $\pm\frac{1}{2}a\pi\in S^-$；这是做得到的，必要时作坐标轴的一平移即可.

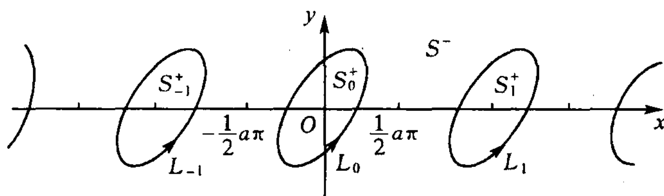


图 2-4

周期 Riemann 边值问题(PR 问题)为：要求一个以 $a\pi$ 为周期的分区全纯函数 $\Phi(z)$，以 L 为跳跃曲线(这时不能要求 $z=\infty$ 为极点)，使得

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L, \tag{8.1}$$

其中 $G(t)$, $g(t)$ 已给在 L 上，$\in H$，且 $G(t)\neq0$，它们都是以 $a\pi$ 为周期的：

$$G(t+a\pi)=G(t),\quad g(t+a\pi)=g(t).$$

当 $g(t)\equiv0$ 时，称问题为齐次的；否则，称为非齐次的.

注意 ∞ 点是各曲线 L_k 之并所成点集的聚点，故上述问题的解(如果存在的话)在 $z=\infty$ 处一般不能有确定的极限. 但是当 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ (指 $z=x+\mathrm{i}y$，x 任意，而 $y\to\pm\infty$) 时，可以对 $\Phi(z)$ 提出一定的要求. 这种补充要求可以是各种各样的，将在以后给出.

在问题中，我们只要求解 $\Phi(z)$ 也以 $a\pi$ 为周期，这从实际应用观点来看是合理的；但不能认为这是当然的. 因为，例如，对于齐次 PR 问题而言，若 $\Phi_1(z)$ 是它的一个非零周期解，则对任何(非周期) 整函数 $I(z)$ 来说，

$\Phi(z)I(z)$ 也是它的解，但不是周期的. 以后所说(8.1)的解都是指以 $a\pi$ 为周期的解.

我们将用保形映射的方法把问题(8.1)转化为通常的 R 问题.

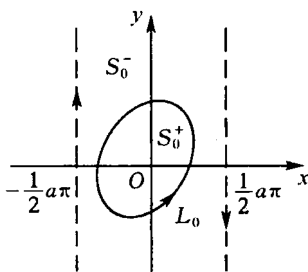


图 2-5

作带形 S_0：$|x|<\frac{1}{2}a\pi$. 暂设 L_0 全在 S_0 中，记 $S_0^-=S^-\cap S_0$，并在直线 $x=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 上取定正向，使 S_0^- 在其右侧(图 2-5). 若 $\Phi(z)$ 为 PR 问题(8.1)的解，其在 S_0 中的部分记为 $\Phi_0(z)$，则 $\Phi_0(z)$ 是 S_0 中的分区全纯函数，连续到 $x=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 上，以 L_0 为跳跃曲线，且满足下列条件：

$$\Phi_0^+(t)=G(t)\Phi_0^-(t)+g(t),\quad t\in L_0,\tag{8.2}$$

$$\Phi_0\left(\frac{1}{2}a\pi+\mathrm{i}y\right)=\Phi_0\left(-\frac{1}{2}a\pi+\mathrm{i}y\right),\quad |y|<+\infty.\tag{8.3}$$

反之，若 $\Phi_0(z)$ 在 S_0 中分区全纯，连续到 $x=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 上，满足条件(8.2)，(8.3)，则把它作 $a\pi$ 的周期延拓后，便得到(8.1)的一个解.

这样，问题PR就转变为下一等价问题：求 S_0 中分区全纯函数 $\Phi_0(z)$，连续到 $x=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 上，使满足条件(8.2)和(8.3). 记这一问题为 R'.

用函数

$$\zeta=\tan\frac{z}{a}\tag{8.4}$$

把带形 S_0 映射到 ζ 平面中的区域 Σ_0，它是由整个 ζ 平面沿着虚轴在区间 $[-\mathrm{i},\mathrm{i}]$ 之外剖开而成的(图 2-6)，且将 $z=0,\pm\frac{1}{2}a\pi,+\infty\mathrm{i},-\infty\mathrm{i}$ 分别映为 $\zeta=0,\infty,\mathrm{i},-\mathrm{i}$，而直线 $x=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 分别变成了剖线的右岸与左岸. 这时，L_0 变成某一光滑曲线 Γ_0，它围住原点 O，而 $\zeta=\pm\mathrm{i}$ 则在其外，且不与剖线相交. 记 Γ_0 的内域为 Σ_0^+，外域为 Σ_0^-.

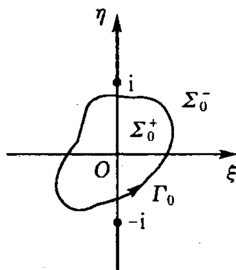


图 2-6

设 $\Phi_0(z)$ 经变换后成为 $\Phi_*(\zeta)$. 由(8.3)可知，它在剖线两侧有相同极限值，故知 $\Phi_*(\zeta)$ 是 ζ 平面中的分区全纯函数(在 $\zeta=\infty$ 处有界)，且满足条件

$$\Phi_*^+(\tau) = G_*(\tau)\Phi_*^-(\tau) + g_*(\tau), \quad \tau \in \Gamma_0; \tag{8.5}$$

其中$G_*(\tau)$,$g_*(\tau)$分别为$G(t)$,$g(t)$变换后的结果，它们仍都$\in H$于Γ_0上，且$G_*(\tau) \neq 0$. 但要注意，$\zeta=\pm i$一般是$\Phi_*(\zeta)$的孤立奇点. 于是原问题PR现在就化为了通常的R问题(8.5)，但在$\zeta=\pm i$处$\Phi_*(\zeta)$的性状暂时没有确定.

我们称

$$\kappa = \mathrm{Ind}_{L_0} G(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_0} \tag{8.6}$$

为原PR问题(8.1)的**指标**. 显然它就是转化后的问题(8.5)的指标：

$$\kappa = \mathrm{Ind}_{\Gamma_0} G_*(\tau).$$

注意，我们假定L_0在带形$|x| < \frac{1}{2}a\pi$中不是本质的. 因为否则的话，我们可用一对通过点$\pm\frac{1}{2}a\pi$的二周期合同的光滑曲线延伸到$\pm\infty i$者代替直线$x=\pm\frac{1}{2}a\pi$，使构成一曲边带形，然后再作上述映射，其效果是一样的；因为这时由映射(8.4)所得的区域Σ_0仍为全ζ平面用自$\pm i$出发的二剖线割开，且$\Phi_*(\zeta)$在剖线的两岸极限值仍相等，而所得问题(8.5)没有改变.

注1 如果一开始，每个L_k是由一组有限个互不相交的封闭曲线构成的，本节所论完全成立；这里假定L_k是一条封闭曲线只是为了行文简洁而已.

注2 用相似变换可把周期例如改为π $(a=1)$. 这里保留$a\pi$是为了在所得结果中令$a\to+\infty$时可以与非周期R问题进行对比.

2.8.2 齐次PR问题

今设(8.1)中$g(t)\equiv 0$，即齐次PR问题. 这时相应的$g_*(\tau)\equiv 0$. 以下对$\Phi(\pm\infty i)$作不同要求进行讨论，这些要求在应用中较为重要.

1° 要求$\Phi(\pm\infty i)$有界. 亦即要求$\Phi_*(\zeta)$在$\zeta=\pm i$处有界，从而正则. 根据通常的R问题的结果(现在是在R_0中求解)，这时(8.5)(但$g_*(\zeta)\equiv 0$)的一般解为

$$\Phi_*(\zeta) = X_*(\zeta)P_\kappa(\zeta), \tag{8.7}$$

其中

$$X_*(\zeta) = \begin{cases} e^{\Gamma_*(\zeta)}, & \text{当 } \zeta \in \Sigma_0^+ \text{ 时;} \\ \zeta^{-\kappa} e^{\Gamma_*(\zeta)}, & \text{当 } \zeta \in \Sigma_0^- \text{ 时,} \end{cases} \tag{8.8}$$

这里

$$\Gamma_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\log[\tau^{-\kappa}G_*(\tau)]}{\tau-\zeta}d\tau, \quad \zeta \overline{\in} \Gamma_0, \qquad (8$$

而 $P_\kappa(\zeta)$ 为 κ 次任意多项式($\kappa<0$ 时，认为 $P_\kappa(\zeta)\equiv 0$).

回到 z 平面，则有

$$\Phi_0(z)=X_0(z)P_\kappa\left(\tan\frac{z}{a}\right), \tag{8.10}$$

其中

$$X_0(z)=\begin{cases}e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in S_0^+ \text{ 时；}\\ \cot^\kappa\dfrac{z}{a}\,e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in S_0^- \text{ 时，}\end{cases} \tag{8.11}$$

这里

$$\begin{aligned}\Gamma(z)&=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}\frac{\log\left[\cot^\kappa\dfrac{t}{a}G(t)\right]}{\tan\dfrac{t}{a}-\tan\dfrac{z}{a}}\frac{dt}{\cos^2\dfrac{t}{a}}\\&=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}\log\left[\cot^\kappa\frac{t}{a}G(t)\right]\cdot\left(\cot\frac{t-z}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)dt\\&=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}\log\left[\cot^\kappa\frac{t}{a}G(t)\right]\cdot\cot\frac{t-z}{a}\,dt+C,\end{aligned}$$

把常数系数 e^C 并入 $P_\kappa\left(\tan\dfrac{z}{a}\right)$中，因此可以认为

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}\log\left[\cot^\kappa\frac{t}{a}G(t)\right]\cdot\cot\frac{t-z}{a}\,dt, \tag{8.12}$$

其中对数可以任意取定一支.

若将 $\Phi_0(z)$ 作周期 $a\pi$ 的延拓，并注意到(8.10)～(8.12)诸式中所出现的函数均以 $a\pi$ 为周期，故不需改变立即可得齐次 PR 问题的一般解

$$\Phi(z)=X(z)P_\kappa\left(\tan\frac{z}{a}\right), \tag{8.10$'$}$$

其中

$$X(z)=\begin{cases}e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in S^+ \text{ 时；}\\ \cot^\kappa\dfrac{z}{a}\,e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in S^- \text{ 时，}\end{cases} \tag{8.11$'$}$$

而 $\Gamma(z)$ 仍以(8.12)给出. $X(z)$ 仍称为 PR 问题的典则函数. 上述一般解还可写成

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{e^{\Gamma(z)}}{\cos^\kappa\dfrac{z}{a}}Q_\kappa\left(\sin\dfrac{z}{a},\cos\dfrac{z}{a}\right), & \text{当 } z\in S^+ \text{ 时；}\\ \dfrac{e^{\Gamma(z)}}{\sin^\kappa\dfrac{z}{a}}Q_\kappa\left(\sin\dfrac{z}{a},\cos\dfrac{z}{a}\right), & \text{当 } z\in S^- \text{ 时，}\end{cases} \tag{8.13}$$

其中 $Q_\kappa(X,Y)$ 是 X,Y 的 κ 次齐次任意多项式($\kappa<0$ 时 $Q_\kappa\equiv 0$).

因此我们得到

定理2.8.1 如果要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界，则齐次 PR 问题(8.1) ($g\equiv 0$) 当指标 $\kappa\geqslant 0$ 时有 $\kappa+1$ 个线性无关的解，其一般解为(8.13)；当 $\kappa<0$ 时只有零解.

这一结果首先由 Л. И. Чибрикова[49] 所获得.

附带指出，因为

$$\cos^{n-j}z\ \sin^j z=\sum_{k=0}^{n}C_{nj}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-2k)z},$$

其中 $C_{nj}(k)$ 为某些常数，故知：当 $\kappa=2m$ 时，还可写

$$Q_{2m}\left(\sin\frac{z}{a},\cos\frac{z}{a}\right)=\alpha_0+\sum_{j=1}^{m}\left(\alpha_j\cos\frac{2jz}{a}+\beta_j\sin\frac{2jz}{a}\right);\tag{8.14}$$

当 $\kappa=2m+1$ 时，还可写

$$Q_{2m+1}\left(\sin\frac{z}{a},\cos\frac{z}{a}\right)=\sum_{j=0}^{m}\left[\alpha_j\cos\frac{(2j+1)z}{a}+\beta_j\sin\frac{(2j+1)z}{a}\right].\tag{8.14$'$}$$

亦即，在一般解(8.13)中，也可把 Q_κ 写成上述形式的任意三角多项式.

2° 要求 $\Phi(+\infty\mathrm{i})=\Phi(-\infty\mathrm{i})$. 以此条件代入(8.10)′，得

$$X(+\infty\mathrm{i})P_\kappa(+\mathrm{i})=X(-\infty\mathrm{i})P_\kappa(-\mathrm{i}).$$

但因

$$X(+\infty\mathrm{i})=(-i)^\kappa\mathrm{e}^{\Gamma(+\infty\mathrm{i})}=(-\mathrm{i})^\kappa\exp\left\{\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}\log\left[\cot^\kappa\frac{t}{a}G(t)\right]\mathrm{d}t\right\},$$

$$X(-\infty\mathrm{i})=\mathrm{i}^\kappa\mathrm{e}^{\Gamma(-\infty\mathrm{i})}=\mathrm{i}^\kappa\exp\left\{-\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}\log\left[\cot^\kappa\frac{t}{a}G(t)\right]\mathrm{d}t\right\},$$

因而上述条件可写为

$$P_\kappa(+\mathrm{i})=G_\infty P_\kappa(-\mathrm{i}),\tag{8.15}$$

其中

$$G_\infty=\frac{X(-\infty\mathrm{i})}{X(+\infty\mathrm{i})}=(-1)^\kappa\exp\left\{-\frac{1}{a\pi}\int_{L_0}\log\left[\cot^\kappa\frac{t}{a}G(t)\right]\mathrm{d}t\right\}.\tag{8.16}$$

当 $\kappa>0$ 时，条件(8.15)一般限制了 P_κ 中的一个系数. 但当 $\kappa=0$ 时，情况有所不同：这时因 $P_0\equiv C_0$ 是一常数，故若 $G_\infty=1$，亦即

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\log G(t)\mathrm{d}t\equiv 0\pmod{a\pi}\tag{8.17}$$

时(即上式左端之值为 $a\pi$ 的整数倍时)，C_0 可以任意取值而使(8.15) 满足；如果(8.17) 不成立，则必须取 $C_0 = 0$.

因此我们得到

定理 2.8.2 如果要求 $\Phi(+\infty\mathrm{i}) = \Phi(-\infty\mathrm{i})$ (且有限)，则齐次 PR 问题当 $\kappa \geqslant 1$ 时有 κ 个线性无关解；当 $\kappa = 0$ 时，当且仅当(8.17) 满足时有一个线性无关的解；当 $\kappa < 0$ 或者 $\kappa = 0$ 但(8.17) 不满足时就只有零解.

3° 要求 $\Phi(+\infty\mathrm{i}) = -\Phi(-\infty\mathrm{i})$. 这一要求看来非常奇特，但以后我们会看到，它却是很有用的. 这一情况与 2° 极相似，这时(8.15) 要改为

$$P_\kappa(+\mathrm{i}) = -G_\infty P_\kappa(-\mathrm{i}). \tag{8.15$'$}$$

类似于 2° 中的讨论知，当 $\kappa = 0$ 时，当且仅当 $G_\infty = -1$ 亦即

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0} \log G(t)\,\mathrm{d}t \equiv \frac{1}{2}a\pi \pmod{a\pi} \tag{8.17$'$}$$

时，C_0 可以任意取值都能使(8.15)′ 成立. 若(8.17)′ 不成立，则必须取 $C_0 = 0$.

因此我们有

定理 2.8.3 如果要求 $\Phi(+\infty\mathrm{i}) = -\Phi(-\infty\mathrm{i})$ (有限)，则齐次 PR 问题当 $\kappa \geqslant 1$ 时有 κ 个线性无关解；当 $\kappa = 0$ 时当且仅当(8.17)′ 满足时有一个线性无关解；当 $\kappa < 0$ 或者 $\kappa = 0$ 但(8.17) 不成立时只有零解.

4° 要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i}) = 0$. 亦即要求 $\Phi_*(\pm\mathrm{i}) = 0$. 这时问题(8.5) 的一般解为

$$\Phi_*(\zeta) = X_*(\zeta)(\zeta^2+1)P_{\kappa-2}(\zeta).$$

回到 z 平面，得

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\cos^2\dfrac{z}{a}}P_{\kappa-2}\left(\tan\frac{z}{a}\right) = \frac{X(z)}{\cos^\kappa\dfrac{z}{a}}Q_{\kappa-2}\left(\sin\frac{z}{a}, \cos\frac{z}{a}\right), \tag{8.18}$$

或即

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\Gamma(z)}}{\cos^\kappa\dfrac{z}{a}}Q_{\kappa-2}\left(\sin\dfrac{z}{a}, \cos\dfrac{z}{a}\right), & \text{当 } z \in S^+ \text{ 时；} \\ \dfrac{\mathrm{e}^{\Gamma(z)}}{\sin^\kappa\dfrac{z}{a}}Q_{\kappa-2}\left(\sin\dfrac{z}{a}, \cos\dfrac{z}{a}\right), & \text{当 } z \in S^- \text{ 时.} \end{cases} \tag{8.18$'$}$$

于是我们有

定理 2.8.4 如果要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i}) = 0$，则齐次 PR 问题当 $\kappa \geqslant 2$ 时有 $\kappa - 1$ 个线性无关解，当 $\kappa < 2$ 时只有零解.

当然我们还可考虑 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})=\infty$，亦即允许 $\Phi_*(\zeta)$ 在 $\zeta=\pm\mathrm{i}$ 处有极点的情况，这里从略.

最后我们指出，也可不用保形映射，设法直接求出典则函数 $X(z)$，再求解齐次 PR 问题. 这里要用到下列**推广的 Plemelj 公式**，即：如果 $g(t)\in H$，以 $a\pi$ 为周期，而

$$\Psi(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t,\quad z\overline{\in}L,\tag{8.19}$$

则

$$\Psi^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}g(t_0)+\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t,\quad t_0\in L.\tag{8.20}$$

其证明留给读者.

还请注意，即使 L_0 为一开口弧段时，(8.20) 仍成立，这时 t_0 当然不能是 L 的端点.

2.8.3 非齐次 PR 问题

这时(8.1)中的 $g(t)\neq 0$，从而 $g_*(\tau)\neq 0$. 也分几种不同要求进行讨论.

1° 要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界. 当 $\kappa\geqslant -1$ 时，问题(8.5) 的一般解为

$$\Phi_*(\zeta)=X_*(\zeta)[\Psi_*(\zeta)+P_\kappa(\zeta)],$$

其中

$$\Psi_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\frac{g_*(\tau)}{X_*^+(\tau)}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-\zeta};$$

当 $\kappa<-1$ 时，当且仅当满足 $-\kappa-1$ 个条件

$$\int_{\Gamma_0}\frac{g_*(\tau)}{X_*^+(\tau)}\tau^{j-1}\mathrm{d}\tau=0,\quad j=1,2,\cdots,-\kappa-1$$

时，它才有唯一解.

回到 z 平面，当 $\kappa\geqslant -1$ 时，PR 问题(8.1) 的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)\left[\Psi(z)+P_\kappa\left(\tan\frac{z}{a}\right)\right],\tag{8.21}$$

其中

$$\Psi(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\cot\frac{t-z}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t.\tag{8.22}$$

当 $\kappa\geqslant 0$ 时，可把上式右端括号中后一项略去并入 P_κ 的常数项中，而成为

$$\Psi(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t;\tag{8.22$'$}$$

但当$\kappa=-1$时，此项不能略去，以保证$z=\pm\frac{1}{2}a\pi$时$X(z)\cdot\Psi(z)$有界. 当$\kappa<-1$时，当且仅当满足$-\kappa-1$个条件

$$\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\frac{\sin^{j-1}\frac{t}{a}}{\cos^{j+1}\frac{t}{a}}\mathrm{d}t=0,\quad j=1,2,\cdots,-\kappa-1,\tag{8.23}$$

它才有唯一解(8.21) ($P_\kappa\equiv 0$)，且这时$\Psi(z)$必须以(8.22)给出.

这样，我们得到

定理 2.8.5 如果要求$\Phi(\pm\infty i)$有界，则非齐次 PR 问题(8.1)，当$\kappa\geqslant-1$时，其一般解中含有$\kappa+1$个任意常数；当$\kappa<-1$时，当且仅当满足$-\kappa-1$个条件(8.23)时有唯一解. 总之，解的自由度为$\kappa+1$.

这一定理也是属于 Чибрикова 的.

2° 要求$\Phi(+\infty i)=\Phi(-\infty i)$. 先设$\kappa\geqslant 0$. 这时1°中的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)\left[\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\mathrm{d}t+P_\kappa\left(\tan\frac{z}{a}\right)\right].\tag{8.24}$$

令$z=\pm\infty i$代入，并令其相等，得

$$X(+\infty i)\left[\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t+P_\kappa(+i)\right]$$
$$=X(-\infty i)\left[-\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t+P_\kappa(-i)\right].$$

由(8.16)，此条件可改写为

$$\frac{G_\infty+1}{2a\pi}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t=G_\infty P_\kappa(-i)-P_\kappa(+i).\tag{8.25}$$

当$\kappa=0$时如果$G_\infty\neq 1$，亦即条件(8.17)不成立时，问题便有唯一解，且这时

$$P_0\equiv C_0=\frac{G_\infty+1}{G_\infty-1}\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t,$$

于是最后得

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2a\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\cot\frac{t-z}{a}+\frac{G_\infty+1}{G_\infty-1}i\right)\mathrm{d}t.\tag{8.26}$$

当$\kappa=0$时如果$G_\infty=1$，亦即条件(8.17)成立时，当且仅当

$$\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t=0\tag{8.27}$$

满足时，问题有一般解

$$\Phi(z)=X(z)\left[\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+C\right],\tag{8.28}$$

其中 C 为任意常数.

当 $\kappa\geqslant 1$ 时，问题的一般解为(8.24)，但其中 P_κ 须满足条件(8.25)，亦即一般解中含有 κ 个任意常数.

当 $\kappa=-1$ 时，1° 中有唯一解

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\cot\frac{t-z}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t.\tag{8.29}$$

要求 $\Phi(+\infty\mathrm{i})=\Phi(-\infty\mathrm{i})$ 即要求

$$\begin{aligned}X(+\infty\mathrm{i})&\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\mathrm{i}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t\\&=X(-\infty\mathrm{i})\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(-\mathrm{i}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

亦即

$$(G_\infty-1)\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\tan\frac{t}{a}\,\mathrm{d}t=\mathrm{i}(G_\infty+1)\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t.\tag{8.30}$$

亦即，这时当且仅当(8.30) 满足时，问题有唯一解(8.29).

当 $\kappa<-1$ 时，则当且仅当(8.23) 和(8.30) 满足时，问题有唯一解(8.29) (这里共有 $-\kappa$ 个条件)；而且，当 $G_\infty\neq 1$ 时，(8.29) 仍可写成(8.26).

于是，可得

定理2.8.6 如果要求$\Phi(+\infty\mathrm{i})=\Phi(-\infty\mathrm{i})$ (有限)，则非齐次PR问题(8.1)当$\kappa\geqslant 1$时其一般解中含有κ个任意常数；当$\kappa=0$时，若(8.17) 不成立，则有唯一解，而(8.17) 成立时，则$g(t)$要满足一个条件(8.27) 时，问题可解，且一般解中含有一个任意常数；当 $\kappa\leqslant -1$ 时，当且仅当满足 $-\kappa$ 个条件时，问题有唯一解.

如果我们定义一个问题解的**广义自由度**为其一般解中任意常数的个数减去可解条件的个数，则在这种情况下，PR 问题解的广义自由度为 κ.

3° 要求 $\Phi(+\infty\mathrm{i})=-\Phi(-\infty\mathrm{i})$. 仍先设 $\kappa\geqslant 0$. 这时所提要求为

$$\begin{aligned}X(+\infty\mathrm{i})&\left[\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t+P_\kappa(+\mathrm{i})\right]\\&=X(-\infty\mathrm{i})\left[\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t-P_\kappa(-\mathrm{i})\right].\end{aligned}$$

由(8.16)，此即

$$\frac{G_\infty - 1}{2a\pi}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t = G_\infty P_\kappa(-\mathrm{i}) + P_\kappa(+\mathrm{i}). \tag{8.25$'$}$$

当 $\kappa=0$ 时，如果 $G_\infty \neq -1$，亦即条件(8.17)′不成立时，问题便有唯一解，且这时

$$P_0 \equiv C_0 = \frac{G_\infty - 1}{G_\infty + 1}\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t,$$

于是最后得

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\cot\frac{t-z}{a} + \frac{G_\infty - 1}{G_\infty + 1}\mathrm{i}\right)\mathrm{d}t. \tag{8.26$'$}$$

当 $\kappa=0$ 且 $G_\infty=-1$ 亦即条件(8.17)′成立时，当且仅当(8.27)满足时，问题有一般解(8.28)，其中 C 为任意常数.

当 $\kappa\geqslant 1$ 时，问题的一般解为(8.24)，但其中 P_κ 须满足条件(8.25)′，亦即一般解中含有 κ 个任意常数.

当 $\kappa=-1$ 时，应在 1° 的唯一解(8.29)中要求 $\Phi(+\infty\mathrm{i}) = -\Phi(-\infty\mathrm{i})$，即

$$(G_\infty + 1)\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\tan\frac{t}{a}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}(G_\infty - 1)\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t. \tag{8.30$'$}$$

当且仅当(8.30)′满足时，问题有唯一解(8.29).

当 $\kappa<-1$ 时，当且仅当条件(8.23)和(8.30)′满足时(共 $-\kappa$ 个条件)，问题有唯一解(8.29)；而且当 $G_\infty\neq -1$ 时，(8.29)还可写成(8.26)′.

故得

定理 2.8.7 如果要求 $\Phi(+\infty\mathrm{i}) = -\Phi(-\infty\mathrm{i})$（有限），则 PR 问题(8.1)当 $\kappa\geqslant 1$ 时，问题的一般解中含有 κ 个任意常数；当 $\kappa=0$ 时，若(8.17)′不成立，则有唯一解，而当(8.17)′成立时，则 $g(t)$ 要满足条件(8.27)就可解，且一般解中含一个任意常数；当 $\kappa\leqslant -1$ 时，当且仅当满足 $-\kappa$ 个条件时，问题有唯一解.

这时问题解的广义自由度仍为 κ.

4° 要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})=0$. 当 $\kappa\geqslant 0$ 时，代入(8.21)，并用(8.22)′表示 $\Psi(z)$，注意到 $X(\pm\infty\mathrm{i})\neq 0$，便得

$$\pm\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t + P_\kappa(\pm\mathrm{i}) = 0. \tag{8.31}$$

因此，当 $\kappa=0$ 时，当且仅当(8.27)满足时有唯一解

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t. \tag{8.32}$$

当$\kappa \geqslant 1$时，问题的一般解中含有$\kappa - 1$个任意常数.

当$\kappa = -1$时，要想解(8.29)满足条件$\Phi(\pm\infty i) = 0$，显然须且只须条件(8.27)以及

$$\int_{L_0} \frac{g(t)}{X^+(t)} \tan\frac{t}{a}\, dt = 0 \tag{8.33}$$

同时满足，且这时有唯一解(8.32).

当$\kappa < -1$时，除须满足条件(8.23)外，还须满足条件(8.27)与(8.33)(共$-\kappa + 1$个条件)，当且仅当这时，问题有唯一解(8.32).

故最后得

定理2.8.8 如果要求$\Phi(\pm\infty i) = 0$，则非齐次PR问题(8.1)当$\kappa \geqslant 1$时一般解中含有$\kappa - 1$个任意常数；当$\kappa \leqslant 0$时，当且仅当满足$-\kappa + 1$个条件时问题有唯一解.

这时问题解的自由度为$\kappa - 1$.

允许$\Phi(\pm\infty i) = \infty$的情况也留给读者讨论.

习 题

1. 试讨论非齐次PR问题(8.1)在

$$\Phi(z) = O(e^{m|y|}) \quad (\text{当}\ |y| \to +\infty)$$

的要求下的解法，这里m为一确定正整数.

2. 求解PR问题(8.1)，其中$G(t) = K\ (\neq 0)$为一常数，分别就对于$\Phi(\pm\infty i)$要求1°～4°进行讨论.

答 1°

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a\pi i}\displaystyle\int_{L_0} g(t)\cot\frac{t-z}{a}\, dt + C, & \text{当}\ z \in S^+\ \text{时}; \\ \dfrac{1}{K}\left[\dfrac{1}{2a\pi i}\displaystyle\int_{L_0} g(t)\cot\frac{t-z}{a}\, dt + C\right], & \text{当}\ z \in S^-\ \text{时}. \end{cases} \tag{$*$}$$

2° 当且仅当

$$\int_{L_0} g(t)dt = 0 \tag{$**$}$$

时，问题有一般解($*$).

3° 有唯一解($*$)，其中$C = 0$.

4° 当且仅当($**$)满足时有唯一解($*$)，其中$C = 0$.

3. 设L是一以$a\pi$为周期的光滑曲线，从而L_0是连接$\pm\frac{1}{2}a\pi + iy_0$的一光滑弧段. 试就这种情况下的PR问题进行讨论.

提示 讨论完全类似，唯一的不同点是：进行保形映射(8.4)后，$\zeta=+\mathrm{i}$与$-\mathrm{i}$分别位于Σ_0^+与Σ_0^-中.

2.8.4 周期 Hilbert 边值问题

仍设L_j如图2-4所示. 所谓**周期 Hilbert 边值问题**或简称**PH**问题是：在S^-中求一全纯函数$\Phi(z)$，以$a\pi$为周期，且在L上的边值满足条件

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Phi^-(t)\}=c(t),\quad t\in L,\tag{8.34}$$

其中$a(t),b(t),c(t)$都是以$a\pi$为周期、在L上$\in H$的函数，且设$a^2+b^2\neq 0$；为确定起见，还设要求$\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$有界.

仍用变换(8.4)，问题(8.34)就可转化为ζ平面中Σ_0^-（图2-6）内的H问题；再经$w=\dfrac{1}{\zeta}$的变换，就可变为w平面中某光滑曲线内域的H问题，从而2.6.3段中的结果(至少定性的结果)就可应用到这里来，再回到z平面即可得到所要的结果. 由于原则上没有什么困难，这里就不详细论述.

但作为实际应用中特别重要的半平面中的PH问题，我们将较详细地进行讨论，希望对解以及可解条件都有具体的分析表达式.

我们的问题是：设Z^+为上半平面，要求一个在Z^+内全纯的函数$\Phi(z)$，使它在x轴即X上的边值满足下列条件：

$$\mathrm{Re}\{[a(x)+\mathrm{i}b(x)]\Phi^+(x)\}=c(x),\quad x\in X,\tag{8.35}$$

其中$a(x),b(x),c(x)$都是以$a\pi$为周期的、在X上$\in\hat{H}$的已知实函数，且$a^2(x)+b^2(x)\neq 0$，并要求$\Phi(z)$在$\overline{Z^+}$上有界.

用变换(8.4)，问题(8.35)就可变为$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$平面中上半平面内的H问题，从而可应用2.6.4段中的结果. 记ξ轴为Ξ，设$a(x),b(x),c(x)$分别变为Ξ上$\in\hat{H}$的函数$a_*(\xi),b_*(\xi),c_*(\xi)$（这是易于证明的），$\Phi(z)$变为$\mathrm{Im}\,\zeta>0$半平面中的全纯函数$\Phi_*(\zeta)$，而(8.35)成为

$$\mathrm{Re}\{[a_*(\xi)+\mathrm{i}b_*(\xi)]\Phi_*^+(\xi)\}=c_*(\xi),\quad \xi\in\Xi,\tag{8.36}$$

$a_*^2(\xi)+b_*^2(\xi)\neq 0$，且$\Phi_*(\infty)$有界. 按2.6.4段，问题(8.36)的指标

$$\kappa=\frac{1}{\pi}\{\arg[a_*(\xi)-\mathrm{i}b_*(\xi)]\}_{-\infty}^{+\infty}$$

为一偶数. 回到z平面中，可以说问题(8.35)的指标也是κ，且

$$\kappa=\frac{1}{\pi}\{\arg[a(x)-\mathrm{i}b(x)]\}_{-\frac{a\pi}{2}}^{+\frac{a\pi}{2}}.\tag{8.37}$$

先来考虑齐次PH问题(8.35)（$c\equiv 0$，从而$c_*\equiv 0$）. 按2.6.4段中的结

果，当 $\kappa\geqslant 0$ 时，问题(8.36)有一般解

$$\Phi_*(\zeta)=X_*(\zeta)Q_\kappa(\zeta), \tag{8.38}$$

其中 $Q_\kappa(\zeta)$ 为 ζ 的 κ 次任意实系数多项式，其中

$$X_*(\zeta)=\begin{cases}(\zeta+\mathrm{i})^{-\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma_*(\zeta)}, & \text{当 } \mathrm{Im}\,\zeta>0 \text{ 时;}\\ (\zeta-\mathrm{i})^{-\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma_*(\zeta)}, & \text{当 } \mathrm{Im}\,\zeta<0 \text{ 时,}\end{cases} \tag{8.39}$$

而

$$\Gamma_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Theta_*(\xi)}{\xi-\zeta}\mathrm{d}\xi,\quad \zeta\in\Xi,$$

其中

$$\Theta_*(\xi)=\arg\left\{-\left(\frac{\xi+\mathrm{i}}{\xi-\mathrm{i}}\right)^{\kappa}[a_*(\xi)-\mathrm{i}b_*(\xi)]^2\right\}.$$

回到 z 平面，由于 $\xi=\tan\dfrac{x}{a}$，故

$$\xi\pm\mathrm{i}=\frac{\sin\dfrac{x}{a}\pm\mathrm{i}\cos\dfrac{x}{a}}{\cos\dfrac{x}{a}}=\pm\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\frac{x}{a}}}{\cos\dfrac{x}{a}}. \tag{8.40}$$

从而(记住 κ 为偶数)

$$\Theta(x)=\Theta_*(\xi)=\arg\{-\mathrm{e}^{-2\kappa\mathrm{i}\frac{x}{a}}[a(x)-\mathrm{i}b(x)]^2\}. \tag{8.41}$$

又由于容易验证

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-\zeta}=\frac{\sec^2\dfrac{x}{a}\,\mathrm{d}x}{a\left(\tan\dfrac{x}{a}-\tan\dfrac{z}{a}\right)}=\frac{1}{a}\left(\cot\frac{x-z}{a}+\tan\frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x, \tag{8.42}$$

并且注意到 $X(z)$ 可以相差一个非零实数因子，因此当 $\Gamma_*(\zeta)$ 回到 z 平面时，可以认为变成

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2a\pi}\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{+\frac{a\pi}{2}}\Theta(x)\cot\frac{x-z}{a}\,\mathrm{d}x. \tag{8.43}$$

这时，(8.39)则成为

$$X(z)=\begin{cases}\left(\tan\dfrac{z}{a}+\mathrm{i}\right)^{-\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma(z)}=(-1)^{\frac{\kappa}{2}}\cos^{\kappa}\dfrac{z}{a}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\kappa z}{a}+\Gamma(z)}, & \\ \qquad\text{当 } z\in Z^+ \text{ 时;} & \\ \left(\tan\dfrac{z}{a}-\mathrm{i}\right)^{-\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma(z)}=(-1)^{\frac{\kappa}{2}}\cos^{\kappa}\dfrac{z}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\kappa z}{a}+\Gamma(z)}, & \\ \qquad\text{当 } z\in Z^- \text{ 时.} & \end{cases}$$

代入(8.38)，除去非零实因子 $(-1)^{\frac{\kappa}{2}}$，最后得齐次PH问题(8.35)当 $\kappa\geqslant 0$ 时

的一般解为

$$\Phi(z) = X_0(z)Q_\kappa\left(\cos\frac{z}{a},\sin\frac{z}{a}\right), \qquad (8.44)$$

其中已令

$$X_0(z) = \begin{cases} e^{\frac{i\kappa z}{a}+\Gamma(z)}, & 当\ z\in Z^+\ 时; \\ e^{-\frac{i\kappa z}{a}+\Gamma(z)}, & 当\ z\in Z^-\ 时, \end{cases} \qquad (8.45)$$

Q_κ 为任意实系数的 κ 次齐次多项式.

当 $\kappa<0$ 时，由于相应齐次 H 问题(8.36) 只有零解，所以原齐次 PH 问题(8.35) 也只有零解.

现考虑一般的非齐次 PH 问题(8.35)，为此只要考虑转化后的(8.36).

仍先设 $\kappa\geqslant 0$. 由 2.6.4 段，(8.36) 这时有特解

$$\Phi_*(\zeta) = \frac{Y_*(\zeta)}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_*(\xi)d\xi}{[a_*(\xi)+ib_*(\xi)]Y_*^+(\xi)(\xi-\zeta)} + \left(\frac{\zeta-i}{\zeta+i}\right)^\kappa\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)^\kappa\frac{c_*(\xi)d\xi}{[a_*(\xi)+ib_*(\xi)]Y_*^+(\xi)(\xi-\zeta)}\right\}, \qquad (8.46)$$

其中

$$Y_*(\zeta) = \begin{cases} e^{\Gamma_*(\zeta)}, & 当\ \mathrm{Im}\,\zeta>0\ 时; \\ \left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^\kappa e^{\Gamma_*(\zeta)}, & 当\ \mathrm{Im}\,\zeta<0\ 时. \end{cases}$$

回到 z 平面，且因对于 $Y_*(\zeta)$ 来说，相差一个非零因子不会改变 $\Phi_*(\zeta)$ 的结构，故类似于前面的化简，可以认为

$$Y_0(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & 当\ z\in Z^+\ 时; \\ e^{-\frac{2i\kappa z}{a}+\Gamma(z)}, & 当\ z\in Z^-\ 时, \end{cases} \qquad (8.47)$$

这样，(8.46) 便成为

$$\Phi(z) = \frac{Y_0(z)}{2a\pi i}\left\{\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}\frac{c(x)}{[a(x)+ib(x)]Y_0^+(x)}\cot\frac{x-z}{a}\,dx + e^{\frac{2i\kappa z}{a}}\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}e^{-\frac{2i\kappa x}{a}}\frac{c(x)}{[a(x)+ib(x)]Y_0^+(x)}\cot\frac{x-z}{a}\,dx\right\}. \qquad (8.48)$$

它是问题(8.35) 的一个特解，再加上相应齐次 PH 问题的一般解(8.44)，便是其一般解.

再设 $\kappa\leqslant -2$. 这时相应 H 问题(8.36) 当且仅当下列条件

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty}H_*(\xi)\cos 2j\theta\,d\xi = 0, \quad j=0,1,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1; \\ &\int_{-\infty}^{+\infty}H_*(\xi)\sin 2j\theta\,d\xi = 0, \quad j=1,2,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1 \end{aligned}\right\} \qquad (8.49)$$

满足时，有唯一解

$$\Phi_*(\zeta)=Y_*(\zeta)\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_*(\xi)d\xi}{[a_*(\xi)+ib_*(\xi)]Y_*^+(\xi)(\xi-\zeta)}-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_*(\xi)d\xi}{[a_*(\xi)+ib_*(\xi)]Y_*^+(\xi)(\xi+i)}\right\},\tag{8.50}$$

其中

$$H_*(\xi)=\frac{c_*(\xi)}{\sqrt{a_*^2(\xi)+b_*^2(\xi)}(1+\xi^2)}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Theta_*(u)}{u-\xi}du\right\},\tag{8.51}$$

而 $\theta=\arg(\xi+i)$.

注意 $\zeta\to-i$ 时，$z\to-\infty i$，从而 $\cot(x-z)\to-i$. 这样，(8.50) 就成为

$$\Phi(z)=Y_0(z)\left\{\frac{1}{a\pi i}\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}\frac{c(x)}{[a(x)+ib(x)]Y_0^+(x)}\cot\frac{x-z}{a}dx+\frac{1}{a\pi}\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}\frac{c(x)dx}{[a(x)+ib(x)]Y_0^+(x)}\right\},\tag{8.52}$$

而(8.49),(8.51) 可改写成

$$\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}H(x)\cos 2j\theta\, dx=0,\quad j=0,1,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1;$$

$$\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}H(x)\sin 2j\theta\, dx=0,\quad j=1,2,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1,$$

其中

$$H(x)=\frac{c(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}}\exp\left\{-\frac{1}{2a\pi}\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}\Theta(t)\cot\frac{t-x}{a}dt\right\},\tag{8.53}$$

这里 $\Theta(t)$ 仍以(8.41) 给出. 由于

$$\theta=\arg\left(\tan\frac{x}{a}+i\right)=\arg\frac{\sin\frac{x}{a}+i\cos\frac{x}{a}}{\cos\frac{x}{a}}=\arg(ie^{-\frac{x}{a}i})=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{a},$$

故上述条件成为

$$\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}H(x)\cos\left(j\pi-\frac{2jx}{a}\right)dx=0,\quad j=0,1,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1;$$

$$\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}H(x)\sin\left(j\pi-\frac{2jx}{a}\right)dx=0,\quad j=1,2,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1.$$

它们显然等价于

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}} H(x)\cos\frac{2jx}{a}\,\mathrm{d}x = 0, \quad j = 0,1,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1;\\&\int_{-\frac{a\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}} H(x)\sin\frac{2jx}{a}\,\mathrm{d}x = 0, \quad j = 1,2,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1.\end{aligned}\right\} \tag{8.54}$$

这样，当$\kappa\leqslant -2$时，原 PH 问题(8.35) 当且仅当条件(8.54) 满足时(共有$-\kappa-1$个实线性无关条件) 有唯一解(8.52).

至此，问题已完全解决.

关于 PH 问题，蔡海涛[27] 中曾有(在更一般情况下) 简略的讨论.

习　题

1. 试根据本段结果，求解半平面中周期的 Dirichlet 问题. 即，已给一实函数$c(x)\in H$于X上，以$a\pi$为周期，求一在上半平面中的全纯函数$\Phi(z)$，也以$a\pi$为周期，且$\mathrm{Re}\Phi^{+}(x) = c(x)$.

2. 试不用(8.4) 而改用$\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2iz}{a}}$来改写本节内容.

2.9　双周期 Riemann 边值问题

2.9.1　椭圆函数

为了讨论双周期解析函数的边值问题，在此有必要介绍一下有关椭圆函数的最基本知识. 这在任何一本较详细的复变函数教程中都可找到；但为了引用方便，这里作最少要求的简介. 详情可参看[44]，第十一章.

设ω_1,ω_2为二复数，$\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\neq 0$. 复函数$f(z)$称为以$2\omega_1,2\omega_2$为周期的双周期函数，若适合条件

$$f(z+2\omega_j) = f(z), \quad j = 1,2. \tag{9.1}$$

显然$-2\omega_j$也是周期. 因此不失一般性，我们可永远假定$\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)>0$.

$$z' = z+2m\omega_1+2n\omega_2 \quad (m,n\text{ 均为整数})$$

称为与z周期合同的点，记为$z'\equiv z\ (\mathrm{mod}\ 2\omega_j)$. 由非周期合同点构成的最大的平行四边形称为周期四边形. 特别，例如，以$\pm\omega_1\pm\omega_2$为顶点的平行四边

形 P 称为**基本周期四边形或基本胞腔**.

若 $f(z)$ 在全平面解析，但可以有一些极点(即亚纯)，且以 $2\omega_j$ 为周期($j=1,2$，下同)，则称 $f(z)$ 为一**椭圆函数**. 由 Liouville 定理知，这样的 $f(z)$ 如果不是常数，则在 P 中不可能没有极点. 我们将设 $f(z)$ 在 P 的边界上没有极点和零点，因为否则的话，可把坐标系适当平移后就可达到目的. 也可证明，$f(z)$ 在 P 中也不可能只有一个单极点，因为，由双周期性，$f(z)$ 沿 P 的周界积分必须为零. 且可证明，$f(z)$ 在 P 中取任何值的点的个数包括极点的个数(重数都要计入个数中)均相同. 椭圆函数在 P 中极点的个数称为它的阶数. 因此，0 阶椭圆函数必为常数，不存在 1 阶椭圆函数，而非退化(为常数)的椭圆函数至少是二阶的.

函数

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum_{m,n}{}'\left(\frac{1}{z-\Omega_{mn}}+\frac{1}{\Omega_{mn}}+\frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right) \tag{9.2}$$

称为 **Weierstrass 的 ζ 函数**，其中 $\Omega_{mn}=2m\omega_1+2n\omega_2$，且 $\sum\limits_{m,n}{}'$ 表示对一切 $m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 相加，但 m,n 均 $=0$ 除外. $\zeta(z)$ 是一亚纯函数，以 Ω_{mn} (包括 $m=n=0$) 为单极点，且主部为 $1/(z-\Omega_{mn})$，但它不是双周期函数，而有

$$\zeta(z+2\omega_j)=\zeta(z)+2\eta_j,\quad j=1,2, \tag{9.3}$$

其中 $\eta_j=\zeta(\omega_j)$ 为常数，且有如下关系：

$$2\omega_2\eta_1-2\omega_1\eta_2=\pi\mathrm{i}. \tag{9.4}$$

此式可通过等式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\zeta(z)\mathrm{d}z=1$$

以及等式(9.3)证明，这里 Γ 是 P 的周界，取反时针向①. 又 $\zeta(z)$ 显然是奇函数.

下面定义的函数

$$\wp(z)=-\zeta'(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{m,n}{}'\left[\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right] \tag{9.5}$$

由(9.3)知已是双周期的，它是一个二阶椭圆函数，以 Ω_{mn} 为二阶极点，并以 $1/(z-\Omega_{mn})^2$ 为其主部. 它称为 **Weierstrass 的 $\wp$ 函数**. 它是偶函数. 由此，$\wp'(z)=\zeta''(z)$ 为三阶椭圆函数，它在 P 中有唯一三阶极点 $z=0$，等等.

另一个常用的函数是 σ 函数：

---

① 注意，如果 $\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)<0$，则(9.4)右边要变号.

$$\sigma(z)=z\prod_{m,n}{}'\left(1-\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)\exp\left\{\frac{z}{\Omega_{mn}}+\frac{z^2}{2\Omega_{mn}^2}\right\},\tag{9.6}$$

其中$\prod'$表示除 $m=n=0$ 外的无穷乘积. 它是一整函数，以 $z=\Omega_{mn}$ 为单零点. $\sigma(z)$ 与 $\zeta(z)$ 间有如下的关系：

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\zeta(z).\tag{9.7}$$

$\sigma(z)$ 也是一奇函数，但不是双周期的，而满足下列关系式：

$$\sigma(z+2\omega_j)=-\mathrm{e}^{2\eta_j(z+\omega_j)}\sigma(z),\quad j=1,2.\tag{9.8}$$

用 $\sigma(z)$ 可以构造出椭圆函数. 任何椭圆函数也可用 $\sigma(z)$ 表示. 设 $f(z)$ 为一 n 阶椭圆函数($n\geqslant 2$)，在 P 中以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为零点，以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为极点(诸 α_k 或 β_k 可有相同者). 易证

$$\sum_{k=1}^n\alpha_k-\sum_{k=1}^n\beta_k=2\mu\omega_1+2\nu\omega_2\quad(\mu,\nu\text{ 为整数}).$$

记 $\beta_n'=\beta_n+2\mu\omega_1+2\nu\omega_2$，则 $f(z)$ 必有下面形式：

$$f(z)=C\frac{\sigma(z-\alpha_1)\cdots\sigma(z-\alpha_{n-1})\sigma(z-\alpha_n)}{\sigma(z-\beta_1)\cdots\sigma(z-\beta_{n-1})\sigma(z-\beta_n')},\tag{9.9}$$

其中 C 为某一常数.

注 对于椭圆函数 $f(z)$，假定它在 P 的边界 Γ 上没有极点(或零点)实非必要. 如果按照 1.7.3 段中的观点来计数，例如，在 Γ 的一边(及其对边)上有一单极点，则只能算半个，而连同对边对应点算在一起仍为一个. 在 P 的顶点处有极点时也有类似结论.

2.9.2 双周期 Riemann 边值问题的提法与跳跃问题的解法

设 L_0 为基本胞腔 P 内部的一条光滑封闭曲线，且已取定反时针向为其正向(图 2-7). 设原点 O 位于 L_0 所围内域 S_0^+ 中，并记

$$S_0^-=P-\overline{S_0^+}.$$

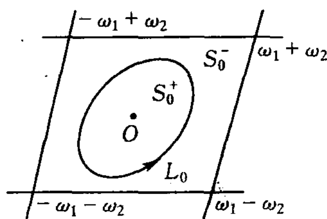


图 2-7

又记 S^+ 为 S_0^+ 及其所有周期合同区域的并，L 为 L_0 及其所有周期合同曲线之并，而 S^- 为$\overline{S^+}$ 的余域.

所谓**双周期 Riemann 边值问题**或简记为 **DR 问题**是：寻求一双周期分区解析函数 $\Phi(z)$，以 L 为跳跃曲线，且满足

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L,\tag{9.10}$$

其中$G(t),g(t)$为L上的双周期函数，$\in H$，且$G(t)\neq 0$. 此外，我们常允许$\Phi(z)$在$z=0$处至多有m阶，这时我们就说在DR_m中求解.

这一问题在[49]中早就研究过，但其结果在一般情况下并不正确. 下面的方法与结果是著者在[15]中得到的.

我们先来求解最简单的DR_m问题(跳跃问题)

$$\Phi^+(t)=\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L. \tag{9.11}$$

为了求解这一问题，关键是要有相当于Cauchy核的双周期核. 它应与$1/(t-z)$相类似，在$t=z$处有一阶极点且留数为1. 函数$\zeta(t-z)$有此性质，但不是双周期的. 为了保证双周期性，我们可改用$\zeta(t-z)+\zeta(z)$(其双周期性可由(9.3)立即验证)，但这时它另外在$z=0$处出现单极点. 这后一奇异性对于我们解决问题无大妨碍.

这样，对于问题(9.11)在DR_m中求解，可以分别讨论如下：

1° 设$m>0$. 令

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}g(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t,\quad z\,\overline{\in}\,L, \tag{9.12}$$

由

$$\zeta(t-z)=\frac{1}{t-z}+\zeta_0(t-z),$$

其中$\zeta_0(t-z)$当$z\in P$时已无奇异性，易见Plemelj公式仍成立：

$$\Psi^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}g(t_0)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}g(t)[\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0)]\mathrm{d}t,\quad t_0\in L. \tag{9.13}$$

由此立即可知

$$\Psi^+(t)-\Psi^-(t)=g(t),$$

从而$F(z)=\Phi(z)-\Psi(z)$是一双周期解析函数，不再以L为跳跃曲线. 注意到$\Psi(z)$在$z=0$处可能有一阶极点，而$m>0$，因此$F(z)$为一椭圆函数，至多为m阶的，且在P中极点只能在$z=0$处. 因此，如果$m=1$，$F(z)$必为一常数. 如果$m>1$，则易证$F(z)$必有下面形式：

$$F(z)=C_0+C_1\zeta'(z)+\cdots+C_{m-1}\zeta^{(m-1)}(z), \tag{9.14}$$

其中$C_0,C_1,\cdots,C_{m-1}$为任意(复)常数.

于是，当$m>0$时，DR_m问题(9.11)的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}g(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t+C_0+C_1\zeta'(z)+\cdots+C_{m-1}\zeta^{(m-1)}(z)\text{①}. \tag{9.15}$$

---

① 注意，当$m=1$时，$\zeta^{(0)}(z)$要理解为1而不是$\zeta(z)$.

2° 设$m=0$. 这时$F(z)$在$z=0$处至多有一阶极点，因此必退化为一常数，于是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}g(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt+C.$$

但我们要求$\Phi(0)$有限，这当且仅当

$$g^*=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}g(t)dt=0 \tag{9.16}$$

时才行. 这样，双周期DR_0问题(9.11)当且仅当(9.16)满足时才可解，且一般解为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}g(t)\zeta(t-z)dt+C, \tag{9.17}$$

这里C是任意常数.

3° 设$m<0$. 这时(9.16)仍为(9.11)在DR_m中可解的必要条件，且解也只可能以(9.17)的形式出现. 为了保证$\Phi(z)$在$z=0$处至少有$-m$阶零点，还必须且只须下列两条件成立：

$$C=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}g(t)\zeta(t)dt, \tag{9.18}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}g(t)\zeta^{(k)}(t)dt=0,\quad k=1,2,\cdots,-m-1 \tag{9.19}$$

(当$m=-1$时，条件(9.19)不存在).

于是，当$m<0$时，DR_m问题(9.11)当且仅当(9.16),(9.19)成立时才可解，且有唯一解

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}g(t)[\zeta(t-z)-\zeta(t)]dt. \tag{9.20}$$

所以，DR_m问题解的广义自由度为m.

2.9.3 一般 DR 边值问题的解法

我们现在来求解DR_m问题(9.10). 称

$$\kappa=\mathrm{Ind}_{L_0}G(t)=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_0} \tag{9.21}$$

为问题的指标. 作二阶椭圆函数

$$\mu(z)=\frac{\sigma(z)\sigma(z-\omega_1-\omega_2)}{\sigma(z-\omega_1)\sigma(z-\omega_2)}. \tag{9.22}$$

它在S_0^+内有唯一的一阶零点$z=0$而无极点，因此$\mathrm{Ind}_{L_0}\mu(t)=1$. 于是

$$G_*(t)=G(t)\mu^{-\kappa}(t) \tag{9.23}$$

在 L_0 上的指标为 0. 现在令

$$\Phi_*(z)=\begin{cases}\Phi(z)\mu^{-\kappa}(z), & 当 z\in S^+ 时;\\ \Phi(z), & 当 z\in S^- 时,\end{cases} \tag{9.24}$$

则 $\Phi_*(z)$ 是双周期的，分区解析的，但在 $z=0$ 处至多有 $\kappa+m$ 阶. 这时 (9.10) 成为

$$\Phi_*^+(t)=G_*(t)\Phi_*^-(t)+g_*(t),\quad t\in L, \tag{9.25}$$

这里已令 $g_*(t)=g(t)\mu^{-\kappa}(t)$. 记

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\log G_*(t)\cdot\zeta(t-z)\mathrm{d}t,\quad z\overline{\in}L, \tag{9.26}$$

$$X_*(z)=\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, \tag{9.27}$$

则有

$$X_*^+(t)=G_*(t)X_*^-(t).$$

但应注意，$X_*(z)$ 一般不是双周期的:

$$X_*(z+2\omega_j)=\mathrm{e}^{-2\eta_jG_*}X_*(z),\quad j=1,2,$$

这里已令

$$G_*=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\log G_*(t)\ \mathrm{d}t. \tag{9.28}$$

为了要改变 $X_*(z)$ 使其成为双周期的，令

$$h(z)=\frac{\sigma(z)}{\sigma(z-G_*)}. \tag{9.29}$$

易证

$$h(z+2\omega_j)=\mathrm{e}^{2\eta_jG_*}h(z),\quad j=1,2,$$

所以

$$X_1(z)=h(z)X_*(z)$$

已是双周期的，且仍有

$$X_1^+(t)=G_*(t)X_1^-(t).$$

这样，(9.10) 便成为

$$\frac{\Phi_*^+(t)}{X_1^+(t)}=\frac{\Phi_*^-(t)}{X_1^-(t)}+\frac{g_*(t)}{X_1^+(t)}. \tag{9.30}$$

以下分两种情况来讨论. 不失一般性，可认为 G_* 不在 L 上.

1° 设 G_* 等于某个周期:

$$G_*=2k_1\omega_1+2k_2\omega_2,$$

其中 k_1,k_2 为某二整数. 这时(可能相差一常数非零因子)

$$h(z)=\exp\{2(k_1\eta_1+k_2\eta_2)z\},$$

而 $X_1(z)$ 在 $z=0$ 处至多为零阶，所以 $F(z)=\dfrac{\Phi_*(z)}{X_1(z)}$ 分区解析、双周期，在 $z=0$ 处至多为 $\kappa+m$ 阶.

于是，由上段知，当 $\kappa+m>0$ 时，问题无条件可解，且一般解为

$$\Phi_*(z)=\frac{X_1(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_*(t)}{X_1^+(t)}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt$$
$$+X_1(z)[C_0+C_1\zeta'(z)+\cdots+C_{\kappa+m-1}\zeta^{(\kappa+m-1)}(z)],$$

其中 $C_0,C_1,\cdots,C_{\kappa+m-1}$ 为任意常数.

回到问题(9.10)，并改用记号

$$X(z)=\begin{cases}\mu^\kappa(z)h(z)e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in S^+ \text{ 时};\\ h(z)e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in S^- \text{ 时},\end{cases}\tag{9.31}$$

则 DR_m 问题(9.10) 的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt$$
$$+X(z)[C_0+C_1\zeta'(z)+\cdots+C_{\kappa+m-1}\zeta^{(\kappa+m-1)}(z)].\tag{9.32}$$

如果 $\kappa+m=0$ 或 -1，则 DR_m 问题(9.10) 的可解条件，由(9.16)，为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}dt=0;\tag{9.33}$$

当它满足时，若 $\kappa+m=0$，则其一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\zeta(t-z)dt+CX(z),\tag{9.34}$$

其中 C 为任意常数，而若 $\kappa+m=-1$，则问题有唯一解

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}[\zeta(t-z)-\zeta(t)]dt.\tag{9.35}$$

如果 $\kappa+m<-1$，则可解条件除(9.33) 外，还应添加

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\zeta^{(k)}(t)dt=0,\quad k=1,2,\cdots,-\kappa-m-1,\tag{9.36}$$

而这时 DR_m 问题(9.10) 有唯一解(9.35).

2° 设 G_* 不等于任何周期. 令 G_0 为基本胞腔 P 中(或其边界上) 的一点，与 G_* 周期合同者：

$$G_0\equiv G_*\pmod{2\omega_1,2\omega_2},$$

故 $G_0\neq 0$. 由(9.29) 定义的 $h(z)$ 在 P 中有唯一的一阶零点 $z=0$ 与唯一的一阶极点 $z=G_0$.

因此这时 $X_1(z)$ 仍为双周期的，其零点与极点在 P 中与 $h(z)$ 的相同，于

是(9.10) 仍化为(9.30). 这时 $F(z)=\dfrac{\Phi_*(z)}{X_1(z)}$ 在 $z=0$ 处为 $\kappa+m+1$ 阶的，且 $F(G_*)=F(G_0)=0$. 仍以(9.31) 定义 $X(z)$.

这样，当 $\kappa+m+1>0$ 时，我们有

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt$$
$$+X(z)[C_0+C_1\zeta'(z)+\cdots+C_{\kappa+m}\zeta^{(\kappa+m)}(z)];$$

但为了保证 $F(G_0)=0$ 即 $\Phi(G_0)$ 有限，必须且只须

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}[\zeta(t-G_0)+\zeta(G_0)]dt$$
$$+C_0+C_1\zeta'(G_0)+\cdots+C_{\kappa+m}\zeta^{(\kappa+m)}(G_0)=0.$$

因此，这时 DR_m 问题(9.10) 的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}[\zeta(t-z)+\zeta(z)-\zeta(t-G_0)$$
$$-\zeta(G_0)]dt+X(z)\{C_1[\zeta'(z)-\zeta'(G_0)]$$
$$+\cdots+C_{\kappa+m}[\zeta^{(\kappa+m)}(z)-\zeta^{(\kappa+m)}(G_0)]\},\tag{9.37}$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_{\kappa+m}$ 为任意常数.

当 $\kappa+m+1=0$ 时，可解条件仍为(9.33)，且解 $\Phi(z)$ 仍有(9.34)之形；但为了保证 $\Phi(G_0)$ 有限，还必须要求

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\zeta(t-G_0)dt+C=0.$$

亦即，DR_m 问题(9.10) 的可解条件仍为(9.33)，而当它满足时有唯一解

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}[\zeta(t-z)-\zeta(t-G_0)]dt.\tag{9.38}$$

当 $\kappa+m=-2$ 时，可解条件(9.33) 仍属必要，而且还须

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}[\zeta(t-G_0)-\zeta(t)]dt=0\tag{9.39}$$

时才能保证 $\Phi(G_0)$ 有限. 因此，这时 DR_m 问题(9.10) 的可解条件为(9.33) 与(9.39)，而当它们满足时，问题有唯一解(9.38)，或者一样，(9.35).

当 $\kappa+m<-2$ 时，除(9.33),(9.39) 外，可解条件还应添上

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\zeta^{(k)}(t)dt=0,\quad k=1,2,\cdots,-\kappa-m-2,\tag{9.40}$$

且这时问题有唯一解(9.38) 或即(9.35).

这样，在一切情况下完全解决了 DR_m 边值问题. 易于验证，DR_m 问题解的广义自由度为 $\kappa+m$.

习　题

1. 试证：在基本胞腔内只有唯一的 m 阶极点 $z=0$ $(m\geqslant 2)$ 的 m 阶椭圆函数必为下面形式：

$$C_0+C_1\zeta'(z)+\cdots+C_{m-1}\zeta^{(m-1)}(z),$$

其中 $C_0, C_1, \cdots, C_{m-1}$ 为某些常数[此题结果在正文中已用到].

2. 如果 $O\in S_0^-$，则本段中的讨论应如何修改?

3. 如果 DR_m 问题中允许的是 $\Phi(z)$ 在 P 中某点 z_0 处有 m 阶，则应如何求解?

4. 把本段中结果推广到 L_0 为有限条互不相交光滑封闭曲线的情形.

2.10　双准周期的 Riemann 边值问题

2.10.1　双准周期解析函数

我们可把上段中讨论的问题推广到双准周期的 Riemann 边值问题. 此问题是著者在[16] 中讨论的. 本段先叙述双准周期解析函数的一些性质.

若 $f(z)$ 为全平面中的单值解析函数，并满足条件

$$f(z+2\omega_j)=f(z)+\alpha_j,\quad j=1,2, \tag{10.1}$$

则称 $f(z)$ 为**加法双准周期解析函数**，而 α_1, α_2 称为它的加数. 如果 $f(z)$ 的奇点还只可能是极点，则称之为**加法准椭圆函数**.

同样，若把(10.1) 改为

$$f(z+2\omega_j)=\beta_j f(z),\quad \beta_j\neq 0,\ j=1,2, \tag{10.2}$$

则根据不同情况，称 $f(z)$ 为**乘法双准周期解析函数**或**乘法准椭圆函数**，而 β_1, β_2 称为其乘数.

准椭圆函数(加法的或乘法的) 在基本胞腔 P 中极点的阶数之和称为它的阶数. 下面讲述其一些性质.

对于加法双准周期解析函数，我们有

1° 设 $f(z)$ 是以 α_1, α_2 为加数的双准周期解析函数，以 $z=z_0$ (及其周期合同点) 为奇点，则必有下面形式：

$$f(z)=\lambda z+\mu\zeta(z-z_0)+E(z), \tag{10.3}$$

其中 $E(z)$ 为双周期解析函数，仍可能以 z_0 为奇点，这里

$$\lambda = \frac{1}{\pi i}(\alpha_2\eta_1 - \alpha_1\eta_2), \quad \mu = \frac{1}{\pi i}(\omega_2\alpha_1 - \omega_1\alpha_2). \tag{10.4}$$

2° 如上述 $f(z)$ 为 k 阶准椭圆函数，则(10.3)中的 $E(z)$ 为 k 阶或 $k-1$ 阶椭圆函数，且后一情况只可能出现在 z_0 为单极点时.

3° 如上述 $f(z)$ 为一阶准椭圆函数，且在 P 中以 z_0 为唯一单极点，则

$$f(z) = C + \lambda z + \mu\zeta(z - z_0) \quad (C\text{ 为常数}). \tag{10.5}$$

4° 如上述 $f(z)$ 没有奇点，则必 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$，且

$$f(z) = C + \lambda z \quad (C\text{ 为常数}), \tag{10.6}$$

其中 $\lambda = \frac{\alpha_j}{2\omega_j}$ $(j = 1,2)$. 因此，如果 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \neq \frac{\omega_2}{\omega_1}$，则 $f(z)$ 一定有奇点.

对于乘法双准周期解析函数，我们有

1) 如果 $f(z)$ 为 n 阶乘法准椭圆函数，以 β_1, β_2 为乘数，在 P 中以 z_1，$z_2, \cdots, z_n$（各个 z_k 可以其重数重复出现）为极点，则必

$$f(z) = \left[C_0 + \sum_{k=1}^{n-1} C_k \zeta^{(k)}(z - z_0)\right] \frac{\sigma^n(z - z_0)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \sigma(z - z_k)} e^{\lambda z}, \tag{10.7}$$

其中 $C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}$ 为某些常数，而

$$\lambda = \frac{1}{\pi i}(\gamma_2\eta_1 - \gamma_1\eta_2), \tag{10.8}$$

$$z_0 = \frac{1}{n\pi i}(\gamma_2\omega_1 - \gamma_1\omega_2) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k,$$

这里已记 $\gamma_j = \log\beta_j$ $(i = 1,2)$，且对数可以分别任意取定一值.

2) 设 $f(z) \not\equiv 0$ 是乘法准椭圆函数，以 β_1, β_2 为乘数，则 $f(z)$ 无奇点的必要充分条件是：可以适当选择对数分支 $\gamma_j = \log\beta_j$ 使得 $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$，且这时必有

$$f(z) = Ce^{\lambda z} \quad (C\text{ 为常数}), \tag{10.9}$$

其中 $\lambda = \frac{\gamma_j}{2\omega_j}$ $(j = 1,2)$.

3) $f(z)$ 同 2)，但不要求 $f(z) \not\equiv 0$. 如果 $f(z)$ 无奇点而有零点，则必恒等于零.

我们只来证明性质 2). 条件的充分性很明显. 下面证明其必要性. 令

$$z_0 = \frac{\gamma_2\omega_1 - \gamma_1\omega_2}{\pi i}, \quad \lambda = \frac{\gamma_2\eta_1 - \gamma_1\eta_2}{\pi i},$$

且已选定 $\gamma_j = \log\beta_j$ 使 $z_0 \in P$. 考虑函数

$$F(z) = f(z)e^{-\lambda z}\frac{\sigma(z)}{\sigma(z-z_0)}.$$

易于验证

$$F(z+2\omega_j) = \beta_j F(z)\exp\{-2\lambda\omega_j + 2\eta_j z_0\} = F(z), \quad j=1,2,$$

因此 $F(z)$ 为椭圆函数. 由假设条件, $F(z)$ 在 P 内至多在 $z=z_0$ 处有一单极点, 故必为常数. 因此,

$$f(z) = Ce^{\lambda z}\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z)}.$$

若 $z_0 \neq 0$, 则 $f(z)$ 将有极点 $z=0$, 不可; 故必 $z_0=0$. 于是(10.9)得证. 至于 $\lambda = \dfrac{\gamma_j}{2\omega_j}$ 则很容易验证.

我们可类似地定义分区全纯(或解析)的双准周期函数, 以 L 为跳跃曲线. 本节中关于 $L, L_0, S_0^{\pm}$ 等记号均同上节. 注意, 在 $S^{\pm}$ 中双准周期函数的加数或乘数可不相同.

2.10.2 加法双准周期的 R 问题

所谓**双准周期 Riemann 边值问题**, 简记为**QR 问题**, 仍同(9.10), 但其中出现的函数(已知的、未知的)都是双准周期的. 为讨论简便起见, 我们将在 QR_0 中求解, 即要求 $\Phi(z)$ 在 $S^{\pm}$ 内均无奇点. 但这不是本质的. 同样可讨论例如 QR_m 问题, 即要求 $\Phi(z)$ 在 $z=0$ 处有 m 阶.

本段先讨论加法的情况, 这时问题记为 **AQR_0 问题**. 这时易见, 除平凡情况(即双周期情况)外, $G(t)=G$ 只能是一常数, 亦即要求解 AQR_0 问题

$$\Phi^+(t) = G\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \tag{10.10}$$

其中常数 $G \neq 0$, $g(t) \in H$ 为准双周期的, 加数设为 g_1, g_2. 要求 $\Phi(z)$ 也是加法双准周期的, 并分区全纯.

不失一般性, 可认为 $G=1$, 因为否则的话, 可将 $G\Phi^-(z)$ 当做新的 $\Phi^-(z)$ (因为 $\Phi^+(z)$ 的加数可与 $\Phi^-(z)$ 的加数不一样).

我们用记号 $[z]_0$ 表示 z 关于模 $2\omega_1, 2\omega_2$ 在 P 中的合同点, 并记 $g([t]_0) = g_0(t)$, 则 $g_0(t)$ 是双周期的. 又若令

$$\Phi_0(z) = \begin{cases} \Phi^+(z) - mg_1 - ng_2, & \text{当 } z = [z]_0 + 2m\omega_1 + 2n\omega_2 \in S^+ \text{ 时;} \\ \Phi^-(z), & \text{当 } z \in S^- \text{ 时,} \end{cases}$$

则有

$$\Phi_0^+(t) = \Phi_0^-(t) + g_0(t), \quad t \in L,$$

且 $\Phi_0(z)$ 仍分区全纯, 是加法双准周期的. 这时显然 $\Phi_0^{\pm}(z)$ 的加数就相同了. 于是

$$\begin{aligned}\Psi_0(z) &= \Phi_0(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g_0(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t \\ &= \Phi_0(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

就不再有跳跃，无奇点，仍为双准周期的. 故由上段性质 4° 知，

$$\Psi_0(z) = C_0 + C_1 z,$$

其中 C_0, C_1 为任意常数. 于是最后得到

$$\Phi_0(z) = C_0 + C_1 z + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t, \quad z \overline{\in} L,$$

亦即

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_0 + mg_1 + ng_2 + C_1 z + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_0} g(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t, \\ \qquad\qquad \text{当 } z = [z]_0 + 2m\omega_1 + 2n\omega_2 \in S^+ \text{ 时}; \\ C_0 + C_1 z + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_0} g(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t, \quad \text{当 } z \in S^- \text{ 时}. \end{cases}$$

(10.11)

2.10.3 乘法双准周期的 R 问题

现在考虑问题(9.10)，其中 $G(t), g(t) \in H$，$G(t) \neq 0$. 它们都是乘法双准周期的，未知函数也是乘法双准周期的. 仍在 R_0 中求解. 此问题简记为 **MQR$_0$ 问题.**

求解此问题时，是设法将其化为双周期的 R 问题.

设 $G(t), g(t)$ 的乘数分别为 G_j, g_j $(j = 1,2)$. 记

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{\pi i}(\eta_2 \log G_1 - \eta_1 \log G_2), \\ Q &= \frac{1}{\pi i}(\omega_1 \log G_2 - \omega_2 \log G_1), \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

其中诸对数已各取定一确定值. 于是

$$G_0(t) = G(t)\exp\{Pt + Q\zeta(t)\} \tag{10.13}$$

就是双周期的，且仍 $\in H$. 如果再令

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & \text{当 } z \in S^+ \text{ 时}; \\ \Phi^-(z)\exp\{-Pz - Q\zeta(z)\}, & \text{当 } z \in S^- \text{ 时}, \end{cases} \tag{10.14}$$

则 $\Psi(z)$ 仍是乘法双准周期的分区全纯函数(注意 $O \in S^+$)，而(9.10) 成为

$$\Psi^+(t) = G_0(t)\Psi^-(t) + g(t), \quad t \in L. \tag{10.15}$$

先考虑齐次问题：$g(t) = 0$. 仍记

$$\kappa = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}[\log G_0(t)]_{L_0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}[\log G(t)]_{L_0}$$

为问题的指标. 如同 2.9.3 段中那样，令

$$G_*(t) = G_0(t)\mu^{-\kappa}(t),$$

其中 $\mu(t)$ 仍由(9.22) 定义，并记

$$\Psi_*(z) = \begin{cases} \Psi(z)\mu^{-\kappa}(z), & \text{当 } z \in S^+ \text{ 时；} \\ \Psi(z), & \text{当 } z \in S^- \text{ 时，} \end{cases} \tag{10.16}$$

则 $\Psi^+(t) = G_0(t)\Psi^-(t)$ 成为

$$\Psi_*^+(t) = G_*(t)\Psi_*^-(t), \quad t \in L,$$

而 $\Psi_*(z)$ 仍是乘法双准周期的，且在 $z = 0$ 处为 κ 阶. 再令

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0} \log G_*(t) \cdot \zeta(t-z)\mathrm{d}t, \quad X_*(z) = \mathrm{e}^{\Gamma(z)},$$

则 $\Psi_*(z)/X_*(z)$ 在 L 上已无跳跃，在 $z = 0$ 处仍有 κ 阶.

如果 $\kappa \geqslant 0$，则由前段性质 1) 知，

$$\Psi_*(z) = [C_0 + C_1\zeta'(z-z_0) + \cdots + C_{\kappa-1}\zeta^{(\kappa-1)}(z-z_0)] \cdot \frac{\sigma^\kappa(z-z_0)}{\sigma^\kappa(z)}\exp\{\lambda z + \Gamma(z)\}, \tag{10.17}$$

其中 $C_0, C_1, \cdots, C_{\kappa-1}, \lambda, z_0$ 均为任意常数($\kappa = 0$ 时括号[⋯]中是 C_0，和 $\kappa = 1$ 时一样). 由(10.17) 通过(10.16) 以及(10.14)，便得齐次 MQR_0 问题的一般解.

如果 $\kappa < 0$，则因 $\Psi_*(z)/X_*(z)$ 在 $z = 0$ 处有 $-\kappa$ 阶零点，故由前段性质 3)，必有 $\Psi_*(z) = 0$，从而原 MQR_0 问题只有零解.

现在考虑非齐次 MQR_0 问题(9.10) 或已约化了的(10.15). 设 $\Psi^\pm(z)$ 的乘数分别为 $\Psi_j^\pm$ $(j = 1,2)$，则由(10.15) 立刻知道

$$\Psi_j^+\Psi^+(t) = \Psi_j^- G_0(t)\Psi^-(t) + g_j g(t), \quad j = 1,2.$$

与(10.15) 比较，因 $g(t)$ 不恒为零，故矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Psi_1^+ & \Psi_1^- & g_1 \\ \Psi_2^+ & \Psi_2^- & g_2 \end{pmatrix}$$

必降秩. 如果其秩为 2，则必

$$\Psi^+(t) = \alpha g(t), \quad G_0(t)\Psi^-(t) = (\alpha - 1)g(t),$$

其中 α 为某常数. 这是平凡情况. 因此，如果不考虑这种平凡情况，则上面矩阵的秩为 1，于是 $\Psi_j^\pm = g_j (j = 1,2)$，即 $\Psi(z)$ 与 $g(t)$ 有相同的乘数.

定义 $\Psi_*(z), X_*(z)$ 如前，则(10.15) 成为

$$\frac{\Psi_*^+(t)}{X_*^+(t)} = \frac{\Psi_*^-(t)}{X_*^-(t)} + \frac{g_*(t)}{X_*^+(t)}, \quad t \in L, \tag{10.18}$$

其中已令

$$g_*(t) = g(t)\mu^{-\kappa}(t). \tag{10.19}$$

又令

$$\hat{G}_* = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \log G_*(t)\,dt, \tag{10.20}$$

则有

$$X_*(z+2\omega_j) = e^{-2\eta_j\hat{G}_*} X_*(z). \tag{10.21}$$

因此 $\Psi_*(z)/X_*(z)$ 的乘数为 $g_j e^{2\eta_j\hat{G}_*}$ $(j=1,2)$，且在 $z=0$ 处有 κ 阶. 引进二常数 α,β, 使

$$2\alpha\omega_j - 2\beta\eta_j = \log g_j, \quad j=1,2, \tag{10.22}$$

亦即

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\pi i}(\eta_1 \log g_2 - \eta_2 \log g_1), \\ \beta &= \frac{1}{\pi i}(\omega_1 \log g_2 - \omega_2 \log g_1), \end{aligned}\right\} \tag{10.22$'$}$$

其中 $\log g_j$ 已任意取定. 例如，不妨这样取它们，使 $\beta\in P$ (或在 P 的确定的两邻边上)，这样 α,β 便一意确定. 下面分两种情况讨论.

1) 设 $\hat{G}_* \not\equiv \beta \pmod{2\omega_j}$，下同). 我们令

$$\chi_*(z) = \frac{e^{\alpha' z}}{\sigma(\beta')}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{g_*(t)}{e^{\alpha' t}X_*^+(t)}\frac{\sigma(t-z+\beta')}{\sigma(t-z)}dt, \tag{10.23}$$

其中 α',β' 为待定常数，应选得使 $\chi_*(z)$ 也有乘数 $g_j e^{2\eta_j\hat{G}_*}$. 为此，由(10.22)$'$，不妨取

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta - \hat{G}_*.$$

这样，

$$\Omega_*(z) = \frac{\Psi_*(z)}{X_*(z)} - \chi_*(z)$$

已无跳跃，在 $z=0$ 处有 κ 阶，乘数为 $g_j e^{2\eta_j\hat{G}_*}$.

(a) 设 $\kappa>0$. 由前段性质 1)，应取 z_0 与 λ 使满足条件

$$2\lambda\omega_j - 2\eta_j(\kappa z_0 + \hat{G}_*) = \log g_j, \quad j=1,2;$$

与(10.22) 比较，可知应取

$$\lambda = \alpha, \quad z_0 = \frac{\beta - \hat{G}_*}{\kappa}.$$

这样，(10.15) 无条件可解，且一般解通过(10.16) 给出为

$$\Psi_*(z)=e^{\alpha z+\Gamma(z)}\left\{\left[C_0+\sum_{k=1}^{\kappa-1}C_k\zeta^{(k-1)}\left(z-\frac{\beta-\hat{G}_*}{\kappa}\right)\right]\frac{\sigma^\kappa\left(z-\frac{\beta-\hat{G}_*}{\kappa}\right)}{\sigma^\kappa(z)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sigma(\beta-\hat{G}_*)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_*(t)}{e^{\alpha t+\Gamma^+(t)}}\frac{\sigma(t-z+\beta-\hat{G}_*)}{\sigma(t-z)}dt\right\}. \quad (10.24)$$

(b) 设 $\kappa=0$. 现在 $\Omega_*(z)$ 在 $z=0$ 处无极点，故由前段性质 2)，必然 $\Omega_*(z)=Ce^{\lambda z}$. 如果 $C\neq 0$，则它是乘法双准周期的；由于其乘数应为 $g_je^{2\eta_j\hat{G}_*}$，故必可选定 λ 使

$$2\lambda\omega_j-2\eta_j\hat{G}_*=\log g_j,\quad j=1,2.$$

但与(10.22)′比较，可见 $\hat{G}_*\equiv\beta$，与假设相反. 因此 $\Omega_*(z)=0$. 所以这时有唯一解

$$\Psi_*(z)=\frac{e^{\alpha z+\Gamma(z)}}{\sigma(\beta-\hat{G}_*)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_*(t)}{e^{\alpha t+\Gamma^+(t)}}\frac{\sigma(t-z+\beta-\hat{G}_*)}{\sigma(t-z)}dt. \quad (10.25)$$

(c) 设 $\kappa<0$. 这时 $\Psi_*(z)/X_*(z)$ 在 $z=0$ 处有 $-\kappa$ 阶零点. 但 $\chi_*(0)$ 有限，因此 $\Omega_*(0)$ 也有限. 所以同上理，仍应有 $\Omega_*(z)=0$. 因而问题若有解则必唯一，且有(10.25) 之形. 但由于 $\Psi_*(z)$ 应在 $z=0$ 处有 $-\kappa$ 阶零点，故有下列可解条件：

$$\int_{L_0}\frac{g_*(t)}{e^{\alpha t+\Gamma^+(t)}}\left[\frac{\partial^r}{\partial z^r}\frac{\sigma(t-z+\beta-\hat{G}_*)}{\sigma(t-z)}\right]_{z=0}dt=0,$$

$$r=0,1,\cdots,-\kappa-1. \quad (10.26)$$

2) 设 $\hat{G}_*\equiv\beta$ (这里已包括了 $\Psi_*(z)/X_*(z)$ 已是双周期的情况，即 $g_j=e^{-2\eta_j\hat{G}_*}$ 的情况). 这时可先取 $\log z_j$ 使(10.22) 中的 $\beta=\hat{G}_*$. 因此

$$2\alpha\omega_j=\log z_j+2\eta_j\hat{G}_*. \quad (10.27)$$

易见 $e^{\alpha z}$ 的乘数就是 $g_je^{2\eta_j\hat{G}_*}$. 这样，不用(10.23) 而可改用

$$\chi_*(z)=\frac{e^{\alpha z}}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_*(t)}{e^{\alpha t}X_*^+(t)}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt. \quad (10.28)$$

(a) 设 $\kappa>0$. 这时 MQR_0 问题无条件可解，且一般解为

$$\Psi_*(z)=e^{\alpha z+\Gamma(z)}\left\{C_0+\sum_{k=1}^{\kappa-1}C_k\zeta^{(k)}(z)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_*(t)}{e^{\alpha t+\Gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\right\}dt. \quad (10.29)$$

(b) 设$\kappa=0$. 这时$\Omega_*(z)=\dfrac{\Psi_*(z)}{X_*(z)}-\chi_*(z)$必为$Ce^{\alpha z}$之形，其中$\chi_*(z)$由(10.28)给出. 但$\Psi_*(z)$不能有奇点，故有可解条件

$$\int_{L_0}\frac{g_*(t)}{e^{\alpha t+\Gamma^+(t)}}dt=0; \tag{10.30}$$

当它满足时，MQR_0 问题有一般解

$$\Psi_*(z)=e^{\alpha z+\Gamma(z)}\left[C+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_*(t)}{e^{\alpha t+\Gamma^+(t)}}\zeta(t-z)dt\right]. \tag{10.31}$$

(c) 设$\kappa<0$. 可解条件(10.30)仍属必要，且解必为(10.31)之形. 但因$\Psi_*(z)$在$z=0$处应有$-\kappa$阶零点，故除(10.30)外，可解条件还应有

$$\int_{L_0}\frac{g_*(t)}{e^{\alpha t+\Gamma^+(t)}}\zeta^{(k)}(t)dt=0,\quad k=1,2,\cdots,-\kappa-1; \tag{10.32}$$

且(10.31)中的常数C应取成

$$C=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_*(t)}{e^{\alpha t+\Gamma^+(t)}}\zeta(t)dt.$$

所以问题的可解条件为(10.30)与(10.32)，当它们满足时，问题有唯一解

$$\Psi_*(z)=\frac{e^{\alpha z+\Gamma(z)}}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_*(t)}{e^{\alpha t+\Gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)-\zeta(t)]dt. \tag{10.33}$$

最后通过(10.14),(10.16),(10.19)，就可得到所要的结果.

综上所述，我们得到

定理 2.10.1 非齐次 MQR_0 问题(9.10)，除平凡情况外，当$\kappa>0$时无条件可解，且一般解中含有κ个任意常数；当$\kappa<0$时，有$-\kappa$个可解条件，且这时有唯一解；当$\kappa=0$时，一般说来无条件可解且解唯一，但有一例外情况：$\hat{G}_*\equiv\beta$，这时有一个可解条件，且一般解中含有一个任意常数.

这就是说，MQR_0 问题解的广义自由度为κ.

习　题

1. 试讨论非齐次 QR_0 问题的平凡情况.

2. 试讨论 QR_{-1} 问题.

3. 若在本段所论问题中，要求$\Phi^{\pm}(z)$在$S^{\pm}$中有相同的加数或乘数，则会有怎样的结果?

4. 试作出单准周期 R_0 问题的讨论.

2.11 双周期解析函数 Dirichlet 问题

2.11.1 双周期解析函数的积分表示式

为了后面的需要，我们先给出双周期解析函数的一种积分表示式(本节内容参见[63]).

以下各节中一切记号，包括图 2-7，仍如 2.9.2 段.

已给 S^- 中的一个双周期解析函数$\Phi^-(z)$，其边值$\Phi^-(t) \in H$ $(t \in L)$，我们希望$\Phi^-(z)$ 有下列积分表示式：

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0} \mu(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t + A, \quad z \in S^-, \tag{11.1}$$

其中 $\zeta(z)$ 是 Weierstrass ζ 函数(定义见(9.2) 式)，$\mu(t)$ 是一实值函数，$\in H(L_0)$，而 A 是某复常数.

假设对某一个这种$\mu(t)$ 以及某常数A，表示式(11.1) 成立. 记(11.1) 右端的函数当 $z \in S^+$ 时为$\Phi^+(z)$，则由推广的 Plemelj 公式，

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \mu(t), \quad t \in L, \tag{11.2}$$

这里$\mu(t)$ 已在L上作双周期延拓. 所以，记$\Phi^-(t) = \mu(t) + \mathrm{i}v(t)$ 时，我们有

$$\mathrm{Re}[-\mathrm{i}\,\Phi^+(t)] = v(t), \quad t \in L. \tag{11.3}$$

因为 $v(t) = \mathrm{Im}\Phi^-(t) \in H$ 已知，所以，如果限定$t \in L_0$，则(11.3) 是 S_0^+ 内解析函数$-\mathrm{i}\,\Phi^+(z)$ 的 Dirichlet 问题. 不过要当心，现在$\Phi^+(z)$ 在 S_0^+ 内可能有一单极点 $z=0$. 因此，由[36]，§27，(11.3) 的一般解为

$$-\mathrm{i}\,\Phi^+(z) = (\boldsymbol{S}v)(z) - \mathrm{i}\beta_0 + C_1\omega(z) - \overline{C_1}\frac{1}{\omega(z)}, \tag{11.4}$$

其中β_0 是一任意实常数，C_1 是一任意复常数，$w=\omega(z)$ 是把 S_0^+ 保形映射到单位圆$|w|<1$ 且使 $\omega(0)=0$ $(\omega'(0)\neq 0)$ 的函数，而 $\boldsymbol{S}$ 是区域 S_0^+ 上的 Schwarz 算子(参看[36])：

$$(\boldsymbol{S}v)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{|L_0|}\frac{\partial M(z,t)}{\partial n}v(t)\mathrm{d}s, \quad z \in S_0^+, \tag{11.5}$$

S是L_0 上t处的弧长参数，$M(z,t)$ 是 S_0^+ 的复 Green 函数，n是L_0 在t_0 处朝向 S_0^+ 的法线方向，$|L_0|$是 L_0 的全长. (11.5) 是 S_0^+ 内的全纯函数，具有性质

$$(\boldsymbol{S}v)^+(t) = (\boldsymbol{S}v)(t),\ \mathrm{Re}[(\boldsymbol{S}v)(t)] = v(t), \quad t \in L_0, \tag{11.6}$$

亦即，$(Sv)(z)$ 是 S_0^+ 内其实部边值为 $v(t)$ 的解析函数 Dirichlet 问题的解. 注意 $\overline{\omega(t)} = \frac{1}{\omega(t)}$，故(11.4) 又可写成

$$\Phi^+(z) = \mathrm{i}(Sv)(z) + \beta_0 + \mathrm{Re}[C\omega(z)], \tag{11.7}$$

其中 C 是另一任意常数. 将(11.7) 代入(11.2) 中，便得

$$\mu(t) = \mu_0(t) + \beta_0 + \mathrm{Re}[C\omega(t)], \tag{11.8}$$

这里已令

$$\mu_0(t) = \mathrm{i}(Sv)(t) - \Phi^-(t) = -\mathrm{Im}\,(Sv)(t) - u(t). \tag{11.9}$$

于是，已给 $\Phi^-(z)$，如果表示式(11.1) 可能，则 $\mu(t)$ 必定是(11.8) 之形.

现在来证明，由(11.8) 中给出的 $\mu(t)$ 构成的函数

$$\Psi^-(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mu(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t, \quad z \in S^- \tag{11.10}$$

等于 $\Phi^-(z) - A$ (A 为某一复常数)，从而表示式(11.1) 确实成立，且 A 可以显式表出. 注意，在证明时，可限定(11.10) 中的 $z \in S_0^-$.

首先，我们有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t = 0, \quad z \in S^-, \tag{11.11}$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mathrm{Re}[C\omega(t)]\cdot[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t = 0, \quad z \in S^-. \tag{11.12}$$

(11.11) 显然，因为被积式作为 t 的函数在 S_0^+ 内全纯. 为要验证(11.12)，令

$$\omega(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \quad a_1 \neq 0.$$

由留数定理，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mathrm{Re}[C\omega(t)]\,\mathrm{d}t = \frac{C}{4\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)} = \frac{C}{2a_1};$$

另一方面，当 $z \in S^-$ 时，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mathrm{Re}[C\omega(t)]\cdot\zeta(t-z)\mathrm{d}t = \frac{C}{4\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{\zeta(t-z)}{\omega(t)}\mathrm{d}t = -\frac{\overline{C}}{2a_1}\zeta(z).$$

这就证实了(11.12).

因此，(11.10) 实际上可写成

$$\Psi^-(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mu_0(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t, \quad z \in S_0^-. \tag{11.13}$$

注意到 $(Sv)(t)$ 是 $(Sv)(z)$ 在 S_0^+ 中的边值，故有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}(Sv)(t)\mathrm{d}t = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}(Sv)(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t = 0, \quad z \in S^-,$$

因而，由(11.8)与(11.13)，得知

$$\Psi^-(z)=-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\Phi^-(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t,\quad z\in S_0^-.$$

记基本胞腔 S_0 的边界为 $\Gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$（如图 2-7 取正向）. 因 $\Phi^-(\tau)$ 作为 τ 的函数在 S^- 中为双周期的，故

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)\mathrm{d}\tau=0,$$

因而易于验证

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\Phi^-(t)\mathrm{d}t=0.$$

所以前面的等式可写成

$$\Psi^-(z)=-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\Phi^-(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t,\quad z\in S_0^-.\tag{11.14}$$

再由留数定理，得

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)\zeta(\tau-z)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\Phi^-(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t,\quad z\in S_0^-.$$

所以，(11.14) 可进一步改写为

$$\Psi^-(z)=\Phi^-(z)-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)\zeta(\tau-z)\mathrm{d}\tau,\quad z\in S_0^-.$$

这样，我们的目的是要验证

$$A=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)\zeta(\tau-z)\mathrm{d}\tau\quad(z\in S_0^-)$$

确实为与 z 无关的常数. 将此式中的积分分解为沿各个 γ_j 上的积分，并把沿 γ_3,γ_4 上的积分分别转换到 γ_1,γ_2 上，便知

$$A=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\Phi^-(\tau)[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau-z+2\omega_2)]\mathrm{d}\tau$$
$$+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\Phi^-(\tau)[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau-z+2\omega_1)]\mathrm{d}\tau.$$

由 $\zeta(z)$ 的性质(9.3)，立刻得知

$$A=\frac{\eta_1}{\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\Phi^-(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{\eta_2}{\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\Phi^-(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{11.15}$$

确为常数.

这样，我们有

定理 2.11.1 若 $\Phi^-(z)$ 在 S^- 中双周期全纯，且 $\Phi^-(t)=u+\mathrm{i}v\in H$ 于 L 上，则它可表示为(11.1)，其中 A 由 $\Phi^-(z)$ 一意确定，由(11.15) 给出，实函数 $\mu(t)$ 可由(11.8)，(11.9) 给出，其中 S 是 S_0^+ 中的 Schwarz 算子，

β_0 是一任意实常数，C 是任意复常数，而 $w=\omega_0(z)$ 是 S_0^- 保形变换到 $|w|<1$ $(\omega(0)=0)$ 的函数：$\mu(t)$ 中含 $\beta_0+\mathrm{Re}[C\omega(t)]$ 的项对表示式 (11.2) 不起作用.

这样，已给$\Phi^-(z)$，(11.1) 中的函数 $\mu(t)$ 并不唯一，而依赖于三个任意实常数.

积分表示式(11.1) 可用来解决双周期解析函数的 Dirichlet 问题，但它也有独立意义.

2.11.2 双周期 Dirichlet 问题

现在来考虑**双周期(解析函数)Dirichlet 问题**，简记为**DD 问题**，即：已给 L 上的一个实值双周期连续函数 $f(t)$，要求在 S^- 中的一双周期解析函数 $\Phi^-(z)$，使满足边值条件

$$\mathrm{Re}\,\Phi^-(t)=f(t),\quad t\in L. \tag{11.16}$$

我们恒设 L_0 为一 Lyapunov 曲线，$f(t)\in H$.

如果此问题有解$\Phi^-(z)$，则由定理 2.11.1，它可表示为

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mu(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t+A,\quad z\in S^- \tag{11.17}$$

(见(11.1)，这里右端已略去因子1/2，它已并入$\mu(t)$)，其中$A=\alpha+\mathrm{i}\beta$为一常数. 显然，β可以任意，而α则由$\Phi^-(z)$唯一确定. 于是，由推广的 Plemelj 公式

$$\Phi^-(t_0)=-\mu(t_0)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mu(t)[\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0)]\mathrm{d}t+A,$$
$$t_0\in L. \tag{11.18}$$

将其实部代入(11.16)，便得

$$-\mu(t_0)+\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mu(t)[\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0)]\mathrm{d}t\right\}=f(t_0)-\alpha,\quad t_0\in L_0.$$

将 $\zeta(t-t_0)$ 写成

$$\frac{1}{t-t_0}+\zeta_0(t-t_0),$$

这里 $\zeta_0(t-t_0)$ 已在 L_0 上正则，所以上述方程可写成具双层位势的积分方程(参看[42]，§61)：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}\mu&\equiv\mu(t_0)-\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(t)\frac{\cos(r,n)}{r}\mathrm{d}s-\frac{1}{\pi}\int_{L_0}k(t_0,t)\mu(t)\mathrm{d}s\\&=-f(t_0)+\alpha,\quad t_0\in L_0,\end{aligned}\tag{11.19}$$

其中 $r=|t-t_0|$，n 是 L_0 在 t 处的朝向 S_0^+ 的法线，(r,n) 是 n 与向量 $t-$ 间的夹角，而

$$k(t_0,t)=\operatorname{Im}\{[\zeta_0(t-t_0)+\zeta(t_0)]t'(s)\} \tag{11.20}$$

当 $t,t_0\in L_0$ 时 $\in H$. 根据[42]中所述性质，(11.19) 是一 Fredholm 积分方程.

先考虑齐次方程 $\boldsymbol{K}\mu=0$ 的求解. 设 $\mu_1(t)$ 是其一解. 定义

$$\Phi_1^-(z)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mu_1(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t,\quad z\in S^-. \tag{11.21}$$

如前所述，立刻知道 $\operatorname{Re}\Phi_1^-(t)=0$，$t\in L$. 由 S^- 中的最大模原理，得知 $\operatorname{Re}\Phi_1^-(z)=0$，$z\in S^-$，从而 $\Phi_1^-(z)=\mathrm{i}\gamma$ 是一纯虚常数. 又因 $(S\gamma)(t)$ 是一实常数，故由(11.8) 知，

$$\mu_1(t)=\beta_1+\operatorname{Re}[C\omega(t)],$$

其中 β_1 是一任意实常数，C 是一任意复常数.

所以我们有

定理 2.11.2 齐次方程 $\boldsymbol{K}\mu=0$ 有三个(在实系数域中) 线性无关的解

$$1,\ \operatorname{Re}\omega(t),\ \operatorname{Im}\omega(t), \tag{11.22}$$

其中 $\omega(t)$ 如定理 2.11.1 中所述.

根据 Fredholm 积分方程的一般理论(参看，例如，[64])，$\boldsymbol{K}\mu=0$ 的相联方程

$$\boldsymbol{K}'\nu\equiv\nu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\nu(t)\frac{\cos(r,n_0)}{r}\mathrm{d}s-\frac{1}{\pi}\int_{L_0}k(t,t_0)\nu(t)\mathrm{d}s=0 \tag{11.23}$$

(其中 n_0 是 L_0 在 t_0 处朝向 S_0^+ 的法线) 也有三个(实) 线性无关的解 $\nu_1(t)$，$\nu_2(t),\nu_3(t)$，且(11.19) 当且仅当下列条件满足时有解：

$$\int_{L_0}\nu_j(t)[f(t)-\alpha]\mathrm{d}s=0,\quad j=1,2,3. \tag{11.24}$$

注意，特别，当 $f(t)=1$，$\alpha=0$ 时，方程(11.19) 无解. 因为，设若它有一解 $\mu_1(t)$，则由(11.21) 定义的 $\Phi_1^-(z)$ 必有 $\operatorname{Re}\Phi_1^-(t)=1$，于是 $\Phi_1^-(z)=1+\mathrm{i}\gamma$. 另一方面，由定理 2.11.1，对于这个 $\Phi_1^-(z)$，如果表示为(11.17) 之形式，则必

$$\mu(t)=\beta_0+\operatorname{Re}[C\omega(t)]$$

且 $A=1+\mathrm{i}\gamma$，这与(11.21) 矛盾，根据这一事实，从(11.24) 得知，

$$\nu_j^*=\int_{L_0}\nu_j(t)\mathrm{d}s,\quad j=1,2,3$$

必不同时为0. 不妨设 $\nu_3^* \neq 0$. 我们可以把 $\nu_1(t)$,$\nu_2(t)$ 分别换作与 $\nu_3(t)$ 的线性组合，仍记为 $\nu_1(t)$,$\nu_2(t)$，使得 $\nu_1^* = \nu_2^* = 0$；我们还可把 $\nu_3(t)$ 除以 ν_3^*，仍得一个解，仍记为 $\nu_3(t)$，使得 $\nu_3^* = 1$. 这样得到的解不妨称为正规化了的. 利用它们，可解条件(11.24) 就成为

$$\int_{L_0} \nu_j(t) f(t) \mathrm{d}s = 0, \quad j = 1,2, \tag{11.25}$$

而

$$\alpha = \int_{L_0} \nu_3(t) f(t) \mathrm{d}s. \tag{11.26}$$

这样，原问题(11.16) 当且仅当(11.25) 满足时可解，且 α 由(11.26) 唯一确定.

于是我们得到

定理2.11.3 在 S^- 中的 DD 问题(11.16) 当且仅当(11.25) 满足时可解，其唯一解由(11.17) 给出，其中 $\mathrm{Re}\,A = \alpha$ 由(11.26) 确定，而 $\mu(t)$ 是(11.19) 的任一特解；在(11.25)，(11.26) 中的 $\nu_j(t)$ $(j = 1,2,3)$ 为(11.23) 的正规解组，满足条件

$$\int_{L_0} \nu_j(t) \mathrm{d}s = 0,\ j = 1,2;\quad \int_{L_0} \nu_3(t) \mathrm{d}s = 1.$$

以上解决了DD问题的求解，但我们限定 L_0 为 S_0 中一条封闭曲线. 如果把 L_0 改为 S_0 中一组互相外离的封闭曲线，即 S_0^- 是基本胞腔中挖掉若干洞的区域，则相应的 DD 问题一般无解. 这时我们可讨论所谓的双周期变态 Dirichlet 问题，见[65].

2.12 双准周期解析函数 Dirichlet 问题

12.1 加法双准周期 Dirichlet 问题

本节将讨论双准周期(解析函数) 的Dirichlet问题. 本段中先讨论**加法双准周期 Dirichlet 问题**，简记为**AQD 问题**(参看[66]). 它可表述如下：在 L_0 上给一实函数 $f(t) \in H$，求一个在 S^- 中的解析函数 $\Phi^-(z)$，具有加法双准周期性(简记为 **AQ 函数**)：

$$\Phi^-(z + 2\omega_j) = \Phi^-(z) + a_j, \quad j = 1,2 \tag{12.1}$$

(a_1, a_2 为二复常数)，满足边值条件

$$\mathrm{Re}\,\Phi^-(t) = f(t), \quad t \in L_0. \tag{12.2}$$

加数 a_1, a_2 可以事先指定或否，但必须先说明.

在讨论此问题之前，我们先建立一个有关 DD 问题的引理，它将在后面的讨论中起作用.

引理 2.12.1 设 $C \neq 0$ 是一复常数. 则 S^- 中的 DD 问题

$$\mathrm{Re}\,\Phi^-(t) = \mathrm{Re}(Ct), \quad t \in L_0 \tag{12.3}$$

无解.

注意(12.3)实际上是说：在(12.2)中，对于 $t \in L_0$，有 $f(t) = \mathrm{Re}(Ct)$，而对于 $t \in L$，$f(t)$ 等于其周期延拓而不再是 $\mathrm{Re}(Ct)$.

证 设若在 S^- 中存在这样的函数 $\Phi^-(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z)$，则

$$\Phi^-(t) = \alpha x + \beta y + \mathrm{i}v(t), \quad t = x + \mathrm{i}y \in L_0, \tag{12.4}$$

这里已记 $C = \alpha - \mathrm{i}\beta$ (α, β 不同时为零). 由于 L_0 是一 Lyapunov 曲线从而 $u'(t)$ 连续，故由解析函数边界性质的一些结果(参看[38]，第九章 §1，定理 2 与第十章 §1，定理 6)，可以证明，在 L_0 外侧靠近它的平准线 L_ε (即：L_ε 是圆周 $|w| = 1-\varepsilon$ 在映射 F 下的逆像，这里 F 是把 L_0 所围的外域保形变换到 $|w| < 1$ 上的映射使 $F(\infty) = 0$ 者) 上 $\frac{\partial t}{\partial s}$ 可连续延拓到 L_0 上的 $\frac{\partial u}{\partial s}$. 于是由 Cauchy-Riemann 方程与 Green 公式，

$$\left(\int_\Gamma - \int_{L_\varepsilon}\right) v \frac{\partial u}{\partial s}\mathrm{d}s = -\iint_{S_\varepsilon^-}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Γ 是 S_0 的边界，S_ε^- 是 L_ε 与 Γ 间所围的区域. 注意 u, v 是双周期的，令 $\varepsilon \to 0$ 求极限，便得

$$\int_{L_0} v\,\mathrm{d}u = \iint_{S_0^-}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 0. \tag{12.5}$$

另一方面，因为

$$\int_{L_0} \Phi^-(t)\mathrm{d}t = \int_\Gamma \Phi^-(\tau)\mathrm{d}\tau = 0,$$

易证

$$\int_{L_0} v(t)\mathrm{d}t = -\alpha\int_{L_0} x\,\mathrm{d}y + \beta\mathrm{i}\int_{L_0} y\,\mathrm{d}x = -(\alpha + \mathrm{i}\beta)|S_0^+|,$$

其中 $|S_0^+|$ 是 S_0^+ 的面积. 所以

$$\int_{L_0} v(t)\mathrm{d}x = -\alpha|S_0^+|, \quad \int_{L_0} v(t)\mathrm{d}y = -\beta|S_0^+|.$$

因此

$$\int_{L_0} v\,\mathrm{d}u = \alpha\int_{L_0} v\,\mathrm{d}x + \beta\int_{L_0} v\,\mathrm{d}y = -(\alpha^2+\beta^2)\,|S_0^+| < 0,$$

此与(12.5) 矛盾. □

在讨论 AQD 问题(12.2) 时，首先注意，在适当选择(复) 常数 A,B 后，令

$$\Psi^-(z) = \Phi^-(z) - \mathrm{Re}[A\zeta(z) + Bz], \quad z\in S^-, \tag{12.6}$$

使$\Psi^-(z)$成为S^-中的一个双周期解析函数(注意，$\zeta(z)$虽在$z=0$处有奇点，但它不在S_0^-中)，其中 A,B 与 a_1,a_2 有下列关系式：

$$A = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}(\omega_2 a_1 - \omega_1 a_2), \quad B = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}(a_2\eta_1 - a_1\eta_2), \tag{12.7}$$

或者，完全一样，由(9.4)，

$$a_j = 2(\eta_j A + \omega_j B), \quad j = 1,2, \tag{12.7$'$}$$

这样，S^-中$\Phi^-(z)$的AQD问题(12.2)就可转化为S^-中$\Psi^-(z)$的DD问题：

$$\mathrm{Re}\,\Psi^-(t) = f(t) - \mathrm{Re}[A\zeta(t) + Bt], \quad t\in L_0. \tag{12.8}$$

现在来求解 AQD 问题(12.2) 或 DD 问题(12.8). 分几种情况讨论.

(i) 设 a_1,a_2 未事先指定，从而常数 A,B 也未指定. 如果对 DD 问题(12.8) 求出了解$\Psi^-(z)$，则由(12.6)，问题(12.2) 的解由下式给出：

$$\Phi^-(z) = \Psi^-(z) + A\zeta(z) + Bz. \tag{12.9}$$

由定理 2.11.3，(12.8) 的可解条件(参照(11.25) 式) 为

$$\mathrm{Re}\int_{L_0}[A\zeta(t) + Bt]\nu_j(t)\,\mathrm{d}s = \int_{L_0} f(t)\nu_j(t)\,\mathrm{d}s, \quad j = 1,2. \tag{12.10}$$

记

$$\left.\begin{aligned} &\int_{L_0}\zeta(t)\nu_j(t)\,\mathrm{d}s = c_{j1},\\ &\int_{L_0} t\nu_j(t)\,\mathrm{d}s = c_{j2},\\ &\int_{L_0} f(t)\nu_j(t)\,\mathrm{d}s = \gamma_j,\end{aligned}\right\}\quad j = 1,2. \tag{12.11}$$

于是，$c_{jk}\ (j,k=1,2)$ 是与 $f(t)$ 无关的复常数，而 γ_j 是由 $f(t)$ 一意确定的实常数. 为要确定 A,B，就要求解线性方程组

$$c_{j1}A + c_{j2}B = \gamma_j + \mathrm{i}\delta_j, \quad j = 1,2, \tag{12.12}$$

其中 δ_1,δ_2 是两个待定实常数，应把它们适当选取使得(12.12) 可以对 A,B 求解. 一旦求得 A,B，则由定理 2.11.3，(12.8) 的唯一解由下式给出：

$$\Psi^{-}(z)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\mu(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t+\alpha+\mathrm{i}\beta,$$

其中 $\mu(t)$ 是方程

$$K\mu=-f(t)+\mathrm{Re}[A\zeta(t)+Bt]+\alpha$$

的任一解(且不论取哪个解，前式右端积分是同一函数)，且

$$\alpha=\int_{L_0}\{f(t)-\mathrm{Re}[A\zeta(t)+Bt]\}\nu_3(t)\mathrm{d}s,$$

而 β 为任意实常数，这里 K 为 Fredholm 算子，由(11.19)式左端定义.

在求解(12.12)之前，我们要证明另一引理：

引理 2.12.2 (12.11)式中的 c_{12},c_{22} 不同时为零.

证 设若 $c_{12}=c_{22}=0$，则当 $f(t)=0$ 从而 $\gamma_1=\gamma_2=0$ 时，若取 $\delta_1=\delta_2=0$，则方程组(12.12)将有一组解 $A=0$, $B=1$. 与(12.8)比较，这就表明 S^- 中的双周期解析函数 $\Psi^-(z)$ 的 Dirichlet 问题

$$\mathrm{Re}[\Psi^{-}(t)]=\mathrm{Re}(-t),\quad t\in L_0$$

可解，与引理 2.12.1 矛盾. □

不失一般性，我们设 $c_{22}\neq 0$. 令

$$\Delta=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}.$$

若 $\Delta\neq 0$，则任取 δ_1,δ_2，(12.12)对 A,B 恒唯一可解，这时 AQD 问题(12.2)恒可解，且一般解中含有两个任意实常数.

若 $\Delta=0$，则必存在一复常数 $k=\kappa_1+\mathrm{i}\kappa_2$，使得

$$c_{11}A+c_{12}B=k(c_{21}A+c_{22}B)$$

对任何 A,B 成立. 这样，(12.12)可改写为

$$\left.\begin{aligned}k(c_{21}A+c_{22}B)&=\gamma_1+\mathrm{i}\delta_1,\\ c_{21}A+c_{22}B&=\gamma_2+\mathrm{i}\delta_2.\end{aligned}\right\}\qquad(12.12)'$$

我们来证明 $\kappa_2\neq 0$. 设若不是这样，则 $k=\kappa_1$ 是一实常数. 那么，对于 $f(t)\equiv 0$ (从而 $\gamma_1=\gamma_2=0$) 以及任取的 $\delta_2\neq 0$，我们得到 $A=0$, $B=\dfrac{\mathrm{i}\delta_2}{c_{22}}$ 是(12.12)′中第二个方程的一组解. 于是，若再取 $\delta_1=k\delta_2$，则它们也是第一个方程的解. 因此，S^- 中的 DD 问题

$$\mathrm{Re}\,\Psi^{-}(t)=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{i}\delta_2 t}{c_{22}}\right),\quad t\in L_0\qquad(12.13)$$

可解，这与引理 2.12.1 矛盾. 这样，得知 $\kappa_2\neq 0$.

为要在这种情况下求解(12.12)′，必须取 δ_1,δ_2 使得

$$k(\gamma_2 + \mathrm{i}\delta_2) = \gamma_1 + \mathrm{i}\delta_1,$$

亦即

$$\kappa_1\gamma_2 - \kappa_2\delta_2 = \gamma_1, \quad \kappa_1\delta_2 + \kappa_2\gamma_2 = \delta_1. \tag{12.14}$$

当 $f(t)$ 已给从而 γ_1,γ_2 已知时，因 $\kappa_2 \neq 0$，故 δ_1,δ_2 可由(12.14) 一意确定. 于是(12.12)′ 的解为

$$B = \frac{1}{c_{22}}(\gamma_2 + \mathrm{i}\delta_2 - c_{21}A), \tag{12.15}$$

而 $A = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$ 可以任意. 因此得知，AQD 问题(12.2) 的一般解中仍含有两个任意实常数 α_1,α_2.

这样，我们证得

定理 2.12.1 当加数 a_1,a_2 未事先指定时，AQD 问题(12.2) 恒可解，且一般解中含有两个任意实常数.

(ii) 设

$$\mathrm{Re}\, a_j = \varepsilon_j, \quad j = 1,2 \tag{12.16}$$

已事先指定. 换句话说，已设 $\mathrm{Re}\Phi^-(t) = f(t)$ 双准周期也给出于 L 上:

$$f(t + 2\omega_j) = f(t) + \varepsilon_j, \quad j = 1,2, \ t \in L.$$

当 $\Delta \neq 0$ 时，如(i)中的讨论知: A,B 是 $\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2$ 的齐次线性函数，以令 $A = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$，$B = \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 将是 $\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2$ 的实线组合，这些组合的系数是与 $f(t)$ 无关的实常数. 另一方面，在(2.7)′ 两端实部，便得 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的实线性组合. 因此，可以写

$$\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix} + \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}, \tag{12.17}$$

中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 是 2×2 实常数矩阵，其各个元与 $f(t)$ 无关. 今证 $\det \boldsymbol{P} \neq 0$. 当 $t) \equiv 0$ 从而 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 并给定 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ 时，我们的问题成为 S^- 中 (z) 的 AQD 问题

$$\mathrm{Re}\Phi^-(t) = 0, \quad t \in L_0,$$

已知 $\mathrm{Re}\Phi^-(z + 2\omega_j) = \mathrm{Re}\Phi^-(z)$ $(j = 1,2)$. 所以 $\mathrm{Re}\Phi^-(z)$ 是 S^- 中一个上具有零边值的双周期调和函数. 由最大模原理，可知在 S^- 中 $\Phi^-(z) \equiv 0$. 因此，在 S^- 中 $\Phi^-(z) \equiv \mathrm{i}\lambda$ 是一纯虚数. 这样，$\Phi^-(z)$ 本身已周期的. 因此，一定有 $a_1 = a_2 = 0$. 于是由(2.7)，$A = B = 0$; 再由12) 便知 $\delta_1 = \delta_2 = 0$. 这样，相应于(12.17) 的齐次方程只有平凡解. 这明了我们的论断. 因而(12.12) 对任意的 γ_1,γ_2 以及给定的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 一意可解.

若$\Delta=0$，则由(12.14)，δ_1,δ_2是γ_1,γ_2的实线性组合，再由(12.15)，便知β_1,β_2是$\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2$的实线性组合. 于是可以写

$$\boldsymbol{R}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}+\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}, \tag{12.18}$$

其中$\boldsymbol{R},\boldsymbol{S}$也是$2\times 2$矩阵，与上面讲的为同种类型. 如前同样推理，可证$\det\boldsymbol{R}\neq 0$. 所以(12.18)对任意的$\gamma_1,\gamma_2$以及$\varepsilon_1,\varepsilon_2$也一意可解.

这样我们得到

定理2.12.2 当加数的实部$\mathrm{Re}\,a_j\ (j=1,2)$事先指定时，AQD问题(12.2)恒唯一可解.

(iii) 设a_1,a_2都事先指定. 因为如前所述，A,B可一意地由γ_1,γ_2与$\mathrm{Re}a_1,\mathrm{Re}a_2$确定，故由(12.7)知，当且仅当下列两个实的条件

$$\mathrm{Im}\,a_j=\mathrm{Im}(\eta_j A+\omega_j B),\quad j=1,2 \tag{12.19}$$

满足时，我们的AQD问题(唯一)可解. (12.19)实际上是间接地加于$f(t)$上的两个条件.

因此我们有

定理2.12.3 当加数a_1,a_2事先指定时，AQD问题(12.2)当且仅当$f(t)$满足两个(实)可解条件时(唯一)可解.

2.12.2 乘法双准周期的齐次 Dirichlet 问题

我们将讨论乘法双准周期的Dirichlet问题，简记为MQD问题，即：求S^-中的一乘法双准周期解析函数(简记为MQ函数)$\Phi^-(z)$，其乘数为β_1,β_2：

$$\Phi(z+2\omega_j)=\beta_j\Phi^-(z),\quad \beta_j\neq 0,\ j=1,2,\ z\in S^-, \tag{12.20}$$

使满足边值条件

$$\mathrm{Re}\Phi^-(t)=f(t),\quad t\in L_0, \tag{12.21}$$

其中$f(t)\in H$已给于L_0上. 我们以后还恒假定β_1,β_2是实数，以便$f(t)$易于在L上延拓：

$$f(t+2\omega_j)=\beta_j f(t),\quad t\in L. \tag{12.22}$$

且设β_1,β_2不同时为1，因为否则的话，(12.21)就成为DD问题了.

本段将先讨论齐次问题($f(t)\equiv 0$)，记为MQD_0问题：

$$\mathrm{Re}\Phi^-(t)=0,\quad t\in L_0 \tag{12.23}$$

(自然此式当$t\in L$时也成立).

我们知道，如果$\Phi^-(z)$ 是双周期的，由最大模原理，立即知道$\Phi^-(z)$ 是一纯虚常数. 此结论对 MQ 函数$\Phi^-(z)$ 就不能成立，因为这时$\Phi^-(z)$ 在S^- 中一般无界，最大模原理失效. 事实上，(12.23) 也的确可能存在非平凡解的情况(本段内容可参看[67]).

我们可以证明下面的

定理 2.12.4 在β_1, β_2 都事先指定时，齐次 MQD_0 问题(12.23) 或者只有零解；或者有唯一的非零解(允许有一个任意实常数系数)，且它根本无零点.

证 设此问题有一个非零解 $f(z)$，$z \in S^-$. 我们来证明：$f(z)$ 在整个闭区域$\overline{S^-}$ 上没有零点.

为此，将 L_0 所围的外域用 $z = \varphi(w)$ 保形映射到单位圆周 l：$|w| = 1$ 的外域，并使无穷远点不变. 于是，$f(\varphi(w)) = F(w)$ 在$|w| > 1$ 中边界 l 附近全纯，且在 l 上其实部为零. 可见 $F(w)$ 可解析延拓到$|w| < 1$ 的边界 l 附近，于是 $F(w)$ 在 l 上解析. 由此可见，如果 $F(w)$ 在 l 上有零点，其阶数必为正整数，且个数有限. 设其总数(连同阶数计算在内) 为 M.

基本胞腔 S_0 的边界 Γ 与 L_0 之间所围区域 S_0^- 在映照 $z = \varphi(w)$ 之下为单位圆周 l 和 Γ 的原像 γ 之间所围区域的像. 设 $F(w)$ 在这区域中零点的总数(连同阶数计算) 为 N. 不失一般性，可以认为 $f(z)$ 在 Γ 上无零点，于是 $F(w)$ 在 γ 上也无零点.

由推广的辐角原理(见第一章(7.22) 式) 知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l+\gamma} \frac{F'(w)}{F(w)} dw = \frac{1}{2}M + N. \tag{12.24}$$

但显然

$$\int_{\gamma} \frac{F'(w)}{F(w)} dw = \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

而 $f'(z)/f(z)$ 已是双周期的，所以此积分等于零.

另一方面，如果在 l 上 $F(w)$ 的每一零点前后各去掉一段充分小弧长 ε 后余下的部分记为 l_ε，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l} \frac{F'(w)}{F(w)} dw = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{l_\varepsilon} d \log F(w). \tag{12.25}$$

在 l_ε 的每一弧段上，$F(w) \neq 0$，而其实部为 0，因此其虚部不变号. 这样，$\arg F(w)$ 在其上为一常数值. 由此可知，(12.25) 左边的积分实部必为零. 再从(12.24) 立即可知 $M = N = 0$. 这就证明了 $F(w)$ 在 l 和 γ 间所围的闭区域上没有零点，从而也证明了 $f(z)$ 在$\overline{S^-}$ 上没有零点.

今若 $g(z)$ 又是原问题的一个非零解，则可知 $g(z)/f(z)$ 是 S^- 中的双周期全纯函数，且易见其虚部在 L 上恒等于零，故必为一实常数. 这样，原问题的一般解为$\Phi^-(z) = kf(z)$，其中 k 为一任意实常数. □

我们现在要问：β_1,β_2 要满足怎样的条件，才能使原问题有非零解? $f(z)$ 为原问题的一非零解(并不妨设 $\mathrm{Im}\, f(t) > 0$ 于 L 上) 当且仅当 $\psi(z) =$ $\log[-\mathrm{i}f(z)]$ (取定一分支) 是以 $a_j = \log\beta_j$ $(j = 1,2)$ 为加数(其中对数为某二确定值，不同时为零) 的 AQD_0 问题

$$\mathrm{Re}[\mathrm{i}\psi(t)] = 0, \quad t \in L_0 \tag{12.26}$$

的解. 注意，虽然 β_j 为实数，a_j 仍可为复数；一般，应允许

$$a_j = \log\beta_j = \begin{cases} \ln|\beta_j| + 2k_j\pi\mathrm{i}, & \text{当 } \beta_j > 0; \\ \ln|\beta_j| + (2k_j+1)\pi\mathrm{i}, & \text{当 } \beta_j < 0, \end{cases} \tag{12.27}$$

这里 $\ln|\beta_j|$ 已取定为实值，k_j 为整数. 记

$$A = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}(\omega_2 a_1 - \omega_1 a_2), \quad B = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}(a_2\eta_1 - a_1\eta_2),$$

则由(12.12) 知(现在 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$)，问题(12.26) 的可解条件为

$$\mathrm{Re}(c_{11}A + c_{12}B) = \mathrm{Re}(c_{21}A + c_{22}B) = 0, \tag{12.28}$$

其中 c_{jk} $(j,k=1,2)$ 为只与 S^- 的形状有关而与β_j 或a_j 无关的复常数. 因此，原问题的可解条件为

$$\mathrm{Im}(c'_{11}\log\beta_1 + c'_{12}\log\beta_2) = \mathrm{Im}(c'_{21}\log\beta_1 + c'_{22}\log\beta_2) = 0, \tag{12.29}$$

其中已令

$$\begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} \\ c'_{21} & c'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 & -\omega_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix}.$$

根据以上讨论，我们得到

定理2.12.5 在β_1,β_2 都事先指定时，AQD_0 问题(12.23) 有非零解的充要条件是：可以在(12.27) 中适当选择 k_1,k_2，使得满足两个实的条件(12.29).

在[67] 中举出了实例，说明确实有(12.23) 存在非零解的情况.

下面来讨论当乘数 β_1,β_2 不事先指定的情况.

这时，在(12.27) 中取定 k_1,k_2，然后求解(12.29)，便可得出一组 $\ln|\beta_1|,\ln|\beta_2|$，从而获得原问题的一个解. 为了说明这种情况下一般解的结构，我们进行如下讨论.

先在(12.27) 中取定 $k_1 = 1$，$k_2 = 0$. 这时，对于 AQD_0 问题(12.26) 来

说，相当于已给定 a_1, a_2 的虚部，故由定理 2.12.2 知，可以求出唯一的一组实数 $\ln|\beta_1'|, \ln|\beta_2'|$ 使(12.28)或即(12.29)成立，且这时 AQD_0 问题(12.26)有唯一解 $\psi_1(z)$（可相差一任意实常数项）. 对于原 MQD_0 问题(12.23)而言，这时有唯一解(可相差一任意实常数因子)

$$f_1(z) = \mathrm{i}\exp\{\psi_1(z)\}.$$

其乘数为 $\beta_1 = -|\beta_1'|, \beta_2 = |\beta_2'|$.

同样，在(12.27)中取 $k_1 = 0$，$k_2 = 1$，则又可得(12.29)的唯一解组 $\ln|\beta''_1|, \ln|\beta''_2|$，相应的 AQD_0 问题有唯一解 $\psi_2(z)$，而原问题有唯一解

$$f_2(z) = \mathrm{i}\exp\{\psi_2(z)\},$$

其乘数为 $\beta_1 = |\beta_1''|, \beta_2 = -|\beta_2''|$.

因此，原问题的一般解为

$$\Phi^-(z) = D\,\mathrm{i}\exp\{k_1\psi_1(z) + k_2\psi_2(z)\}, \tag{12.30}$$

其中 k_1, k_2 为任意整数，D 为一任意实常数；这时，乘数为

$$\beta_1 = (-1)^{k_1}|\beta_1'|^{k_1}|\beta_1''|^{k_2}, \quad \beta_2 = (-1)^{k_2}|\beta_2'|^{k_1}|\beta_2''|^{k_2}. \tag{12.31}$$

因此，我们有

定理 2.12.6 齐次 MQD_0 问题(12.23)，如果对 $\Phi^-(z)$ 的乘数不事先指定，则恒可解，且其一般解由(12.30)给出，其中除显然有一任意实常数因子外，还依赖于两个独立的整数，而 $\Phi^-(z)$ 的乘数也依赖于这两个整数.

2.12.3 乘法双准周期解析函数的积分表示式

在 2.11.1 段中我们曾给出双周期解析函数的积分表示式. 由此出发，乘上一个适当因子，就容易得到 MQ 函数的一个积分表示式(参看[68])；但它对我们以后的讨论并不适用. 我们将导出它的另一种积分表示法(本段以及下节内容，均取自[68]).

设 $\Phi^-(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z)$ 是 S^- 中一个 MQ 函数，其乘数为 b_1, b_2：

$$\Phi^-(z + 2\omega_j) = b_j\Phi^-(z), \quad b_j \neq 0,\ j = 1,2 \tag{12.32}$$

(我们暂不限定 b_1, b_2 为实数).

对 $\log b_1$ 与 $\log b_2$ 各取一确定值. 定义二(复)常数 λ, z_0，使满足

$$2\omega_j\lambda - 2\eta_j z_0 = \log b_j, \quad j = 1,2. \tag{12.33}$$

由(9.4)，λ 与 z_0 是一意确定的. 为确定起见，我们要求 $z_0 \in S_0$，当适当取定 $\log b_j (j = 1,2)$ 时，这一定可以做到. 注意，λ 与 z_0 一般说来都是复常数，即使 b_1, b_2 为实数时也是如此.

以下分两种情况讨论.

(ⅰ) $z_0=0$. 这时，对适当选择的 $\log b_1,\log b_2$，下式成立：

$$\omega_2\log b_1=\omega_1\log b_2; \tag{12.33$'$}$$

且整函数 $e^{\lambda z}$ 是乘法双准周期的，也以 b_1,b_2 为乘数.

(ⅱ) $z_0\neq 0$. 令

$$q(z)=e^{\lambda z}\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z)}. \tag{12.34}$$

它是以 b_1,b_2 为乘数的MQ函数，它在 S^- 内全纯(虽然 $z=0\in S_0^+$ 是其单极点)，在 S_0^- 内有唯一的单零点.

我们要证明

定理2.12.7 如果(12.33)$'$对某一组 $\log b_1$ 和 $\log b_2$ 成立，则 S^- 中MQ函数 $\Phi^-(z)$ (具边值 $\Phi^-(t)\in H$) 有下列积分表示式：

$$\Phi^-(z)=e^{\lambda z}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu(t)e^{-\lambda t}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt+A\right\},$$

$$z\in S^-, \tag{12.35}$$

其中 $\mu(t)\in H$ 是 L_0 上的一实函数，除一项 $\beta_0+\mathrm{Re}[C\omega(t)]$ 外一意确定，这里 β_0 与 C 分别为任意的实与复常数，$\omega(z)$ 同2.11.1段中所述，而 A 是由 $\Phi^-(z)$ 唯一确定的常数.

证 暂设存在 $\mu(t)\in H$ 于 L_0 上以及常数 A 使(12.35)成立. 将此式右端的函数当 $z\in S_0^+$ 时记为 $\Phi^+(z)$，它在 $z=0$ 处一般有一单极点. 由Plemelj公式，

$$\Phi^\pm(t_0)=\pm\frac{1}{2}\mu(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu(t)e^{-\lambda(t-t_0)}[\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0)]dt$$
$$+Ae^{\lambda t_0},\quad t_0\in L_0. \tag{12.36}$$

与2.12.1段中相同推理，可知

$$\Phi^+(t)=i(\boldsymbol{S}v)(t)+\beta_0+\mathrm{Re}[C\omega(t)], \tag{12.37}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 是 S_0^+ 的Schwarz算子：$(\boldsymbol{S}v)(z)$ 在 S_0^+ 内全纯且具性质

$$\mathrm{Re}[(\boldsymbol{S}v)(t)]=v(t),\ (\boldsymbol{S}v)^+(t)=(\boldsymbol{S}v)(t),\quad t\in L_0,$$

而 β_0,C 为如定理中描述的常数. 此外，记

$$\mu(t)=\mu_0(t)+\beta_0+\mathrm{Re}[C\omega(t)],\quad t\in L_0, \tag{12.38}$$

其中

$$\mu_0(t)=i(\boldsymbol{S}v)(t)-\Phi^-(t)=-\mathrm{Im}[(\boldsymbol{S}v)(t)]-u(t) \tag{12.39}$$

由 $\Phi^-(t)$ 唯一确定. 这样，如果前述表示式成立，则 $\mu(t)$ 必为(12.38)之形.

易见$\beta_0+\mathrm{Re}[C\omega(t)]$不影响其中的积分值.

令

$$\Psi^-(z)=\frac{e^{\lambda z}}{2\pi i}\int_{L_0}\mu_0(t)e^{-\lambda t}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt,\quad z\in S^-.$$

将(12.39)代入，立得

$$\Psi^-(z)=-\frac{e^{\lambda z}}{2\pi i}\int_{L_0}\Phi^-(z)e^{-\lambda t}\zeta(t-z)dt$$

$$=\Phi^-(z)-\frac{e^{\lambda z}}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)e^{-\lambda\tau}\zeta(\tau-z)d\tau,\quad z\in S_0^-,$$

其中Γ为S_0^+的(正向)边界. 我们要证明

$$A=e^{-\lambda z}[\Phi^-(z)-\Psi^-(z)]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)e^{-\lambda\tau}\zeta(\tau-z)d\tau,\quad z\in S_0^-$$

实际上是一常数. 事实上，利用$e^{-\lambda z}\Phi^-(z)$的双周期性，易见

$$A=\frac{\eta_1}{\pi i}\int_{\gamma_2}e^{-\lambda\tau}\Phi^-(\tau)d\tau-\frac{\eta_2}{\pi i}\int_{\gamma_1}e^{-\lambda\tau}\Phi^-(\tau)d\tau,\tag{12.40}$$

其中γ_1,γ_2如图 2-7 中所示. □

$z_0\neq0$时，亦即等式(12.33)′不成立. 我们有

定理2.12.8 如果(12.33)′对任何$\log b_1,\log b_2$的选取总不成立，则S^-中的MQ函数$\Phi^-(z)$可表示为

$$\Phi^-(z)=\frac{e^{\lambda z}}{\sigma(z_0)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu(t)\,e^{-\lambda t}\frac{\sigma(t-z+z_0)}{\sigma(t-z)}dt,\quad z\in S^-,\tag{12.41}$$

其中$\mu(t)\in H$为一实函数，除去一个常数项β_0外，由$\Phi^-(z)$唯一确定.

证 设(12.41)对某一$\mu(t)\in H$成立. 再把其右端定义为$\Phi^+(z)$，$z\in S_0^+$. 则有

$$\Phi^\pm(t)=\pm\frac{1}{2}\mu(t_0)+\frac{e^{\lambda t_0}}{\sigma(t_0)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu(t)\,e^{-\lambda t}\frac{\sigma(t-t_0+z_0)}{\sigma(t-t_0)}dt,$$

$$t_0\in L_0.\tag{12.42}$$

与前同样推理，但要注意现在$\Phi^+(z)$在S_0^+内全纯，代替(12.38)，我们有

$$\mu(t)=\mu(t_0)+\beta_0,\tag{12.43}$$

这里β_0又是一实常数，而$\mu_0(t)$仍以(12.39)给出. β_0不影响(12.41)中积分的值.

我们必须证明

$$\Phi^-(z) = \frac{e^{\lambda z}}{\sigma(z_0)} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu_0(t)\, e^{-\lambda t}\frac{\sigma(t-z+z_0)}{\sigma(t-z)}dt, \quad z \in S^-. \quad (12.4$$

将(12.39)代入此式，可以看出它等价于

$$\Phi^-(z) = -\frac{e^{\lambda z}}{\sigma(z_0)} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\Phi^-(t)\, e^{-\lambda t}\frac{\sigma(t-z+z_0)}{\sigma(t-z)}dt, \quad z \in S^-.$$

当固定任意 $z \in S_0^-$，式中被积式作为 t 的函数是双周期的，在 S^- 中解析，但在 S_0^- 中以 $t=z$ 为单极点. 所以它沿 Γ 的积分必等于零. 因此，在 S_0^- 中应用留数定理，上面等式对 $z \in S_0^-$ 成立，因而对 $z \in S^-$ 也成立. 这就是说(12.44)成立. □

2.12.4 乘法双准周期的非齐次 Dirichlet 问题

现在来讨论一般的 MQD 问题：要求一个在 S^- 中的乘法双准周期函数 $\Phi^-(z)$，以二实数 β_1,β_2（不同时为 0，也不同时为 1）为乘数，满足边值条件(12.21)，其中 $f(t) \in H$ 为 L_0 上的一已知函数. 当 $f(t) \equiv 0$ 时，相应问题 MQD_0 已在 2.12.2 段中讨论过. 下面设 $f(t) \not\equiv 0$.

沿用上段记号，也分两种情况讨论.

（i） 设 $z_0 = 0$. 这时如果 MQD 问题(12.21)有一个解 $\Phi^-(z)$，则它可以表示为(12.35). 于是，由(12.36)，我们有(以下，总把 $\mu(t)$ 改为 $2\mu(t)$)

$$-\mu(t_0) + \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\mu(t)e^{-\lambda(t-t_0)}[\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0)]dt\right\}$$
$$+\mathrm{Re}(Ae^{\lambda t_0}) = f(t_0), \quad t_0 \in L_0. \quad (12.45)$$

易见

$$k(t_0,t) = e^{-\lambda(t-t_0)}[\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0)] - \frac{1}{t-t_0} \in H. \quad (12.46)$$

所以(12.45)可改写为

$$\boldsymbol{K}_1\mu \equiv \mu(t_0) - \frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(t)\frac{\cos(r,n)}{r}ds + \int_{L_0}k_1(t_0,t)\mu(t)ds$$
$$= -f(t_0) + \mathrm{Re}(Ae^{\lambda t_0}), \quad t_0 \in L_0, \quad (12.47)$$

其中 $k_1(t_0,t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}k(t_0,t)\frac{dt}{ds}\right] \in H$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(t)\frac{\cos(r,n)}{r}ds = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu(t)}{t-t_0}dt\right], \quad (12.48)$$

这里 $r = |t-t_0|$，(r,n) 是向量 $t-t_0$ 与 L_0 上 t 处朝内法线 n 的夹角(参见[42]，§61).

(12.47)是一 Fredholm 方程. 考虑其可解性时，又分两种子情况：

1) 设齐次 MQD_0 问题(12.23) 只有平凡解 $\Phi^-(z)=0$. 因此，由(12.40)，$A=0$. 这表明，由定理 2.12.7，$\boldsymbol{K}_1\mu=0$ 有一般解 $\beta_0+\mathrm{Re}[C\omega(t)]$，含三个线性无关解(11.22). 沿用那里的记号，设相联方程 $\boldsymbol{K}_1'\nu=0$ 的三个解为 $\nu_j(t)$ $(j=1,2,3)$，则方程(12.47) 当且仅当下列条件满足时可解：

$$\mathrm{Re}\left[A\int_{L_0}\mathrm{e}^{\lambda t}\nu_j(t)\mathrm{d}s\right]=\int_{L_0}f(t)\nu_j(t)\mathrm{d}s\quad(\text{右端记为 } f_j),$$
$$j=1,2,3.\tag{12.49}$$

在这一子情况下，我们又可看到，如果 $f(t)=0$，$A=1$，则(12.47) 无解. 记

$$\int_{L_j}\mathrm{e}^{\lambda t}\nu_j(t)\mathrm{d}s=I_j+\mathrm{i}J_j,\quad j=1,2,3.\tag{12.50}$$

所以 I_1,I_2,I_3 不能同时为 0，例如 $I_3\neq0$. 我们将 $\nu_j(t)$ 正规化，使得

$$I_1=I_2=0,\quad I_3=1.$$

又记 $A=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则(12.49) 成为

$$\beta J_j=-f_j,\ j=1,2;\quad \alpha=f_3+\beta J_3.\tag{12.51}$$

J_1,J_2 不能同时为 0，因为否则的话，当 $f(t)=0$ 时 β 可以任意因而 $f_j=0$ $(j=1,2,3)$，从而 $A=\alpha+\mathrm{i}\beta\neq0$，矛盾. 于是，(12.51) 表明一个可解条件，而 α,β 可一意确定.

注意，在这种情况下，MQD 问题(12.24) 解的(实) 广义自由度 $r=l-m=-1$ (l 是其解中所含的任意实常数的个数，m 是其实可解条件的个数)，这里 $l=0$，$m=1$.

2) 设 MQD_0 问题(12.23) 有唯一的非零解 $\Phi_0^-(z)$ (不计一实常数系数). 记 $\Phi_0^-(z)$ 中相关的常数 $A=A_0$. 又分两种情况：

1° $A_0\neq0$. 这时方程 $\boldsymbol{K}_1\mu=\mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\lambda t})$ 当且仅当 $A=A_0$ $(\neq0)$ 时可解，以 $\boldsymbol{K}_1\mu=0$ 仍恰有三个线性无关解如前. (12.47) (对于 $A=\alpha+\mathrm{i}\beta$) 的可解条件仍为(12.51). 这里必定有 $J_1=J_2=0$，因为否则的话，(12.23) 将有一 $\Phi^-(z)$ (其中 $A_0\neq0$). 这样，(12.51) 成为两个可解条件 $f_1=f_2=0$，β 任意，而 α 由 β 唯一确定：

$$\alpha=f_3+\beta J_3.$$

(12.21) 的一般解为

$$\Phi^-(z)=\beta\Phi_0^-(z)+\Phi_1^-(z),$$

β 是一任意实常数，$\Phi_1^-(z)$ 是其一特解，相应于方程 $\boldsymbol{K}_1\mu=f(t)+$) 的解 $\mu=\mu_1(t)$ 者.

这一情况下，仍有 $r=-1$ ($l=1$，$m=2$).

$A_0=0$. 在这种情况下，$\boldsymbol{K}_1\mu=0$ 除去前述的三个解以外，存在着另

一线性无关的解 $\mu_0(t)$，由它得出(12.27) 的一个解 $\Phi_0(z)\neq 0$. 这时 $\boldsymbol{K}'_1\nu=0$ 有 4 个线性无关解 $\nu_j(t)$，$j=0,1,2,3$. 仍定义 I_j, J_j 如(12.50)，但 $j=0,1,2,3$. (12.47) 的可解条件仍由(12.49) 给出，但 $j=0,1,2,3$. 我们将证明 I_j，$j=0,1,2,3$ 不能同时为零. 当 $f(t)\equiv 0$ 时，(12.49) 成为

$$\alpha I_j-\beta J_j=0,\quad j=0,1,2,3, \tag{12.52}$$

且 $\boldsymbol{K}_1\mu=\mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\lambda t})$ 当且仅当 $A=0$ 亦即 $\alpha=\beta=0$ 时可解. 但是，设若 $I_j=0$，$j=0,1,2,3$，则(12.52) 将有解：$\beta=0$，α 可任意，矛盾. 这样，我们可以把 $\nu_j(t)$ 正规化如前，使得

$$I_j=0,\ j=0,1,2;\quad I_3=1,$$

而(12.49) 成为

$$J_j=-f_j,\ j=0,1,2;\quad \alpha_3=f_3+\beta J_3. \tag{12.53}$$

同样道理，可知 J_j，$j=0,1,2$ 不能同时为 0，因此(12.53) 降为两个可解条件，而 $A=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 一意确定. 当它们满足时，可得(12.21) 的一般解

$$\Phi^-(z)=D\Phi_0^-(z)+\Phi_1^-(z), \tag{12.54}$$

其中 D 为任意实常数，$\Phi_1^-(z)$ 是它的一个特解，对应于(12.47) 的特解 $\mu_1(t)$ 者.

在这种情况下，仍有 $r=-1$ $(l=1,\ m=2)$.

(ii) $z_0\neq 0$. 如果问题有解，利用(12.40)，(12.41) ($\mu(t)$ 仍改为 $2\mu(t)$)，我们得到

$$-\mu(t_0)+\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{e}^{\lambda t_0}}{\sigma(z_0)}\,\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mu(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\frac{\sigma(t-t_0+z_0)}{\sigma(t-t_0)}\mathrm{d}t\right]=f(t_0),$$
$$t_0\in L_0. \tag{12.55}$$

易证

$$\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}}{\sigma(z_0)}\,\frac{\sigma(t-t_0+z_0)}{\sigma(t-t_0)}-\frac{1}{t-t_0}\in H.$$

如前可知，(12.55) 是下形的 Fredholm 方程：

$$\boldsymbol{K}_2\mu\equiv\mu(t_0)-\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(t)\,\frac{\cos(r,n)}{r}\mathrm{d}s+\int_{L_0}k_0(t_0,t)\mu(t)\mathrm{d}s$$
$$=-f(t_0),\quad t_0\in L_0, \tag{12.56}$$

其中 $k(t_0,t)\in H$.

与前一情况相仿，可证 $\boldsymbol{K}_2\mu=0$ 或者只有一个线性无关解 1 或者还有另一解 $\mu_0(t)$，视(12.23) 只有平凡解或者有一非零解 $\Phi_0^-(z)$ 而定.

在前一情况下，$\boldsymbol{K}'_2\nu=0$ 只有一个解 $\nu(t)$，而(12.56) 当且仅当

$$\int_{L_0}f(t)\nu(t)\mathrm{d}s=0 \tag{12.57}$$

时可解，且解唯一(虽然 $\mu(t)$ 可差一实常数项 β_0).

这时广义自由度仍为 $r=-1$ ($l=0$, $m=1$).

若 $\boldsymbol{K}_2\mu=0$ 有两个解 1 与 $\mu_0(t)$，则 $\boldsymbol{K}_2'\nu=0$ 也有两个解 $\nu_1(t),\nu_2(t)$. 于是(12.56) 当且仅当

$$f_j=\int_{L_0} f(t)\nu_j(t)\mathrm{d}t=0,\quad j=1,2 \tag{12.58}$$

满足时可解，而(12.56)有一特解 $\mu_1(t)$，相应于(12.21)的解 $\Phi_1^-(z)$. 其一般解由(12.54) 给出.

这时仍有 $r=-1$ ($l=1$, $m=2$).

于是，我们有下一定理:

定理 2.12.9 MQD 问题解的广义自由度等于 -1，在其一般解中至多有一个实常数.

2.13 双周期解析函数的 Hilbert 问题

2.13.1 MQ 正规化

本节的目的是要求解**双周期 Hilbert 问题**，简记为 **DH 问题**，即：已给实函数 $f(t)\in H$ 于 L_0 上，求 S^- 中一双周期解析函数 $\Psi^-(z)$，使满足边值条件

$$\mathrm{Re}[\gamma(t)\,\Psi^-(t)]=f(t),\quad t\in L_0, \tag{13.1}$$

其中 $\gamma(t)=a(t)+\mathrm{i}b(t)\in H$ 也已给于 L_0 上. 我们恒设 $\gamma(t)\neq 0$ 于 L_0 上(正则型).

为要求解此问题，我们先要把 $\gamma(t)$ 进行 **MQ 正规化**，也就是，要求出 L_0 上的一实函数 $p(t)\in H$，使得

$$\psi^-(t)=p(t)\gamma(t),\quad t\in L_0 \tag{13.2}$$

为 S^- 中某乘法双准周期解析函数 $\psi^-(z)$ 在 L_0 上的边值，且乘数 β_1,β_2 要求是实数. 这就可把 DH 问题(13.1)转化为 MQD 问题，从而可以求解. 不过要注意现在我们允许所得的 $\psi^-(z)$ 在 S^- 中可以有一些极点. $p(t)$ 称为 $\gamma(t)$ 的 **MQ 正规化因子**.

本段就先讨论 $\gamma(t)$ 的 MQ 正规化问题. 我们恒记 $\gamma(t)$ 在 L_0 上的指标为

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}[\arg \gamma(t)]_{L_0} ①. \quad (13.$$

不失一般性，恒设$|\gamma(t)|=1$，而写$\gamma(t)=e^{i\theta(t)}$，其中$\theta(t)$是多值的，除非$\kappa=0$.

下面对不同的κ值分别进行讨论.

(ⅰ) $\kappa=0$. 这时$\theta(t)$为单值的. 我们来求解下列 AQD 问题

$$\mathrm{Re}[-\mathrm{i}\Omega^-(t)] = \theta(t), \quad t \in L_0, \quad (13.$$

并要求$\Omega^-(z)$有实加数α_j:

$$\Omega^-(z+2\omega_j) = \Omega^-(z) + \alpha_j, \quad j=1,2. \quad (13.5)$$

由于$-\mathrm{i}\Omega^-(z)$的加数实部为0，故由定理 2.12.2 知，此问题有唯一解

$$-\mathrm{i}\Omega^-(z) = U(z) + \mathrm{i}V(z),$$

其中$U(t)=\theta(t)$. 令$\psi^-(z)=e^{\Omega^-(z)}$，则$\psi^-(z)$是$S^-$中全纯的MQ函数，具有实乘数$\beta_j=e^{\alpha_j}\ (j=1,2)$，且

$$\psi^-(t) = \exp\{-V(t) + \mathrm{i}\theta(t)\}, \quad t \in L_0.$$

MQ 正规化因子$p(t)=e^{-V(t)}\in H$. 这里α_j从而$\beta_j\ (j=1,2)$都是一意确定的.

在这一情况中，$\psi^-(z)$在S^-中既无零点也无极点.

(ⅱ) $\kappa\geqslant 2$. 令

$$h_\kappa(z) = \frac{\Pi(z)}{\sigma^\kappa(z)}, \quad \Pi(z) = \prod_{j=1}^{\kappa}\sigma(z-z_j), \quad (13.6)$$

其中$z_1,z_2,\cdots,z_\kappa\in S_0^-$任意固定，但$\sum_{k=1}^{\kappa} z_k = 0$. $h_\kappa(z)$是κ阶椭圆函数，在S_0^-内有单零点$z_1,z_2,\cdots,z_\kappa$而无极点. 它在L_0上的指标为$-\kappa$，记$\delta(t)=\arg h_\kappa(t)$. 则

$$\theta_0(t) = \theta(t) + \delta(t) \quad (13.7)$$

在L_0上是单值的. 如(ⅰ)中那样，作$e^{i\theta_0(t)}$的 MQ 正规化因子$p_0(t)$，便得S^-中的一个全纯 MQ 函数$\psi_0^-(z)$，以β_1,β_2为实乘数，满足边值条件

$$\psi_0^-(t) = p_0(t)e^{i\theta_0(t)}, \quad t \in L_0. \quad (13.8)$$

---

① 与(6.11)类似，我们应称

$$-\frac{1}{\pi}[\arg\overline{\gamma(t)}]_{L_0} = 2\kappa$$

为 DH 问题(13.1)的指标(但以后我们不这样做)，这里左端有一负号，这是因为L_0已取定反时针向为正向，而S^-在其负侧的缘故.

于是

$$\psi^-(z) = \frac{\psi_0^-(z)}{h_\kappa(z)} \tag{13.9}$$

是与 $\psi_0(z)$ 具相同乘数的亚纯 MQ 函数，具有边值

$$\psi^-(t) = \frac{p_0(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0(t)}}{h_\kappa(t)} = \frac{p_0(t)}{|h_\kappa(t)|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}.$$

因此 $p(t) = \dfrac{p_0(t)}{h_\kappa(t)}$ 是 $\gamma(t)$ 的一个 MQ 正规化因子.

注意，在这一情况下，$\psi^-(z)\neq 0$，在 S_0^- 中恰有 κ 个单极点 $z_1, z_2, \cdots, z_\kappa$.

(ⅲ) $\kappa = 1$，代替(13.6)中的 $h_\kappa(z)$，现令

$$h_1(z) = \frac{\sigma(z-c_1)\sigma(z-z_1)}{\sigma(z)\sigma(z-c_2)}, \tag{13.10}$$

其中 $c_1, c_2 \in S_0^+$ ($z_1 = c_2 - c_1 \in S_0^-$) 为任意取定. 其余讨论同(ⅱ). 现在 $\psi^-(z)\neq 0$ 而在 S_0^- 中有唯一单极点 z_1.

(ⅳ) $\kappa \leqslant -2$. 这时，我们可令

$$h_\kappa(z) = \frac{1}{h_{-\kappa}(z)},$$

其中 $h_{-\kappa}(z)$ 由(13.6)定义. 这样便得全纯 MQ 函数 $\psi^-(z)$，在 S^- 中有单零点 z_1.

于是便得

定理 2.13.1 已给 $\gamma(t)\in H$，$\neq 0$ 于 L_0 上，其指标为 κ，它的 MQ 正规化因子 $p(t)$ 总存在，且有实乘数. 所得的 MQ 函数 $\psi^-(z)$ 在 S_0^- 中，当 $\kappa = 0$ 时既无零点也无极点；当 $\kappa > 0$ 时有 κ 个单极点而无零点；当 $\kappa < 0$ 时有 $-\kappa$ 个单零点而无极点.

注 我们没有去求 MQ 正则化因子的一般解，因为我们这里不需要它. 但若 $\psi^-(z)$ 在 S_0^- 中可能出现的零点和极点的位置事先指定，也不难得到它.

2.13.2 双周期 Hilbert 边值问题

我们现在来求解 DH 问题(13.1).

根据上段结果，我们对 $\gamma(t)$ 构造出 MQ 正规化因子 $p(t)$ 使得 $\psi^-(t) = p(t)\gamma(t)$ 是 S^- 中 MQ 函数 $\psi^-(z)$ 的边值，它在 S_0^- 中有极点或零点，视 $\kappa > 0$ 或 $\kappa < 0$ 而定.

令 $\Phi^-(z) = \psi^-(z)\Psi^-(z)$. 则问题(13.1)转化为 $\Phi^-(z)$ 的 MQD 问题(具实乘数)

$$\mathrm{Re}[\Phi^-(t)] = p(t)f(t), \quad t \in L_0. \qquad (13.\ldots)$$

$\Phi^-(z)$ 的实乘数 β_1,β_2 与 $\psi^-(z)$ 的相同.

下面分两种情况讨论(沿用 2.12.3 段中的记号):

(i) $z_0 = 0$. 再对不同情况的 κ 进行讨论.

1° $\kappa = 0$. 利用 2.12.4 段中的结果，根据不同情况，可得可解条件 (12.51) 或(12.53)，由

$$f_j = \int_{L_0} p(t)f(t)\nu_j(t)\mathrm{d}s \quad (j = 1,2,3 \text{ 或 } j = 1,2,3,4) \qquad (13.12)$$

以决定 α,β. 当它们满足时，$\Psi^-(z) = \dfrac{\Phi^-(z)}{\psi^-(z)}$ 是问题(13.1) 的一般解，其中 $\Phi^-(z)$ 是(13.11) 的一般解. 由 2.12.4 段中的讨论知，这 DH 问题一般解的广义自由度 $r =-1$，而解中任意常数个数 $l \leqslant 1$.

2° $\kappa < 0$，这种情况与 1° 相同，只是$\Phi^-(z)$ 在 S_0^- 中必然有$-\kappa$个零点 $z_1,z_2,\cdots,z_{-\kappa}$. 因此，除(12.51) 或(12.53) 外，还要添加下列可解条件:

$$\int_{L_0} \mu(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}[\zeta(t-z_k)+\zeta(z_k)]\mathrm{d}t + A = 0,$$
$$k = 1,2,\cdots,-\kappa, \qquad (13.13)$$

其中 $\mu(t)$，由(12.47)，是

$$\boldsymbol{K}_1\mu =- p(t_0)f(t_0) + \mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\lambda t_0}), \quad t_0 \in L_0$$

的任一解. (13.13) 包含总数为 -2κ 的实条件.

由 2.12.3 段中的讨论知，这时 $r = 2\kappa - 1$ ($l \leqslant 1$).

3° $\kappa > 0$. 这时相应的 MQ 函数$\Phi^-(z)$ 在 S_0^- 中可以有单极点 $z_1,z_2,\cdots,z_\kappa$. 令

$$\chi_k(z) = \mathrm{e}^{\lambda z}[\zeta(z-z_k)+\zeta(z)], \quad k = 1,2,\cdots,\kappa. \qquad (13.14)$$

它是 S^- 中的一个 MQ 函数，在 S_0^- 中有相同的单极点 z_k，且有与$\Phi^-(z)$ 相同的乘数. 因此，$\Phi^-(z)$ 可表示为

$$\Phi^-(z) = \mathrm{e}^{\lambda z}\left\{\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0} \mu(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t + A\right\}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\kappa} C_k\chi_k(z), \quad z \in S^-, \qquad (13.15)$$

其中 $C_k = \gamma_k + \mathrm{i}\delta_k$ ($k = 1,2,\cdots,\kappa$) 为任意复常数，而 $\mu(t)$ 是方程

$$\boldsymbol{K}_1\mu =- p(t_0)f(t_0) - \mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{\lambda t_0}) - \sum_{k=1}^{\kappa}\mathrm{Re}[C_k\chi_k(t_0)],$$
$$t_0 \in L_0 \qquad (13.16)$$

的解. 于是条件(12.51) 或(12.53) 现在分别成为

$$\left.\begin{aligned}&-\beta J_j+\sum_{k=1}^{\kappa}\mathrm{Re}\left[C_k\int_{L_0}\chi_k(t)\nu_j(t)\mathrm{d}s\right]=-f_j,\\&\qquad\qquad j=1,2\text{ 或 }j=0,1,2;\\&\alpha+\beta J_3+\sum_{k=1}^{\kappa}\mathrm{Re}\left[C_k\int_{L_0}\chi_k(t)\nu_3(t)\mathrm{d}s\right]=-f_3,\end{aligned}\right\}\tag{13.17}$$

其中包含 $2\kappa+2$ 个实常数 γ_k,δ_k $(k=1,2,\cdots,\kappa)$ 以及 α 和 β.

所以这时 $r=2\kappa-1$ $(l\leqslant 2\kappa+1)$.

(ⅱ) $z_0\neq 0$. 这时讨论与(ⅰ)仅稍有不同，故只简述如下：

1° $\kappa=0$. 这时可解条件(12.56) 或(12.57) 分别成为

$$\int_{L_0}p(t)f(t)\nu(t)\mathrm{d}s=0\tag{13.18}$$

或

$$f_j=\int_{L_0}p(t)f(t)\nu_j(t)\mathrm{d}s=0,\quad j=1,2.\tag{13.18$'$}$$

所以这时 $r=-1$ $(l\leqslant 1)$.

2° $\kappa<0$. 除(13.18) 或(13.18)′外，可解条件还要添加

$$\int_{L_0}\mu(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\sigma(t-z_k+z_0)}{\sigma(t-z_k)}\mathrm{d}t=0,\quad k=1,2,\cdots,-\kappa,\tag{13.19}$$

其中 $\mu(t)$ 是 $\boldsymbol{K}_2\mu=-p(t_0)f(t_0)$ 的任一解. 现在 $r=2\kappa-1$ $(l\leqslant 1)$.

3° $\kappa>0$. 这时我们要求解积分方程

$$\boldsymbol{K}_2\mu=-p(t_0)f(t_0)+\sum_{k=1}^{\kappa}\mathrm{Re}[C_kq(t_0)\chi_k(t_0)],\quad t_0\in L_0,\tag{13.20}$$

其中 $q(z)$ 由(12.34) 给出. 这时可解条件(12.56) 或(12.57) 分别成为

$$\sum_{k=1}^{\kappa}\mathrm{Re}\left[\int_{L_0}C_kq(t)\chi_k(t)\mathrm{d}s\right]=\int_{L_0}p(t)f(t)\nu(t)\mathrm{d}s\tag{13.21}$$

或

$$\sum_{k=1}^{\kappa}\mathrm{Re}\left[\int_{L_0}C_kq(t)\chi_k(t)\mathrm{d}s\right]=\int_{L_0}p(t)f(t)\nu_j(t)\mathrm{d}s,\quad j=1,2.\tag{13.21$'$}$$

现在 $r=2\kappa-1$ $(l\leqslant 2k+1)$.

这样，不论哪种情况，我们总有

定理 2.13.2 如果 DH 问题(13.1) 中 $\gamma(t)$ 的指标为 κ，则其解的广义自由度为 $2\kappa-1$，且当可解条件满足时，其一般解中任意(实) 常数的个数当

$\kappa \geqslant 0$ 时为 $2\kappa+1$，而当 $\kappa<0$ 时只有 1 个.

以上所述方法为构造性的，最终将问题化为一个确定的 Fredholm

方程.

注 我们当然可以提出 MQ 函数的 Hilbert 问题. 但因这时 MQ 正

过程完全与 2. 13. 1 段中一样，而双准周期性可合在一起，所以没有必要

讨论.

第三章　封闭曲线情况下的奇异积分方程

本章将利用上一章中的结果，讨论封闭曲线上具有连续系数的 Cauchy 核奇异积分方程的一般理论和求解方法，包括在解析系数下的直接解法. 还将讨论周期核的类似方程.

3.1　Cauchy 核的奇异积分方程和奇异算子

3.1.1　一般概念

在本章里，我们将考虑下面形式的积分方程

$$\boldsymbol{K}\varphi \equiv a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)\mathrm{d}t = f(t_0),\quad t_0\in L,\tag{1.1}$$

其中 $L=\sum_{j=1}^{n}L_j$ 是一组互不相交的光滑封闭曲线（均已取定正向）的集合，$a(t),f(t)$ 已给在 L 上，$K(t_0,t)$ 已给在 $L\times L$ 上，都 $\in H$，而 $\varphi(t)$ 是 L 上的未知函数，假定也 $\in H$. 方程(1.1) 称为曲线 L 上的含 **Cauchy 核的奇异积分方程**，而 $\boldsymbol{K}$ 则称为其相应的**奇异算子**. 当 $f(t)\equiv 0$ 时，则称(1.1) 为**齐次的**，否则称为**非齐次的**.

如果记

$$b(t)=K(t,t)\quad（当然也 \in H），\tag{1.2}$$

则方程(1.1) 可改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}\varphi &\equiv a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{b(t_0)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t+\int_L k(t_0,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\\ &= f(t_0),\quad t_0\in L,\end{aligned}\tag{1.1$'$}$$

其中已记

$$k(t_0,t)=\frac{K(t_0,t)-K(t_0,t_0)}{t-t_0}.\qquad (1.$$

设 $K(t_0,t)$ 的 Hölder 指数为 α $(0<\alpha\leqslant 1)$，即

$$|K(t_0,t)-K(t_0',t')|\leqslant A(|t_0-t_0'|^{\alpha}+|t-t'|^{\alpha}),$$

则显然

$$|k(t_0,t)|\leqslant\frac{A}{|t-t_0|^{\lambda}},\quad 0\leqslant\lambda=1-\alpha<1.\qquad (1.4)$$

当 $K(t_0,t_0)\equiv 0$ 即 $b(t_0)\equiv 0$ 时，(1.1) 便是通常的弱奇性核 Fredholm 方程，其性质已为我们所熟知(参看附录).

当 $k(t_0,t)$ 满足条件(1.4) 时，我们称

$$\boldsymbol{k}\varphi\equiv\int_L k(t_0,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

为(第一型的)Fredholm 算子. 算子

$$\boldsymbol{K}^0\varphi\equiv a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{b(t_0)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t\qquad (1.5)$$

称为算子 $\boldsymbol{K}$ 的**特征算子**，而 $\boldsymbol{K}^0\varphi=g$ (对任何 g) 则称为**特征方程**. 这样 (1.1)′ 可改写为

$$(\boldsymbol{K}^0+\boldsymbol{k})\varphi=f.$$

我们还把

$$\boldsymbol{K}'\psi\equiv a(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,t_0)}{t-t_0}\psi(t)\mathrm{d}t=0,\quad t_0\in L\qquad (1.6)$$

或即

$$\boldsymbol{K}'\psi\equiv a(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{b(t)\psi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t+\int_L k(t,t_0)\psi(t)\mathrm{d}t=0,$$

$$t_0\in L,\qquad (1.6)'$$

称为(1.1) 的**相联方程**，而$\boldsymbol{K}'$ 称为$\boldsymbol{K}$ 的**相联算子**. 因此，特征算子(1.5) 的相联算子为

$$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi\equiv a(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{b(t)\psi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L,\qquad (1.7)$$

而 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 为特征方程(1.5) 的相联方程.

要注意的是，一般说来，$\boldsymbol{K}^{0\prime}\neq\boldsymbol{K}'^{0}$. 因为

$$\boldsymbol{K}'\psi\equiv a(t_0)\psi(t_0)-\frac{b(t_0)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\psi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t$$

$$+\int_L\left[k(t,t_0)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\frac{b(t)-b(t_0)}{t-t_0}\right]\psi(t)\mathrm{d}t,$$

而右边最后一项是一个具有如性质(1.4) 的核的算子，这是由于

$$\left|\frac{b(t)-b(t_0)}{t-t_0}\right| \leqslant \frac{A}{|t-t_0|^{\lambda}}$$

的缘故. 所以

$$\boldsymbol{K}'^{0}\psi \equiv a(t_0)\psi(t_0) - \frac{b(t_0)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\psi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t, \tag{1.8}$$

它与(1.7) 一般不同.

以后我们将假定 $a^2(t)-b^2(t)\neq 0$ 于 L 上，这时(1.1) 称为**正则型奇异积分方程**. 记

$$S(t)=a(t)+b(t), \quad D(t)=a(t)-b(t),$$

故 $S(t)\neq 0$，$D(t)\neq 0$ 于 L 上. 由于以后将说明的原因，我们称

$$\kappa = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left[\log\frac{a-b}{a+b}\right]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{D}{S}\right]_L \tag{1.9}$$

为方程(1.1) (或(1.1)′, 或$\boldsymbol{K}$) 的**指标**. 所以，$\boldsymbol{K}^0$ 的指标与$\boldsymbol{K}$的指标相同. 对于第二型的 Fredholm 方程来说，显然$\kappa=0$. 但$\kappa=0$ 的方程(1.1) 一般并不是 Fredholm 方程，虽然它具有某些与后者相似的性质，这在以后将会看到.

3.1.2 奇异算子的性质

为了以后的需要，我们指出奇异算子 $\boldsymbol{K}$ 的若干性质:

1° 若 $\varphi\in H$，则 $\boldsymbol{K}\varphi\in H$. 此可由(1.1) 中 Cauchy 主值积分的性质明显看出(参看定理 1.4.1).

2° 若 $\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2$ 是两个奇异算子，则 $\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2$ 也是奇异的. 设

$$\boldsymbol{K}_j\varphi \equiv a_j(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K_j(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)\mathrm{d}t, \quad j=1,2,$$

则由 Poincaré-Bertrand 积分换序公式，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2\varphi \equiv & [a_1(t_0)a_2(t_0)+b_1(t_0)b_2(t_0)]\varphi(t_0)\\ & + \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{a_1(t_0)K_2(t_0,t)+K_1(t_0,t)a_2(t)}{t-t_0}\varphi(t)\mathrm{d}t\\ & + \left(\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\right)^2\int_L\left[\int_L \frac{K_1(t_0,t_1)K_2(t_1,t)}{(t_1-t_0)(t-t_1)}\mathrm{d}t_1\right]\varphi(t)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{1.10}$$

其中已记 $b_j(t_0)=K_j(t_0,t_0)$. 记

$$F(t_0,t,t_1)=K_1(t_0,t_1)K_2(t_1,t)\in H,$$

则

$$\int_L \frac{F(t_0,t,t_1)\mathrm{d}t_1}{(t_1-t_0)(t-t_1)} = \frac{\omega_0(t_0,t)-\omega(t_0,t)}{t-t_0},$$

其中已令

$$\omega_0(t_0,t)=\int_L \frac{F(t_0,t,t_1)\mathrm{d}t_1}{t_1-t_0},\quad \omega(t_0,t)=\int_L \frac{F(t_0,t,t_1)\mathrm{d}t_1}{t_1-t}.$$

注意到 $\omega_0(t_0,t_0)=\omega(t_0,t_0)$，且 ω,ω_0 均 $\in H$，因此

$$\left|\int_L \frac{F(t_0,t,t_1)\mathrm{d}t_1}{(t_1-t_0)(t-t_1)}\right|\leqslant \frac{A}{|t-t_0|^{\lambda}},\quad 0\leqslant\lambda<1.$$

所以(1.10) 中最后一项是(弱) Fredholm 积分，而前面两项的和是一奇异算子.

但要注意，一般 $\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2\neq\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1$.

3° 奇异算子服从结合律：$(\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{K}_3=\boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_3)$，其中 $\boldsymbol{K}_j$ $(j=1,2,3)$ 都是奇异算子. 此由直接验证可知. 当然，若 $\boldsymbol{K}_j$ 中有的退化为 Fredholm 算子，则此式也成立.

4° 设 $\boldsymbol{K}_3=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2$，又 $\boldsymbol{K}_j$ 的指标为 κ_j $(j=1,2,3)$，则有

$$\kappa_3=\kappa_1+\kappa_2. \tag{1.11}$$

以 a_j,b_j (以及 $S_j=a_j+b_j$，$D_j=a_j-b_j$) 表示 $\boldsymbol{K}_j$ 的相应于(1.1) 中的系数，由(1.10) 易见

$$a_3=a_1a_2+b_1b_2,\quad b_3=a_1b_2+a_2b_1, \tag{1.12}$$

所以

$$S_3=S_1S_2,\quad D_3=D_1D_2; \tag{1.12$'$}$$

于是由(1.9) 立即可得(1.11).

此外，由(1.12) 还可看出，当 $\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2$ 都是正则型时，$\boldsymbol{K}_3$ 也必是正则型.

5° 设 $\boldsymbol{K}$ 为奇异算子，$\boldsymbol{k}$ 为第一型 Fredholm 算子，则 $\boldsymbol{Kk}$ 与 $\boldsymbol{kK}$ 都是第一型 Fredholm 算子. 把 $\boldsymbol{k}$ 看做 $\boldsymbol{K}_2$，则(1.12) 中的 $a_2=b_2=0$，从而 $\boldsymbol{Kk}$ 的 $a=b=0$，所以它是第一型 Fredholm 算子. $\boldsymbol{kK}$ 同.

6° 设 $\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}'$ 的指标分别为 κ,κ'，则 $\kappa'=-\kappa$.

7° $(\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2)'=\boldsymbol{K}_2'\boldsymbol{K}_1'$.

8° 设 φ,ψ 为 $\in H$ 的任意二函数，则有 $\int_L \psi\boldsymbol{K}\varphi\,\mathrm{d}t=\int_L \varphi\boldsymbol{K}'\psi\,\mathrm{d}t$.

性质 6°,7°,8° 均可直接验证.

3.2 特征方程及其相联方程的解法

3.2.1 特征方程的解法

对于特征方程，我们可直接求得其解(包括可解条件) 的封闭形式.

设要求解特征方程

$$K^0\varphi \equiv a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{b(t_0)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t = f(t_0), \quad t_0\in L, \tag{2.1}$$

其中 a,b,f 以及 L 均同 3.1 节，且设它是正则型的：$a^2-b^2\neq 0$ 于 L 上，要求未知函数也 $\in H$.

这方程的求解问题与 Riemann 边值问题有着密切的关系.

暂设(2.1) 确实有解 $\varphi(t)\in H$. 引进分区全纯函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\mathrm{d}t, \quad z\overline{\in} L, \tag{2.2}$$

于是由 Plemelj 公式，有

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t_0) &= \Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0), \\ \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t &= \Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0), \end{aligned}\right\} \quad t_0\in L, \tag{2.3}$$

代入(2.1)，便得

$$(a+b)\Phi^+(t)-(a-b)\Phi^-(t)=f(t), \quad t\in L,$$

亦即

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}, \quad t\in L, \tag{2.4}$$

这里已令

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}, \tag{2.5}$$

且由于(2.2) 的关系，应有 $\Phi(\infty)=0$. 这就是说，如果方程(2.1) 有一解 $\varphi(t)\in H$，则由(2.2) 定义的分区全纯函数 $\Phi(z)$ 是 R 问题(2.4) 在 R_{-1} 中的一个解.

反之，如果问题(2.4) 在 R_{-1} 中有一个解 $\Phi(z)$，则由(2.3) 的前一式得出的 $\varphi(t)$ 便是方程(2.1) 的一个解. 这是因为由(2.3) 前一式(这是一个跳跃问题) 以及 $\Phi(\infty)=0$，便知(2.2) 成立(见 2.1.2 段)；于是(2.3) 的第二式也成立. 再把(2.3) 代入(2.4)，化简后便知 $\varphi(t)$ 满足方程(2.1).

这样，方程(2.1) 的求解问题就等价于在 R_{-1} 中求解问题(2.4). 后一问题的指标，由(2.5) 式，正好是(1.9)，即算子 K^0 的指标，这也就是定义 K^0 的指标的由来.

设 $X(z)$ 是问题(2.4) 的典则函数. 于是，当 $\kappa\geqslant 0$ 时，由 2.3 节，问题(2.4) 在 R_{-1} 中的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)\mathrm{d}t}{[a(t)+b(t)]X^+(t)(t-z)}+X(z)Q_{\kappa-1}(z), \tag{2.6}$$

其中 $Q_{\kappa-1}$ 是 $\kappa-1$ 次任意多项式($Q_{-1}\equiv 0$)；当 $\kappa<0$ 时，当且仅当

$$\int_L \frac{t^k f(t)}{[a(t)+b(t)]X^+(t)}\mathrm{d}t = 0,\quad k = 0,1,\cdots,-\kappa-1 \tag{2.7}$$

满足时，问题有唯一解(2.6)（令 $Q_{\kappa-1}\equiv 0$）.

回到(2.1)的解 $\varphi(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)$，则有

$$\begin{aligned}\varphi(t_0) = &\frac{X^+(t_0)+X^-(t_0)}{2[a(t_0)+b(t_0)]X^+(t_0)}f(t_0)\\ &+\frac{X^+(t_0)-X^-(t_0)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)\mathrm{d}t}{[a(t)+b(t)]X^+(t)(t-t_0)}\\ &+[X^+(t_0)-X^-(t_0)]Q_{\kappa-1}(t_0).\end{aligned} \tag{2.8}$$

回想 $X(z)$ 的定义，可知

$$\frac{X^+(t_0)}{X^-(t_0)} = G(t_0) = \frac{a(t_0)-b(t_0)}{a(t_0)+b(t_0)}.$$

所以，如果记

$$Z(t_0) = [a(t_0)+b(t_0)]X^+(t_0) = [a(t_0)-b(t_0)]X^-(t_0), \tag{2.9}$$

$$a^*(t_0) = \frac{a(t_0)}{a^2(t_0)-b^2(t_0)},\quad b^*(t_0) = \frac{b(t_0)}{a^2(t_0)-b^2(t_0)}, \tag{2.10}$$

则(2.8)可改写为

$$\varphi(t_0) = \boldsymbol{K}^*f + b^*(t_0)Z(t_0)P_{\kappa-1}(t_0), \tag{2.11}$$

其中 $P_{\kappa-1}(t_0)$ 又是一个 $\kappa-1$ 次任意多项式，而

$$\boldsymbol{K}^*f \equiv a^*(t_0)f(t_0) - \frac{b^*(t_0)Z(t_0)}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)\mathrm{d}t}{Z(t)(t-t_0)}; \tag{2.12}$$

而当 $\kappa<0$ 时，可解条件(2.7)可改写为

$$\int_L \frac{t^k f(t)}{Z(t)}\mathrm{d}t = 0,\quad k = 0,1,\cdots,-\kappa-1. \tag{2.13}$$

$Z(t)$ 称为方程(2.1)的**标准函数**.

当 $f\equiv 0$ 时，便有齐次方程 $\boldsymbol{K}^0\varphi = 0$. 当 $\kappa>0$ 时，它显然有 κ 个线性无关解：

$$t^k b^*(t)Z(t),\quad k = 0,1,\cdots,\kappa-1; \tag{2.14}$$

而当 $\kappa\leqslant 0$ 时，它只有零解.

综上所述，我们得到

定理 3.2.1 齐次方程 $\boldsymbol{K}^0\varphi = 0$ 当 $\kappa>0$ 时有 κ 个线性无关解(2.14)，$\kappa\leqslant 0$ 时只有零解；非齐次方程 $\boldsymbol{K}^0\varphi = f$ 当 $\kappa\geqslant 0$ 时有一般解(2.11)，当 $\kappa<0$ 时当且仅当满足 $-\kappa$ 个条件(2.13)时才有唯一解(2.12)，总之其一般解有 κ 个自由度.

应用上面的结果，可以很简捷地导出关于 Cauchy 主值积分的反演公式（参看 1.4.3 段）. 设 L 仍如前，$f(t)\in H$ 于 L 上. 我们的问题是要求解下一特殊的奇异积分方程：

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t = f(t_0),\quad t_0\in L. \tag{2.15}$$

这是一个特征方程，这里 $a(t)=0$，$b(t)=1$，所以还是正则型的. 现在 $G(t)=-1$ 为一常数，故 $\kappa=0$. 因此，(2.15) 有唯一解. 由(2.11)，它应由(2.12) 给出. 但这时易见 $X^{\pm}(z)$ 可分别取大小相等、符号相反的非零常数，于是 $Z(t)$ 也可取成一非零常数，从而

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L. \tag{2.16}$$

这正是我们所预期的结果.

3.2.2 特征方程的相联方程的解法

现在来考虑 $\boldsymbol{K}^0\varphi = f$ 的相联方程

$$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi \equiv a(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{b(t)\psi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t = g(t_0),\quad t_0\in L \tag{2.17}$$

的解法. 仍设 $g,\psi\in H$. 如 3.1 节中所述，此方程的指标 $\kappa'=-\kappa$.

为了求解方程(2.17)，自然会想到，可以引进

$$\chi(t) = b(t)\psi(t)$$

作为新的未知函数，于是(2.17) 立即可化为

$$a(t_0)\chi(t_0) - \frac{b(t_0)}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\chi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t = b(t_0)g(t_0),\quad t_0\in L.$$

它是 $\chi(t)$ 的一个特征方程，故用 3.2.1 段的方法就可求出解 $\chi(t)$，于是 $\psi(t)=\dfrac{\chi(t)}{b(t)}$ 也就可以求得. 但这样做必须要求 $b(t)$ 在 L 上处处 $\neq 0$ 才可以. 为了避免这一不必要的多余假设，我们宁愿采用下面另一种方法来求解(2.17).

与前相仿，引进

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{b(t)\psi(t)}{t-z}\mathrm{d}t,\quad z\,\overline{\in}\, L, \tag{2.18}$$

则 $\Psi(\infty)=0$，且

$$\left.\begin{aligned} &b(t_0)\psi(t_0) = \Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0),\\ &\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{b(t)\psi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t = \Psi^+(t_0) + \Psi^-(t_0), \end{aligned}\right\}\quad t_0\in L. \tag{2.19}$$

把(2.19) 的后一式代入(2.17)，再把它与(2.19) 的前一式相加减，便得

$$\psi = \frac{2\Psi^+}{a+b} + \frac{g}{a+b}, \quad \psi = \frac{2\Psi^-}{a-b} + \frac{g}{a-b}, \tag{2.20}$$

然后消去 ψ，得

$$\Psi^+(t) = \frac{1}{G(t)}\Psi^-(t) + \frac{b(t)g(t)}{a(t)-b(t)}, \quad t \in L, \tag{2.21}$$

式中 $G(t)$ 仍以(2.5)给出．相应于(2.21)的齐次问题正好是(2.4)的相联 R 问题，其典则函数为 $1/X(z)$．故由 2.3 节知，当 $\kappa' = -\kappa \geqslant 0$ 时，问题(2.21)的一般解为

$$\Psi(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{X^+(t)b(t)g(t)}{[a(t)-b(t)](t-z)} dt + \frac{Q_{\kappa'-1}(z)}{X(z)}; \tag{2.22}$$

而当 $\kappa' = -\kappa < 0$ 时，当且仅当

$$\int_L \frac{X^+(t)b(t)g(t)}{a(t)-b(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0,1,\cdots,-\kappa'-1 \tag{2.23}$$

满足时才有唯一解(2.22)（$Q_{\kappa'-1} \equiv 0$）.

回到 $\psi(t)$，由(2.20)中的任一式，沿用以前的记号，得(2.17)的一般解为

$$\psi(t_0) = \boldsymbol{K}^{*\prime} g + \frac{P_{\kappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)}, \tag{2.24}$$

其中 $\boldsymbol{K}^{*\prime}$ 为 $\boldsymbol{K}^*$ 的相联算子，即

$$\boldsymbol{K}^{*\prime} g \equiv a^*(t_0)g(t_0) + \frac{1}{\pi i Z(t_0)} \int_L \frac{Z(t)b^*(t)g(t)}{t-t_0} dt; \tag{2.25}$$

这时可解条件(2.23)可写成

$$\int_L t^k Z(t)b^*(t)g(t) dt = 0, \quad k = 0,1,\cdots,-\kappa'-1. \tag{2.26}$$

因此定理 3.2.1 对于相联方程 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi = g$ 也是成立的，只要在其中把 κ 改为 κ'.

3.2.3 特征方程的 Noether 定理

如果比较特征方程及其相联方程解之间的关系，可以看出以下一些事实.

首先，齐次方程 $\boldsymbol{K}^0\varphi = 0$ 与 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi = 0$ 的线性无关的解的个数都是有限的.

其次，若设 $\boldsymbol{K}^0\varphi = 0$ 共有 l 个线性无关的解，$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi = 0$ 共有 l' 个线性无关的解，则当 $\kappa = -\kappa' \geqslant 0$ 时，$l = \kappa$，$l' = 0$；当 $\kappa = -\kappa' < 0$ 时，$l = 0$，$l' = \kappa' = -\kappa$. 因此，不论哪种情况，总有 $l - l' = \kappa$.

最后，设 $\kappa < 0$，于是 $\boldsymbol{K}^0\varphi = f$ 的可解条件为(2.13)．但由(2.24)可看出，$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi = 0$ 的 κ'（$= -\kappa$）个线性无关解为

$$\psi_1(t)=\frac{1}{Z(t)},\ \psi_2(t)=\frac{t}{Z(t)},\ \cdots,\ \psi_{\kappa'}(t)=\frac{t^{-\kappa-1}}{Z(t)}.$$

因此，可解条件(2.13) 正好可以写成

$$\int_L \psi_k(t)f(t)\mathrm{d}t=0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-1. \tag{2.27}$$

这样，对于特征方程及其相联方程而言，我们有以下结果：

定理 3.2.2

Ⅰ. $\boldsymbol{K}^0\varphi=0$ 与 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 的(线性无关)解的个数均有限.

Ⅱ. 设 $\boldsymbol{K}^0\varphi=0$ 与 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 的解的个数分别为 l,l'，则

$$l-l'=\kappa, \tag{2.28}$$

其中 κ 为 $\boldsymbol{K}^0$ 的指标.

Ⅲ. $\boldsymbol{K}^0\varphi=f$ 可解的充要条件为(2.27)，其中 $\{\psi_k\}$ 为 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 的全解系，亦即，方程 $\boldsymbol{K}^0\varphi=f$ 可解当且仅当 f 与齐次相联方程 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 的一切解正交.

以上这些结果构成了 Noether 定理的内容. 我们以后要证明，它们不仅对特征方程成立，即使对一般的正则型奇异积分方程(1.1) 也成立.

习　题

1. 求解方程

$$t(t-2)\varphi(t)+\frac{t^2-6t+8}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{t},\quad t\in L,$$

其中 L 是一条光滑封闭曲线，以反时针向为正向(下同)，$z=0$ 在其内部，$z=2$ 在其外部.

答 $\varphi(t)=\dfrac{-t^2+6t-4}{8t(t-2)^2}$.

2. 求解方程

$$t\varphi(t)-\frac{t-2}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=2(t^2-1),\quad t\in L,$$

其中 L 是一条不通过 $z=1$ 的光滑封闭曲线.

答 当 $z=1$ 在 L 的内部时，$\varphi(t)=t^2-1+C\dfrac{t-2}{t-1}$，其中 C 为任意常数；当 $z=1$ 在 L 的外部时，应取前式中的 $C=0$.

3. 如果 L 是一分段光滑封闭曲线，本节的结果是否成立?

4. $(\boldsymbol{K}^{0\prime})^0=\boldsymbol{K}'^0$ 与 $(\boldsymbol{K}'^0)'=\boldsymbol{K}^{0\prime}$ 是否成立?

答 前一式成立，后一式不成立.

3.3 奇异积分方程的正则化及一般的 Noether 定理

3.3.1 奇异积分方程的正则化

对于一般的奇异积分方程(1.1) 或(1.1)′，求解方法的思想是把它化为某个 Fredholm 方程；对于后者，我们熟知，已有较完整的理论和各种求解方法. 把奇异积分方程化为 Fredholm 方程的方法，叫做**正则化方法**.

有各种各样的正则化方法，下面只讲述其中一种. 仍设κ为方程(1.1) 的指标.

1° 设$\kappa\geqslant 0$. 设$\boldsymbol{K}^{0\prime}$是$\boldsymbol{K}$的特征部分$\boldsymbol{K}^0$的相联算子，故它的指标$\kappa'=-\kappa$. 在方程(1.1) 的两边作用$\boldsymbol{K}^{0\prime}$，得

$$\boldsymbol{K}^{0\prime}\boldsymbol{K}\varphi=\boldsymbol{K}^{0\prime}f. \tag{3.1}$$

由(1.12) 容易看出，对于算子$\boldsymbol{K}^{0\prime}\boldsymbol{K}$来说，它的$b(t)=0$，故它已是 Fredholm 算子，也就是，(1.1) 已正则化为 Fredholm 方程(3.1) 了.

显然，如果φ是(1.1) 的解，当然也是(3.1) 的解. 反之，设φ是(3.1) 的解，于是

$$\boldsymbol{K}^{0\prime}(\boldsymbol{K}\varphi-f)=0.$$

但$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$的指标$\kappa'=-\kappa\leqslant 0$，故它只有零解. 因此，从上式便知$\boldsymbol{K}\varphi-f=0$，即$\varphi$是(1.1) 的解. 于是，(1.1) 与(3.1) 是等价的.

2° 设$\kappa<0$. 这时我们对未知函数φ用下式换为一新的未知函数ψ:

$$\varphi=\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi, \tag{3.2}$$

于是方程(1.1) 成为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=f. \tag{3.3}$$

与 1° 中同样的理由，(3.3) 也是一个 Fredholm 方程. 我们要证明：它与(1.1) 是等价的；即，(1.1) 与(3.3) 同时可解或否，且当ψ是(3.3) 的解时，则由(3.2) 求得的φ是(1.1) 的解，反之，(1.1) 的任何解均可用(3.3) 的解ψ代入(3.2) 而得到.

如果(3.3) 可解，则(1.1) 必可解. 这是显然的. 现设(1.1) 可解，且φ为其一解. 由于$\boldsymbol{K}^{0\prime}$的指标$\kappa'=-\kappa>0$，故对于这个φ，方程(3.2) 是可解的，即(3.3) 也是可解的. 所以(1.1) 与(3.3) 同时可解或否. 且由于(3.2) 对任何φ总可解，所以，(1.1) 的任何解φ通过(3.2) 所得的ψ必成为(3.3) 的解；

反之，(3.3) 的解 ψ 通过(3.2) 求得的 φ 显然也是(1.1) 的解. 这样，(3.3) 与(1.1) 确实等价.

因此，求(1.1) 的一般解时，可先求出(3.3) 的一般解(假定可解)

$$\psi=\psi_0+\sum_{j=1}^{m}c_j\psi_j, \tag{3.4}$$

其中 ψ_0 是(3.3) 的一特解，$\{\psi_j\}_1^m$ 是 $\boldsymbol{KK}^{0\prime}\psi=0$ 的全解系，$\{c_j\}_1^m$ 是一组任意常数. 然后，便可得(1.1) 的一般解

$$\varphi=\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi_0+\sum_{j=1}^{m}c_j\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi_j. \tag{3.5}$$

如果(3.3) 无解，则(1.1) 也无解.

总之，不论 κ 如何，(1.1) 总可正则化为等价的 Fredholm 方程，其求解问题随之转化为 Fredholm 方程的求解问题.

3.3.2 Noether 定理

现在我们可以把 3.2.3 段中的结果推广到一般的(正则型) 奇异积分方程上来. 亦即，我们有下一定理.

定理 3.3.1 (Noether) 设(1.1) 中的 $\boldsymbol{K}$ 是一正则型奇异算子(L,a,b 等均同 3.1 节)，则

Ⅰ. $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的(线性无关) 解的个数必有限;

Ⅱ. 设 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 与 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的解的个数分别为 l 与 l'，则

$$l-l'=\kappa,$$

这里 κ 是算子 $\boldsymbol{K}$ 的指标，而 $\boldsymbol{K}'$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的相联算子;

Ⅲ. 方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解的充要条件是

$$\int_L\psi_k f\,\mathrm{d}t=0,\quad k=1,2,\cdots,l',$$

其中 $\{\psi_k\}$ 是 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的全解系.

证 Ⅰ 是显然的，因为 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 经正则化后成为 Fredholm 方程，而对后者来说，只有有限个解(参看附录定理 1).

现来证明 Ⅲ. 先设 $\kappa\geqslant0$. 由于 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 等价于(3.1)，故由 Fredholm 方程的理论知，其可解条件为

$$\int_L\omega_j(\boldsymbol{K}^{0\prime}f)\mathrm{d}t=0,\quad j=1,2,\cdots,p, \tag{3.6}$$

其中 $\{\omega_j\}_1^p$ 是(3.1) 的相联方程

$$(\boldsymbol{K}^{0\prime}\boldsymbol{K})'\omega = 0 \text{ 即 } \boldsymbol{K}'\boldsymbol{K}^0\omega = 0 \tag{3.7}$$

的全解系[①]. (3.6) 又可写为(见 3.1.2 段, 8°)

$$\int_L f\boldsymbol{K}^0\omega_j \mathrm{d}t = 0, \quad j = 1,2,\cdots,p. \tag{3.6$'$}$$

由(3.7), 显然 $\psi_j = \boldsymbol{K}^0\omega_j$ 是方程$\boldsymbol{K}'\psi = 0$ 的解. 反之, 从$\boldsymbol{K}'\psi = 0$ 的任一解 ψ 均可由方程$\boldsymbol{K}^0\omega = \psi$找出某些(个)$\omega$与它相对应, 因为$\kappa \geqslant 0$时这方程总是可解的. 于是, f 与一切$\boldsymbol{K}^0\omega_j$ 正交的条件(3.6)$'$ 也就是f 与$\boldsymbol{K}'\psi = 0$ 的一切解正交的条件. 所以 $\kappa \geqslant 0$ 时 Ⅲ 成立.

现设 $\kappa < 0$. 这时, 方程(1.1) 等价于(3.3), 而(3.3) 可解的充要条件为

$$\int_L f\chi_j \mathrm{d}t = 0, \quad j = 1,2,\cdots,q, \tag{3.8}$$

其中$\{\chi_j\}_1^q$ 是方程

$$(\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{0\prime})'\chi = 0 \text{ 即 } \boldsymbol{K}^0\boldsymbol{K}'\chi = 0 \tag{3.9}$$

的全解系. 但因$\kappa < 0$, 故$\boldsymbol{K}^0\omega = 0$ 只有零解, 因此$\boldsymbol{K}^0\boldsymbol{K}'\chi = 0$ 的全解系也是$\boldsymbol{K}'\chi = 0$ 的全解系(故 $q = l'$), 此即 Ⅲ 成立.

最后来证明 Ⅱ. 仍先设$\kappa \geqslant 0$. 这时, $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi = 0$ 的指标$\kappa' \leqslant 0$, 故它只有零解. 因为这时 $\boldsymbol{K}\varphi = 0$ 等价于 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\boldsymbol{K}\varphi = 0$, 故后者解的个数是 l. 它是一 Fredholm 方程, 所以它的相联方程

$$\boldsymbol{K}'\boldsymbol{K}^0\omega = 0 \tag{3.10}$$

也有 l 个解. 求解这方程时, 显然

$$\boldsymbol{K}^0\omega = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \cdots + c_{l'}\psi_{l'}, \tag{3.11}$$

其中$\{\psi_j\}_1^{l'}$ 是$\boldsymbol{K}'\psi = 0$的全解系, $\{c_j\}$ 是一组任意常数. 因为$\kappa \geqslant 0$, 故(3.11) 总可解. 设 $\boldsymbol{K}^0\omega = 0$ 的全解系为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_\kappa$, 且取定 $\boldsymbol{K}^0\omega = \psi_j$ 的一特解χ_j $(j = 1,2,\cdots,l')$, 则(3.11) 的一般解亦即(3.10) 的一般解为

$$\omega = \alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_\kappa\omega_\kappa + c_1\chi_1 + \cdots + c_{l'}\chi_{l'},$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\kappa$ 也是一些任意常数($\kappa = 0$ 时缺这一部分). 今证 $\omega_1,\cdots,\omega_\kappa$, $\chi_1,\cdots,\chi_{l'}$ 线性无关. 设若

$$\beta_1\omega_1 + \cdots + \beta_\kappa\omega_\kappa + \gamma_1\chi_1 + \cdots + \gamma_{l'}\chi_{l'} = 0,$$

经算子 $\boldsymbol{K}^0$ 作用后, 得

$$\gamma_1\psi_1 + \cdots + \gamma_{l'}\psi_{l'} = 0.$$

---

① 注意, 我们曾把求解范围限于满足 H 条件者. 但在所设条件下, 这里得到的 Fredholm 方程的任何解也必 $\in H$.

但$\{\psi_j\}$是线性无关的，故$\gamma_1 = \cdots = \gamma_{l'} = 0$，于是

$$\beta_1\omega_1 + \cdots + \beta_\kappa\omega_\kappa = 0.$$

但$\{\omega_k\}$也是线性无关的，故$\beta_1 = \cdots = \beta_\kappa = 0$. 这就说明$\{\omega_k, \chi_j\}$是线性无关的. 所以，(3.10)解的个数为$\kappa + l'$. 但前已看到，(3.10)应有$l$个解，故

$$l = \kappa + l' \text{ 即 } l - l' = \kappa.$$

再设$\kappa < 0$. 我们把$\boldsymbol{K}'\psi = 0$看做原方程，$\boldsymbol{K}\varphi = 0$则为其相联方程(因为显然$\boldsymbol{K}'' = \boldsymbol{K}$). 因$\boldsymbol{K}'$的指标$\kappa' = -\kappa > 0$，故由前面已经证明的，应有

$$l' - l = \kappa' = -\kappa.$$

所以 Ⅱ 仍成立. □

特别要注意，Noether 定理中结论 Ⅰ 与 Ⅲ 是和 Fredholm 方程的结论相仿的，但结论 Ⅱ 却不一样. 只有当$\kappa = 0$时，它才与 Fredholm 方程的结果相仿：$l = l'$. 因此，当$\kappa = 0$时，方程(1.1)也称为**拟 Fredholm 方程**. 例如，特别，当(1.1)′中的a, b都是常数时，它就是拟 Fredholm 的. 在很多应用问题中，常常出现这后一情况.

注 我们此前的讨论限定奇异积分方程的解$\in H$. 如果允许解在L上可以有一阶奇异性，结果将如何?Noether 定理是否仍成立? 请参看后面 5.4 节.

习　题

1. 把下面的方程正则化：

$$\boldsymbol{K}\varphi = (1+t)\varphi(t) + \frac{1-t}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{t\tau}\varphi(\tau)d\tau = 2t, \quad t \in L,$$

这里假定原点O在L的内部.

答 $\varphi(t) + \frac{1}{4\pi i}\int_L \left(e^{t\tau} - \frac{2}{\tau} + \frac{2\tau}{t}\right)\varphi(\tau)d\tau = t.$

2. 当$\kappa < 0$时，问方程$\boldsymbol{K}\varphi = f$与$\boldsymbol{K}'^0\boldsymbol{K}\varphi = \boldsymbol{K}'^0 f$一般是否等价?

3.4 含周期核的奇异积分方程

3.4.1 Hilbert 核的奇异积分方程

通常所谓 **Hilbert 核的奇异积分方程**，都是指在实域中的方程

$$A(s)u(s) - \frac{B(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\cot\frac{\sigma - s}{2}d\sigma = f(s), \quad 0 < s < 2\pi.$$

我们这里将讨论积分是沿着复平面中曲线上进行的，因此所有变量与函数也是复的. 这是我们在[17] 中最先讨论的. 本段将限于积分曲线为封闭的情形，更一般的情形将留待第五章中再讨论.

设 $L=\sum_{j=1}^{p}L_j$ 由平面中 p 条互不相交的光滑封闭曲线 L_j 所组成，而且把它们沿实轴方向平移 $a\pi$ $(a>0)$ 时，也互不相交(图 3-1)；不失一般性，并假定诸 L_j 均取定反时针向为其正向，且都不通过 $z=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 及其周期合同点 (mod $a\pi$). 我们要讨论下一 Hilbert 核的特征方程的求解问题：

$$\boldsymbol{K}\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\varphi(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t=f(t_0),\quad t_0\in L,\tag{4.1}$$

其中 A,B,f 已给在 L 上，φ 为未知函数，设它们都 $\in H$. 我们只限于讨论正则型情况：$A^2(t)-B^2(t)\neq 0$ 于 L 上.

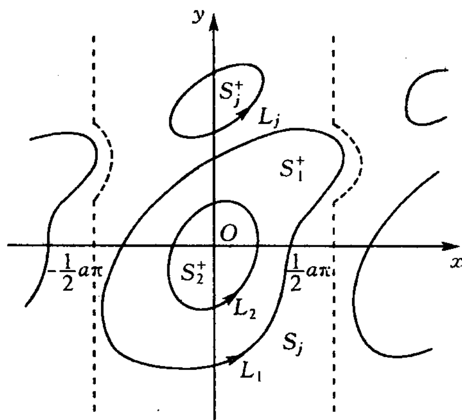


图 3-1

注意，用一相似变换，不失一般性，可以认为(4.1) 中的 $a=1$. 但为了令 $a\to+\infty$ 时可以和 Cauchy 核的特征方程进行比较，我们仍保留 a.

为了求解(4.1)，仿照 3.2.1 段中的方法，令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_L\varphi(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t,\tag{4.2}$$

则 $\Phi(z)$ 是一个以 $a\pi$ 为周期的分区全纯函数，其跳跃曲线为 L 及其周期合同曲线. 因为 $\frac{1}{a}\cot\frac{t-z}{a}$ 的奇异部分与 $\frac{1}{t-z}$ 相同，由推广的 Plemelj 公式，

$$\varphi(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0),\quad t_0\in L,\tag{4.3}$$

而(4.1) 成为

$$\Phi^{+}(t_0) = G(t_0)\Phi^{-}(t_0) + g(t_0), \quad t_0 \in L, \tag{4.4}$$

其中

$$G(t_0) = \frac{A(t_0) - B(t_0)}{A(t_0) + B(t_0)}, \quad g(t_0) = \frac{f(t_0)}{A(t_0) + B(t_0)}. \tag{4.5}$$

注意，因为 $\Phi(z)$ 以 $a\pi$ 为周期，所以如果把 $A(t_0)$,$B(t_0)$ 从而 $G(t_0)$,$g(t_0)$，作 $a\pi$ 的周期延拓(这时 L 成为 L^*)，则(4.4) 可看做 L^* 上的周期 Riemann 边值问题. 此外，由于

$$\lim_{z\to\pm\infty i} \cot\frac{t-z}{a} = \pm i,$$

且极限是一致成立的，所以

$$\Phi(\pm\infty i) = \pm\frac{1}{2a\pi}\int_L \varphi(t)\mathrm{d}t,$$

于是，

$$\Phi(-\infty i) = -\Phi(+\infty i). \tag{4.6}$$

反过来，如果 $\Phi(z)$ 是一以 $a\pi$ 为周期的分区全纯函数，以 L (以及 L^*) 为跳跃曲线，满足边值条件(4.4) 与附加条件(4.6)，则由(4.3) 确定的 $\varphi(t_0)$ 必为(4.1) 的解. 事实上，若把(4.2) 右边的积分暂记为 $\Psi(z)$，则以下诸式成立：

$$\Psi(-\infty i) = -\Psi(+\infty i),$$
$$\varphi(t_0) = \Psi^{+}(t_0) - \Psi^{-}(t_0),$$
$$(A+B)\Psi^{+} - (A-B)\Psi^{-} = \boldsymbol{K}\varphi.$$

由以上诸式得知，$\Phi(z) - \Psi(z)$ 以 $a\pi$ 为周期，在全平面全纯，故必为一常数；而它在 $z = \pm\infty i$ 处大小相等，符号相反，所以$\Phi(z) = \Psi(z)$，于是得(4.1).

这样，我们有

定理 3.4.1 *方程(4.1) 等价于周期 Riemann 边值问题(4.4) 以及附加条件(4.6)；把后一问题的解求出后，(4.1) 的解以(4.3) 给出.*

我们现在可以用 2.8.3 段中 3° 的结果来求解问题(4.4)；不过现在 L 不是一条封闭曲线，而是 p 条，但做法是类似的.

记 L_j 所围内域为 S_j^+，而记 $\overline{S_j^+}$ 在周期带形中的外域为 S_j^-. 注意，周期带形中任意一点，对于不同的 j，可能在 S_j^+ 内，也可能在 S_j^- 内，但 $\pm\infty i$ 在所有的 $S_j^-(j = 1,2,\cdots,p)$ 中. 令

$$\kappa_j = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_j},$$

则 $\kappa=\sum_{j=1}^{p}\kappa_j$ 就是问题(4.4) 的指标，也是方程(4.1) 的指标.

作典则函数时，可仿照 2.2.4 段中的方法进行如下：在每一 S_j^+ 内取定一点 z_j，于是

$$\frac{G(t)}{\left(\tan\frac{t}{a}-\tan\frac{z_j}{a}\right)^{\kappa_j}}$$

当 t 沿 L_j 环行一周时辐角不变. 再令

$$\Gamma_j(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_j}\log\frac{G(t)}{\left(\tan\frac{t}{a}-\tan\frac{z_j}{a}\right)^{\kappa_j}}\cdot\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t,$$

$$X_j(z)=\begin{cases}X_j^+(z)=\mathrm{e}^{\Gamma_j(z)}, & \text{当 } z\in S_j^+ \text{ 时;}\\ X_j^-(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\Gamma_j(z)}}{\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{z_j}{a}\right)^{\kappa_j}}, & \text{当 } z\in S_j^- \text{ 时,}\end{cases}\tag{4.7}$$

则

$$X(z)=X_1(z)X_2(z)\cdots X_p(z)\tag{4.8}$$

便是问题(4.4) 的典则函数. 当 $t_0\in L_j$ 时，

$$X^{\pm}(t_0)=X_1(t_0)\cdots X_{j-1}(t_0)X_j^{\pm}(t_0)X_{j+1}(t_0)\cdots X_p(t_0),$$

其中 $X_r(t_0)$ $(r\neq j)$ 究竟用(4.7) 中哪一式，要由 t_0 属于 S_r^+ 或 S_r^- 而定.

由于 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 属于所有的 S_j^-，故

$$X(\pm\infty\mathrm{i})=\frac{\prod_{j=1}^{p}\mathrm{e}^{\Gamma_j(\pm\infty\mathrm{i})}}{\left(\pm\mathrm{i}-\tan\frac{z_j}{a}\right)^{\kappa_j}}.$$

由此容易算出

$$G_\infty=\frac{X(-\infty\mathrm{i})}{X(+\infty\mathrm{i})}=(-1)^{\kappa}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu},\tag{4.9}$$

这里已令

$$\nu=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_{L_j}\log\frac{G(t)}{\left(\tan\frac{t}{a}-\tan\frac{z_j}{a}\right)^{\kappa_j}}\mathrm{d}t-\frac{2}{a}\sum_{j=1}^{p}\kappa_j z_j.\tag{4.10}$$

下面分几种情况来讨论.

Ⅰ. 设 κ 为偶数. 又分几种子情况：

1° 设 $\kappa>0$. 这时由 3.8.3 段中 3° 的讨论，知问题(4.4) 的一般解(略作

变形）为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}X(z)P_\kappa\left(\tan\frac{z}{a}\right),\quad(4.11)$$

其中

$$P_\kappa(w)=C_0+C_1w+\cdots+C_\kappa w^\kappa$$

为任意系数的 κ 次多项式. 这时附加条件(4.6) 成为

$$P_\kappa(\mathrm{i})+G_\infty P_\kappa(-\mathrm{i})=\frac{1-G_\infty}{a\pi}\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t,$$

或即

$$-\cos\frac{\nu}{2}\,(C_0-C_2+\cdots)+\sin\frac{\nu}{2}\,(C_1-C_3+\cdots)=f_0\sin\frac{\nu}{2},\quad(4.12)$$

其中

$$f_0=\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t.\quad(4.13)$$

当取定 $C_0,C_1,\cdots,C_\kappa$ 满足条件(4.12) 时，方程(4.1) 的一般解为

$$\begin{aligned}\varphi(t_0)=&\frac{X^+(t_0)+X^-(t_0)}{2X^+(t_0)}g(t_0)\\&+\frac{X^+(t_0)-X^-(t_0)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t\\&-\frac{1}{2}[X^+(t_0)-X^-(t_0)]P_\kappa\left(\tan\frac{t_0}{a}\right).\end{aligned}\quad(4.14)$$

如果令

$$A^*(t_0)=\frac{A(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)},\quad B^*(t_0)=\frac{B(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)},$$

$$Z(t_0)=[A(t_0)+B(t_0)]X^+(t_0)=[A(t_0)-B(t_0)]X^-(t_0),$$

$$\boldsymbol{K}^*f\equiv A^*(t_0)f(t_0)-\frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{Z(t)}\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t,$$

则方程(4.1) 的一般解(4.14) 可改写为

$$\varphi(t_0)=\boldsymbol{K}^*f+B^*(t_0)Z(t_0)P_\kappa\left(\tan\frac{t_0}{a}\right),\quad(4.14)'$$

而 P_κ 的系数 $C_0,C_1,\cdots,C_\kappa$ 应满足条件(4.12)；这时，(4.13) 成为

$$f_0=\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{Z(t)}\mathrm{d}t.\quad(4.13)'$$

于是我们得知：当 $\kappa>0$ 时，方程(4.1) 的一般解由(4.14)′ 给出，其中的系数要满足(4.12)，故共含 κ 个独立常数.

2° 设 $\kappa=0$. 这时(4.14) 或(4.14)′ 中的 P_κ 成为一常数 C_0，附加条件

(4.6) 现在成为

$$C_0\cos\frac{\nu}{2}=-f_0\sin\frac{\nu}{2}. \tag{4.15}$$

由此可见，若 ν 不是 π 的(实) 奇数倍，则应取

$$C_0=-f_0\tan\frac{\nu}{2}, \tag{4.16}$$

而方程(4.1) 这时有唯一解

$$\varphi(t_0)=\boldsymbol{K}^*f-f_0\tan\frac{\nu}{2}B^*(t_0)Z(t_0). \tag{4.17}$$

如果 ν 是 π 的奇数倍，则当且仅当 $f_0=0$ 时方程(4.1) 可解，而 C_0 可取任何值，这时方程(4.1) 的一般解为

$$\varphi(t_0)=\boldsymbol{K}^*f+CB^*(t_0)Z(t_0), \tag{4.18}$$

其中 C 为任意常数.

3° 设 $\kappa<0$. 这时问题(4.4) 当且仅当下列条件满足时才可解($\kappa=-1$ 时无以下条件)：

$$\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)}\frac{\sin^{j-1}\frac{t}{a}}{\cos^{j+1}\frac{t}{a}}dt=0,\quad j=1,2,\cdots,-\kappa-1,$$

亦即

$$\int_L\frac{f(t)}{Z(t)}\left(\tan^{j-1}\frac{t}{a}+\tan^{j+1}\frac{t}{a}\right)dt=0,\quad j=1,2,\cdots,-\kappa-1. \tag{4.19}$$

当这些条件满足时，问题(4.4) 有唯一解

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2a\pi i}\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\cot\frac{t-z}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)dt. \tag{4.20}$$

这时，容易算出附加条件(4.6) 为

$$\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)}\left[(1+G_\infty)\tan\frac{t}{a}+i(1-G_\infty)\right]dt=0,$$

或即

$$\int_L\frac{f(t)}{Z(t)}\frac{\sin\left(\frac{t}{a}-\frac{\nu}{2}\right)}{\cos\frac{t}{a}}dt=0. \tag{4.21}$$

如果记

$$f_r=\frac{1}{a\pi i}\int_L\frac{f(t)}{Z(t)}\tan^r\frac{t}{a}\,dt, \tag{4.22}$$

则条件(4.19) 与(4.21) 可合写成(共 $-\kappa$ 个条件)

$$\left.\begin{aligned} &f_0 \sin\frac{\nu}{2} = f_1 \cos\frac{\nu}{2}, \\ &f_0 = -f_2 = f_4 = \cdots, \\ &f_1 = -f_3 = f_5 = \cdots \end{aligned} \quad (\text{下标最多到} -\kappa). \right\} \tag{4.23}$$

当条件(4.23) 满足时，从(4.20) 容易求得方程(4.1) 的唯一解为

$$\varphi(t_0) = \boldsymbol{K}^* f - f_1 B^*(t_0) Z(t_0). \tag{4.24}$$

注意，如果 ν 不是 π 的奇数倍，则由(4.23) 中的第一个条件，还可把解(4.24) 写成

$$\varphi(t_0) = \boldsymbol{K}^* f - f_0 \tan\frac{\nu}{2}\, B^*(t_0) Z(t_0),$$

其形式与(4.17) 同.

于是我们得到：当 $\kappa < 0$ 时，*方程(4.1) 可解的充要条件是(4.23) 成立(共 $-\kappa$ 个条件)；当它们满足时，它有唯一解(4.24). 特别，如果 ν 不是 π 的*奇数倍，这个解可写成(4.17). 对于齐次方程 $\boldsymbol{K}\varphi = 0$，当 $\kappa < 0$ 时显然只有零解.

易见，(4.1) 解的广义自由度为 κ.

Ⅱ. 设 κ 为奇数. 这时，只要把 Ⅰ 中的 ν 改为 $\nu + \pi$，就可得类似结果(这时当然不会出现 $\kappa = 0$ 的情况). 详情从略.

习　题

1. 试论述方程(4.1) 的 Noether 定理.
2. 讨论方程(4.1) 的相联方程的求解问题.
3. 验证当 $a \to +\infty$ 时本段中结果化为通常 Cauchy 核特征方程的结果.
4. 从本段结果推导 Hilbert 核奇异积分的反演公式.

3.4.2 含 ζ 函数核的奇异积分方程

作为双周期 Riemann 边值问题(2.9 节) 的应用，我们来求解含有 ζ 函数(见 2.9.1 段) 核的两类奇异积分方程.

1° 求解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}\varphi &\equiv a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i}\int_{L_0} \varphi(t)[\zeta(t - t_0) + \zeta(t_0)]\mathrm{d}t \\ &= f(t_0), \quad t_0 \in L_0, \end{aligned} \tag{4.25}$$

其中 L_0 为基本胞腔 P 中的一条光滑封闭曲线，以反时针向为正向，所出现的函数均设 $\in H$，且 $a^2 - b^2 \neq 0$.

与前相仿，令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\varphi(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt,\quad z\overline{\in}L,\tag{4.26}$$

它是双周期的分区全纯函数，周期仍为$2\omega_1, 2\omega_2$，它在$z=0$处至多有一阶极点. 于是(4.25)立即可化为DR边值问题(4.4)，其中L为L_0经双周期延拓后的诸合同曲线之并，而

$$G(t_0)=\frac{a(t_0)-b(t_0)}{a(t_0)+b(t_0)},\quad g(t_0)=\frac{f(t_0)}{a(t_0)+b(t_0)},$$

这里已设a,b,f均已经双周期延拓. 所以，如果$\varphi(t)$是(4.25)的解，则由(4.26)求得的$\Phi(z)$必为DR_1问题(4.4)的解(即要求在$z=0$处至多有1阶极点).

反过来，如果$\Phi(z)$是(4.4)在DR_1中的解，令$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$，并由它经(4.26)作出的函数若记为$\Psi(z)$，显然$\varphi(t)=\Psi^+(t)-\Psi^-(t)$，从而$\Phi(z)-\Psi(z)$是一椭圆函数，在$P$中至多只能有一个单极点$z=0$，这不可能，除非它是一常数$C$. 于是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\varphi(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt+C.$$

但想由此出发，用Plemelj公式算出的$\varphi(t)$为(4.25)的解，通过直接验算，知必$C=0$①. 这就是说，从(4.4)在DR_1中的解$\Phi(z)$求出的

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),\quad t\in L_0,$$

当且仅当

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)][\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt,\quad z\overline{\in}L\tag{4.27}$$

时才是(4.25)的解. 注意到$\Phi^\pm(z)$与$\zeta(z)$的性质，可知(4.27)当$z\in S_0^+$时等价于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\Phi^-(t)\zeta(t-z)dt=0,\quad z\in S_0^+.$$

又因

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\Phi^-(t)[\zeta(t-z)-\zeta(t)]dt=0,\quad z\in S_0^+,$$

上述条件又可简化为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\Phi^-(t)\zeta(t)dt=0.\tag{4.28}$$

在这一条件下，可以验证当$z\in S_0^-$时条件(4.27)必成立. 如果以γ_1,γ_2分别记P两邻边$-\omega_1-\omega_2$到$\omega_1-\omega_2$和$\omega_1-\omega_2$到$\omega_1+\omega_2$，则条件(4.28)又可写为

---

① 已假定$b(t)$不恒等于零，否则(4.25)无讨论的必要.

$$\eta_1\int_{\gamma_2}\Phi^-(t)\mathrm{d}t=\eta_2\int_{\gamma_1}\Phi^-(t)\mathrm{d}t. \tag{4.28$'$}$$

这样，我们有

引理 3.4.1 奇异积分方程(4.25)等价于 DR_1 问题(4.4)以及附加条件(4.28)或即(4.28)$'$.

根据这一引理，区别 $\kappa=\mathrm{Ind}_{L_0}G(t)$ 的不同情况进一步进行讨论就不再有什么困难了.

我们只来应用这一引理于下一反演问题：已给 $f(t)\in H$，求 $\varphi(t)\in H$ 使适合

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\varphi(t)[\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0)]\mathrm{d}t=f(t_0),\quad t_0\in L_0. \tag{4.29}$$

现在 $a=0$，$b=1$，这时 $\kappa=0$，而 $G(t)=-1$. 由第二章(9.23),(9.28),(9.29)，得 $G_*=0$，$h(z)=1$，从而可令

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\pi\mathrm{i}, & \text{当 } z\in S^+ \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } z\in S^- \text{ 时},\end{cases}$$

于是，再由第二章(9.31),(9.32)，得知

$$\Phi^{\pm}(z)=\pm\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}f(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t\pm C,$$

其中 C 为某常数. 从而

$$\Phi^-(t_0)=\frac{1}{2}f(t_0)-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}f(t)[\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0)]\mathrm{d}t-C.$$

将此式代入(4.28)$'$，便可求出附加条件. 注意到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\zeta(t_0)\zeta(t-t_0)\mathrm{d}t_0=\frac{1}{2}\zeta(t),\quad t\in L_0$$

(此由推广的留数定理易知)以及

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\zeta(t_0)\mathrm{d}t_0=1,$$

并且这时(4.28)中的积分次序可以交换，立即可以看出这一附加条件实即 $C=0$. 于是我们得到反演公式

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}f(t)[\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0)]\mathrm{d}t,\quad t_0\in L_0. \tag{4.29$'$}$$

(4.29),(4.29)$'$ 显然可以互易. 这是一对反演公式.

2° 作为另一应用，我们来求解方程

$$a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{b(t_0)}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\varphi(t)\zeta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0),\quad t_0\in L_0, \tag{4.30}$$

一切假设同前.

设 $\varphi(t)$ 是(4.30) 的解，仍令(4.26) 如前，则有

$$\Phi^+(t_0) = G(t_0)\Phi^-(t_0) + \frac{f(t_0)+2\lambda b(t_0)\zeta(t_0)}{a(t_0)+b(t_0)}, \quad t_0 \in L_0, \tag{4.31}$$

其中 $G(t_0)$ 同前，但这里已令

$$\lambda = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\varphi(t)\mathrm{d}t. \tag{4.32}$$

但应注意，$\Phi(z)$ 是双周期的，在 $z=0$ 处可能有一阶极点，其留数为 λ.

如果把 $a(t)$,$b(t)$ 作双周期延拓，而把 $f(t)$ 作如下的延拓：

$$f(t_0+2k_1\omega_1+2k_2\omega_2) = f(t_0) - 2\lambda b(t_0)(2k_1\eta_1+2k_2\eta_2), \quad t_0 \in L_0, \tag{4.33}$$

则(4.31) 中的 t_0 可看做 $\in L$，从而它就成为一个 DR_1 问题.

反过来，设 $\Phi(z)$ 为上述 DR_1 问题的解，其中 λ 暂时看做一已知常数(它就是 $\Phi(z)$ 在 $z=0$ 处的留数). 仍令 $\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$. 首先立刻可以看出，(4.32) 成立. 然后与 1° 中类似地讨论，最后又得可解条件(4.28) 或即(4.28)′.

于是我们有

引理3.4.2 方程(4.30) 等价于 DR_1 问题(4.31)，其中 f 已如(4.33) 那样延拓，λ 为一待定常数，正好是 $\Phi(z)$ 在 $z=0$ 处的留数.

由此出发就可详细进行讨论并得出结果.

下面也只考虑反演问题：已给 $f(t)\in H$，求解

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\varphi(t)\zeta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0), \quad t_0 \in L_0. \tag{4.34}$$

这时可得

$$\Phi^{\pm}(z) = \pm\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}[f(t)+2\lambda\zeta(t)][\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t + C.$$

当 $z\in S_0^-$ 时，

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\zeta(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t = -\zeta(z),$$

所以

$$\Phi^-(z) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}f(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t + C.$$

因此，如同 1° 中反演问题的讨论，附加条件(4.28) 也是 $C=0$. 所以，

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}[f(t)+2\lambda\zeta(t)][\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t.$$

它在 $z=0$ 处(可能)有单极点，其留数显然是

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0} f(t)\mathrm{d}t+2\lambda.$$

为了满足上面一般结果中的条件，它必须等于 λ，即

$$\lambda=-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0} f(t)\mathrm{d}t.$$

这样，

$$\begin{aligned}\varphi(t_0)&=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)\\&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}[f(t)+2\lambda\zeta(t)][\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0)]\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0} f(t)\zeta(t-t_0)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0} f(t)[\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0)]\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{\lambda}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\zeta(t)\zeta(t-t_0)\mathrm{d}t+\frac{\lambda}{\pi \mathrm{i}}\zeta(t_0)\int_{L_0}\zeta(t)\mathrm{d}t-\lambda\zeta(t_0)\\&=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0} f(t)\zeta(t-t_0)\mathrm{d}t+\frac{\zeta(t_0)}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0} f(t)\mathrm{d}t+2\lambda\zeta(t_0).\end{aligned}$$

于是最后得

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0} f(t)\zeta(t-t_0)\mathrm{d}t. \tag{4.34$'$}$$

(4.34),(4.34)′ 又构成一对互易的反演公式.

习　题

1. 试完成 1°,2° 中的一般讨论.
2. 试直接验证本段中的两对反演公式.
3. 如果 $\omega_1=\frac{a\pi}{2}\,(>0)$ 而令 $\omega_2\to+\infty \mathrm{i}$，验证本段中的结果就成为上段中的结果.

3.5　一类奇异积分方程的直接解法

5.1　引言

前面在 3.3 节中，已讨论了奇异积分方程

$$a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L. \tag{5.1}$$

在正则型 $a(t)\pm b(t)\neq 0$ 的情况下(这里 $b(t)=K(t,t)$)，可把它正则化为 Fredholm 积分方程，这里 L 可为有限条互不相交的光滑封闭曲线，而 a,K,f,φ 均 $\in H$. 但这一正则化手续一般说来比较麻烦，且求解后者一般也较困难，又(5.1) 的可解条件是要求 $f(t)$ 与其相联方程的所有解正交，而要求出这些解又是麻烦和困难的. 因此，在(5.1) 的系数 $a(t)$ 与核密度函数 $K(t,\tau)$ 的某些特殊情况下若能找到(5.1) 的某种直接求解的方法无论从实用或计算的角度来看都是非常有用的.

设 L 已取定正向如图 1-19 (a)，使其正(左)侧构成一有界区域 D^+，其补域为 D^-. 若 $K(t,\tau)$ 能分别在 $D^\pm$ 中关于 t 作解析延拓，Ф. Д. Гахов[36] 曾指出：与通常求解特征方程时类似，问题可化为 Riemann 边值问题而求解. 这时可令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(z,\tau)}{\tau-z}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad z\overline{\in} L, \tag{5.2}$$

然后仿照求解特征方程时的方法去做，因为对于(5.2) 定义的 $\Phi(z)$，Plemelj 公式仍成立①. 但我们指出，问题并不如此简单，因为由(5.2) 定义的 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处的性状比较复杂，从而由此来确定求解相应 R 问题时产生的整函数（现在一般说来已不再是多项式了）的性质不易确定，这就给最后求解带来相当的困难.

1965 年，A. S. Peters[33] 讨论了这样的情况：$a(t),K(t,\tau)$ 当 $t,\tau\in\overline{D}=D^++L$ 时为全纯函数，则在正则型情况下，(5.1) 可以既不必正则化为 Fredholm 方程，也不必化为 R 问题而可直接求解，且解可写成封闭形式. 其后不久，K. M. Case[30] 在类似条件下，把方程(5.1) 部分地化为 R 问题然后再转化为 Fredholm 方程，并指出后者易于求解，从而可得类似结果. 1969 年，С. Г. Самко[47] 再次考虑上述问题，把(5.1) 整个转化为 R 问题，指出可以把解写成封闭形式，并对 $a(t)$ 与 $K(t,\tau)$ 所要求的条件稍稍放宽，得出了一些结果.

继 Peters 之后这些人的研究，除较简单的情况外，并未把解特别是可解条件写成显式，因此运用起来极不方便，就是 Peters 本人，虽然在正则型情况下把解写成了比较便于运用的形式，但可解条件仍显得较复杂不便检验，且对 $b(t)$ 不必要地要求它在 L 上不取零值，同时还只限于 $a(t)\pm b(t)$ 在 D^+

① 参看后面引理 3.5.1 下面的说明.

内没有公共零点的情况. 我们在1975年[19],[20]中，简化了Peters的方法，对之作了仔细的分析，解除了一些不必要的限制，在较一般的情况下，把解及可解条件都写成了明显的封闭形式，因此极便于应用. 本节即将论述这些结果.

以后的论证基于下面这一推广的 Plemelj-Privalov 引理.

引理3.5.1 设

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{k(z,\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau, \quad z\in D^+,$$

其中 $k(z,\tau)$ 当 $\tau\in L$ 时对 $z\in D^+$ 全纯，对 $z\in \overline{D}$ 时连续，且 $k(t,\tau)$ 当 t,τ 都 $\in L$ 时 $\in H$，则 $\Phi(z)$ 在 D 内全纯，在 $\overline{D}$ 上 $\in H$，且

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{2}k(t,t)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{k(t,\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau, \quad t\in L. \tag{5.3}$$

证 在第一章中，在略为不同的条件下曾证明(5.3)式(见定理1.4.2)①. 现在用直接方法证明本引理. 由 Cauchy 公式，

$$k(z,\tau)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{k(t,\tau)}{t-z}\mathrm{d}t, \quad z\in D^+, \tau\in L,$$

这里 τ 只是一个参数. 以此式代入 $\Phi(z)$ 中，可得

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{k_1(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{k_2(t)}{t-z}\mathrm{d}t, \tag{5.4}$$

这里已令

$$k_1(\tau)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{k(t,\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}t, \quad k_2(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{k(t,\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau.$$

在所设条件下，$k_1(\tau),k_2(t)\in H$ 于 L 上. 这样，由(5.4)便知 $\Phi(z)$ 在 D^+ 内全纯，在 $\overline{D}$ 上 $\in H$.

为了证明(5.3)，只要在(5.4)中运用 Plemelj 公式，然后再应用 Poincaré-Bertrand 积分换序公式即可. □

注 如果 $k(z,\tau)$ 当 $\tau\in L$ 时，对 z 只在 L 的正侧某范围内可以解析开拓，则仍有(5.3)式. 若它在 L 的负侧某范围内可以解析开拓，则也可得另一 Plemelj 公式.

习　题

1. 在引理3.5.1中，把 D^+ 改为 D^-，并理解 $\overline{D}$ 为 D^-+L (这时设 $k(z,\tau)$ 当 $\tau\in L$ 时对 z 在 D^- 内包括 ∞ 点在内全纯)，求证引理仍成立.

---

① 由定理1.4.2，立即可知(5.3)成立，但不能得出 $\Phi(z)$ 在 $\overline{D}$ 上 $\in H$.

3.5.2 求解的一般方法

设L如前，已取定正向，使其左侧为一有界区域D^+. 现设$a(z)$在D^+内全纯，在$\overline{D}=D^++L$上$\in H$；$K(z,\zeta)$当$\zeta\in\overline{D}$时对z在D^+内全纯，当$z\in\overline{D}$时，对ζ在D^+内全纯，且在$\overline{D}$上对$z,\zeta\in H$；$f(t)\in H$于L上. 记$b(z)=K(z,z)$，它在D内全纯，在$\overline{D}$上$\in H$. 我们将假定(5.1)是正则型的：

$$a(t)\pm b(t)\neq 0,\quad t\in L. \tag{5.5}$$

问题的关键在于$a(z)\pm b(z)$在D^+内零点的分布. 设$a(z)+b(z)$在D^+内以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为零点，分别有重数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$；$a(z)-b(z)$在$D^+$内以$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$为零点，分别有重数$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$. 这里$\alpha_k$与$\beta_j$间可能有相同者. 方程(5.1)的指标容易算出为

$$\kappa=\mathrm{Ind}_L\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}=\sum_{j=1}^{n}\mu_j-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k=\mu-\lambda. \tag{5.6}$$

暂时假定(5.1)有解$\varphi(t)$(它必$\in H$)，以(5.2)式定义$\Phi(z)$，其中$z\in D^+$，则由引理3.5.1，$\Phi(z)$在D^+内全纯，且在L上有左边值

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{2}b(t)\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau,\quad t\in L. \tag{5.7}$$

它也必$\in H$. 以此代入方程(5.1)，可知

$$\varphi(t)=\frac{f(t)-2\Phi^+(t)}{a(t)-b(t)}. \tag{5.8}$$

再代回(5.2)，则有

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{K(z,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}d\tau\\&\quad-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(z,\tau)\Phi^+(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{K(z,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}d\tau-\frac{2b(z)\Phi(z)}{a(z)-b(z)}\\&\quad-2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{res}\left\{\frac{K(z,\tau)\Phi^+(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}\right\}_{\tau=\beta_j}\end{aligned}$$

(这里已设$z\neq\beta_j$，而令$\Phi(\beta_j)$为当$z\to\beta_j$时其极限值)，或即

$$\begin{aligned}&\frac{a(z)+b(z)}{a(z)-b(z)}\Phi(z)\\&\quad=F(z)-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}\mathrm{res}\left\{\frac{K(z,\tau)(\tau-\beta_j)^r}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}\right\}_{\tau=\beta_j}\cdot\frac{\Phi^{(r)}(\beta_j)}{r!},\end{aligned}$$

这里已令

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(z,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}\mathrm{d}\tau,\quad z\in D^+,\tag{5.9}$$

它是 D^+ 内的已知全纯函数.

于是我们得出

$$\Phi(z)=\frac{a(z)-b(z)}{a(z)+b(z)}\left[F(z)-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}B_{jr}(z)\Phi^{(r)}(\beta_j)\right],\tag{5.10}$$

其中已令

$$\begin{aligned}B_{jr}(z)&=\frac{1}{r!}\mathrm{res}\left\{\frac{K(z,\tau)(\tau-\beta_j)^r}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}\right\}_{\tau=\beta_j}\\&=\frac{1}{r!(\mu_j-r-1)!}\left[\frac{\partial^{\mu_j-r-1}}{\partial\tau^{\mu_j-r-1}}\frac{K(z,\tau)}{D_j(\tau)(\tau-z)}\right]_{\tau=\beta_j},\\&\qquad r=0,1,\cdots,\mu_j-1;\ j=1,2,\cdots,n,\end{aligned}\tag{5.11}$$

这里已令 $a(\tau)-b(\tau)=(\tau-\beta_j)^{\mu_j}D_j(\tau)$.

为使方程(5.1)可解，显然以下两点必须满足：

1° 当把 $z=\beta_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 代入(5.10)及其直到 μ_j-1 阶导数时，两边不能出现矛盾；

2° (5.10)右边确实是 D^+ 内的全纯函数.

令 $C_{jr}=\Phi^{(r)}(\beta_j)$ 为待定常数. 根据这两个要求可得出 C_{jr} 的一线代数方程组. 这方程组的相容性条件因而是(5.1)有解的必要条件. 我们来证明，这种相容性条件也是(5.1)可解的充分条件. 设这方程组相容，并把解得的 C_{jr} 代替(5.10)中的 $\Phi^{(r)}(\beta_j)$，则得

$$\Phi(z)=\frac{a(z)-b(z)}{a(z)+b(z)}\left[F(z)-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}C_{jr}B_{jr}(z)\right].\tag{5.12}$$

在此式中令 $z\to t$ 取边值(由引理3.5.1，对 $F^+(t)$ 的 Plemelj 公式成立，且 $F^+(t)\in H$ 无疑)，代入(5.8)，便得

$$\begin{aligned}\varphi(t)=&\frac{a(t)f(t)}{a^2(t)-b^2(t)}-\frac{1}{a(t)+b(t)}\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-t)}\mathrm{d}\tau\\&+\frac{1}{a(t)+b(t)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}C_{jr}^{*}B_{jr}(t),\end{aligned}\tag{5.13}$$

这里已令 $C_{jr}^{*}=4C_{jr}$. 所以，如果(5.1)可解，必是(5.13)的形式. 但若 $\varphi(t)$ 由(5.13)给出，既然1°已告满足，从而(5.8),(5.10)均成立，因此(5.2)和(5.7)也成立，最后便知(5.1)成立.

于是，我们不仅证明了由要求1°,2°所得的 C_{jr} 的线方程组相容性为方程

(5.1) 可解的必要充分条件，且知当它们满足时，(5.1) 的一般解就是 (5.13)，其中 $C_{jr}=\frac{1}{4}C_{jr}^*$ 则是该方程组的一般解组. 这就构成了求解方程 (5.1) 的一般原则.

具体运用上述原则时，注意到下述情况就可使方法大大简化. 即，对于 $a(z)-b(z)$ 的那些零点 β_j，而不同时又是 $a(z)+b(z)$ 的零点 α_k 来说，要求 1° 肯定满足，因而不需检验. 我们来证明这一点.

设某 β_j 不等于任何 α_k. 对于这个 β_j 来说，要求 1° 就等于要求下列二函数：

$$[a(z)+b(z)]\Phi(z) \text{ 与 } -2[a(z)-b(z)]\sum_{r=0}^{\mu_j-1}B_{jr}(z)\Phi^{(r)}(\beta_j)$$

在 $z=\beta_j$ 处从 0 阶直到 μ_j-1 阶导数分别有相同之值，因为(5.10) 右边其他各项在 β_j 点有 μ_j 阶零点. 今改写

$$B_{jr}(z)=\frac{1}{r!(\mu_j-r-1)!}\left[\frac{\partial^{\mu_j-r-1}}{\partial\tau^{\mu_j-r-1}}\frac{b(\tau)}{D_j(\tau)(\tau-z)}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^{\mu_j-r-1}}{\partial\tau^{\mu_j-r-1}}\frac{K(z,\tau)-b(\tau)}{D_j(\tau)(\tau-z)}\right]_{\tau=\beta_j},$$

则根据同样的理由，只要比较函数 $b(z)\Phi(z)$ 与

$$-[a(z)-b(z)]\sum_{r=0}^{\mu_j-1}\frac{1}{r!(\mu_j-r-1)!}\left[\frac{\partial^{\mu_j-r-1}}{\partial\tau^{\mu_j-r-1}}\frac{b(\tau)}{D_j(\tau)(\tau-z)}\right]_{\tau=\beta_j}\cdot\Phi^{(r)}(\beta_j),$$

或者，若记 $H_j(z)=\frac{b(z)}{D_j(z)}$，则只要比较(为简明起见，下面暂时略去附标 j)

$F_1(z)=H(z)\Phi(z)$ 与

$$F_2(z)=(z-\beta)^{\mu}\sum_{r=0}^{\mu-1}\frac{1}{r!(\mu-r-1)!}\left[\frac{\partial^{\mu-r-1}}{\partial\tau^{\mu-r-1}}\frac{H(\tau)}{z-\tau}\right]_{\tau=\beta}\cdot\Phi^{(r)}(\beta)$$

就可以了. 但

$$F_2(z)=\left[H(\beta)+H'(\beta)(z-\beta)+\cdots+\frac{H^{(\mu-1)}(\beta)}{(\mu-1)!}(z-\beta)^{\mu-1}\right]\Phi(\beta)$$
$$+\left[H(\beta)(z-\beta)+H'(\beta)(z-\beta)^2+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{H^{(\mu-2)}(\beta)}{(\mu-2)!}(z-\beta)^{\mu-1}\right]\Phi'(\beta)+\cdots$$
$$+H(\beta)(z-\beta)^{\mu-1}\frac{\Phi^{(\mu-1)}(\beta)}{(\mu-1)!}$$
$$=H(\beta)\Phi(\beta)+\left\{[H(z)\Phi(z)]'\right\}_{z=\beta}(z-\beta)+\cdots$$
$$+\left\{[H(z)\Phi(z)]^{(\mu-1)}\right\}_{z=\beta}\frac{(z-\beta)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}$$

正好是 $F_1(z)$ 在 $z=\beta$ 处的 Taylor 展式的前 μ 项. 这就证实了我们的论断.

对于那些同时也是 $a(z)+b(z)$ 的零点的 β_j，要求 1° 就不能说是无条件成立的了. 总之，要求 1° 可简化为

1°° 把同时又为 $a(z)+b(z)$ 的零点的 β_j 代入(5.10) 及其直到 μ_j-1 阶导数时，两边不出现矛盾.

至于条件 2° 则很清楚. 因为 $\dfrac{a(z)-b(z)}{a(z)+b(z)}$ 在 $z=\alpha_k$ 处可能有 $\lambda_k'\leqslant\lambda_k$ 阶极点(也可能根本不是极点)，因此，为了保证 $\Phi(z)$ 在 D^+ 内全纯，只须(5.10) 右边方括号中的函数有 λ_k' 阶零点即可(如果 α_k 不是它的极点，则 2° 对于这个 α_k 而言，也无条件成立).

3.5.3 $a(z)\pm b(z)$ 无相同零点的正则型情况

这一情况就是前面提到的 Peters 曾经不完全地研究过的.

这时要求 1° 自动满足. 因此(5.1) 的可解条件就是由 2° 引出的线方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}B_{jr}^{(s)}(\alpha_k)C_{jr}^{*}=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{a(\tau)-b(\tau)}\left[\frac{\partial^s}{\partial z^s}\frac{K(z,\tau)}{\tau-z}\right]_{z=\alpha_k}\mathrm{d}\tau,$$
$$s=0,1,\cdots,\lambda_k-1;\ k=1,2,\cdots,m \tag{5.14}$$

相容. 为便于应用，我们还可将(5.14) 稍加简化. 记

$$K_{jr}(z)=\left[\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}\frac{K(z,\tau)}{\tau-z}\right]_{\tau=\beta_j}, \tag{5.15}$$

则显然

$$B_{jr}(z)=\sum_{\rho=0}^{\mu_j-r-1}\gamma_{jr}^{\rho}K_{j\rho}(z),$$

其中 γ_{jr}^{ρ} 是某些常数. 于是

$$\sum_{r=0}^{\mu_j-1}C_{jr}^{*}B_{jr}(z)=\sum_{r=0}^{\mu_j-1}c_{jr}K_{jr}(z),$$

其中 c_{jr} 是一些新的待定常数. 这样，可解条件(5.14) 现在可改写为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}K_{jr}^{(s)}(\alpha_k)c_{jr}=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{a(\tau)-b(\tau)}\left[\frac{\partial^s}{\partial z^s}\frac{K(z,\tau)}{\tau-z}\right]_{z=\alpha_k}\mathrm{d}\tau,$$
$$s=0,1,\cdots,\lambda_k-1;\ k=1,2,\cdots,m, \tag{5.16}$$

这里，由(5.15)，

$$K_{jr}^{(s)}(\alpha_k)=\left[\frac{\partial^{s+r}}{\partial t^s\partial\tau^r}\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\right]_{\substack{t=\alpha_k\\ \tau=\beta_j}}. \tag{5.17}$$

当这些条件满足时，(5.1) 的一般解(5.13) 现在可改写为

$$\varphi(t)=\frac{a(t)f(t)}{a^2(t)-b^2(t)}-\frac{1}{a(t)+b(t)}\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-t)}\mathrm{d}\tau$$

$$+\frac{1}{a(t)+b(t)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}c_{jr}K_{jr}(t),\tag{5.18}$$

其中 c_{jr} 是方程组(5.16) 的任意解组.

下面举两个例子说明上面方法的运用.

例 1 求解奇异积分方程

$$\varphi(t)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\sqrt{1-t\tau}}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L,$$

其中 L 为单位圆周 $|t|=1$，已取定反时针向为正向，而 $\sqrt{1-z\zeta}$ 是当 $z=0$ 或 $\zeta=0$ 时取 $+1$ 的那一支(它在 $|z|\leqslant1$ 与 $|\zeta|\leqslant1$ 中符合我们的要求)，且 $f(t)\in H$.

解 这里 $K(t,\tau)=\sqrt{1-t\tau}$ 符合我们的要求. 注意现在

$$a(t)=1,\quad b(t)=\sqrt{1-t^2},$$

易证 $a(z)+b(z)$ 在 $|z|<1$ 内无零点，而 $a(z)-b(z)$ 在 $z=0$ 处有一个二重零点. 这时可解条件(5.16) 不存在，即方程无条件可解. 这时对于 $\beta=0$ (略去下标 j)，由(5.15)，容易算出

$$K_0(t)=\frac{K(t,0)}{-t}=-\frac{1}{t},$$

$$K_1(t)=\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\right]_{\tau=0}=\frac{t^2-2}{2t^2},$$

因此，由(5.18) 知，方程的一般解为

$$\varphi(t)=\frac{f(t)}{t^2}-\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\sqrt{1-t\tau}f(\tau)}{(1-\sqrt{1-\tau^2})(\tau-t)}\mathrm{d}\tau$$

$$+\frac{c_1t+c_2(t^2-2)}{(1+\sqrt{1-t^2})t^2},$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

例 2 L 同例 1，求解方程

$$t\varphi(t)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\sqrt{1-t\tau}}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L,$$

其中 $\sqrt{1-t\tau}$ 仍取例 1 中的那一支，$f(t)$ 仍 $\in H$.

解 本题中 $a=t$, $b=\sqrt{1-t^2}$，易见在 $|z|<1$ 中，$a(t)+b(t)$ 有唯一单零点 $\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$a(t)-b(t)$ 有唯一单零点 $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 这时(5.16) 成为

$$\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-\sqrt{1-\tau^2}}\frac{K\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\tau\right)}{\tau+\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}\tau,$$

由此立得

$$c=\frac{2}{\sqrt{3}\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}\tau}}{1+\sqrt{2}\tau}\mathrm{d}\tau,$$

其中$\sqrt{2+\sqrt{2}\tau}$为当$\tau=0$时取$\sqrt{2}$的一支. 此外，由(5.17)求得的

$$K_{10}(t)=\frac{K\left(t,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}-t}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}t}}{1-\sqrt{2}t},$$

这里$\sqrt{2-\sqrt{2}t}$为当$t=0$时取$\sqrt{2}$的一支. 于是，由(5.18)知，所求方程的一般解为

$$\varphi(t)=\frac{tf(t)}{2t^2-1}-\frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\sqrt{1-t\tau}f(\tau)}{(\tau-\sqrt{1-\tau^2})(\tau-t)}\mathrm{d}\tau$$
$$+\frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}t}}{\sqrt{3}(t+\sqrt{1-t^2})(1-\sqrt{2}t)}$$
$$\cdot\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}\tau}f(\tau)}{(\tau-\sqrt{1-\tau^2})(1+\sqrt{2}\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

习　　题

1. 求解方程

$$\varphi(t)+\frac{\cos t}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\int_L\mathrm{e}^{t\tau}\sin\tau\,\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\cos t\right)\cot t-\frac{\cos t}{t},\quad t\in L,$$

其中 L 为$|t|=1$，并已取定反时针向为正向.

答　$\varphi(t)=\cot t.$

2. 在(5.1)式中两边乘以$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\frac{1}{t-t_0}$ $(t_0\in L)$并沿 L 对 t 积分，将会得出么方程？可否用此法求解(5.1)？

3. 设 L 如图 1-19 (b). 若把本段中讲到的区域理解为 L 所围的外域(包∞点为其内点)，则可作出怎样的类似结果？

3.5.4 $a(z)\pm b(z)$ 无相同零点的非正则型情况

L 仍同前. $a(z),K(z,\zeta)$ 的假设条件也同前. $a(z)\pm b(z)$ 在 D^+ 内的零点 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m;\beta_1,\cdots,\beta_n$ 及其重数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m;\mu_1,\cdots,\mu_n$ 均同前；但现设它们在 L 上还分别有单零点 $\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_{m+p};\beta_{n+1},\cdots,\beta_{n+q}$. 因此我们可以写

$$a(z)+b(z)=(z-\alpha_k)^{\lambda_k}S_k(z),\quad S_k(\alpha_k)\neq 0\ (k>m\text{ 时 }\lambda_k=1);$$

$$a(z)-b(z)=(z-\beta_j)^{\mu_j}D_j(z),\quad D_j(\beta_j)\neq 0\ (j>n\text{ 时 }\mu_j=1).$$

为简明起见，我们仍只限于所有 $\alpha_k\neq\beta_j$ 的情况. 此外，我们还假定 $f'(t)\in H$，并仍要求方程(5.1) 的连续解，当然也必 $\varphi(t)\in H$.

仍令 $\Phi(z)$ 如(5.2). 取其边值代入(5.1) 后仍得(5.8). 将它代回(5.2)，由推广的留数定理(1.7.3 段)，我们得到(注意(5.9) 式)

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=F(z)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(z,\tau)\Phi^+(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}\mathrm{d}\tau\\&=F(z)-\frac{2b(z)\Phi(z)}{a(z)-b(z)}-2\sum_{j=1}^{n}\operatorname{res}\left\{\frac{K(z,\tau)\Phi^+(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}\right\}_{\tau=\beta_j}\\&\quad-\sum_{j=n+1}^{n+q}\operatorname{res}\left\{\frac{K(z,\tau)\Phi^+(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}\right\}_{\tau=\beta_j}.\end{aligned}$$

由此即得

$$\begin{aligned}\Phi(z)=\frac{a(z)-b(z)}{a(z)+b(z)}\Bigg[&F(z)-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}B_{jr}(z)\Phi^{(r)}(\beta_j)\\&-\sum_{j=n+1}^{n+q}B_j(z)\Phi^+(\beta_j)\Bigg],\end{aligned}\tag{5.19}$$

其中已令

$$\begin{aligned}B_{jr}(z)&=\frac{1}{r!}\operatorname{res}\left\{\frac{K(z,\tau)(\tau-\beta_j)^r}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}\right\}_{\tau=\beta_j}\\&=\frac{1}{r!(\mu_j-r-1)!}\left[\frac{\partial^{\mu_j-r-1}}{\partial\tau^{\mu_j-r-1}}\frac{K(z,\tau)}{D_j(\tau)(\tau-z)}\right]_{\tau=\beta_j},\\&\qquad r=0,1,\cdots,\mu_j-1;\ j=1,2,\cdots,n,\end{aligned}\tag{5.20}$$

$$B_j(z)=\frac{K(z,\beta_j)}{D_j(\beta_j)(\beta_j-z)},\quad j=n+1,n+2,\cdots,n+q.\tag{5.21}$$

但应注意，为了保证 $\varphi(t)$ 在 L 上连续，由(5.8)，必须

$$\Phi^+(\beta_j)=\frac{1}{2}f(\beta_j),\quad j=n+1,n+2,\cdots,n+q.\tag{5.22}$$

这样，(5.19) 可改写为

$$\Phi(z)=\frac{a(z)-b(z)}{a(z)+b(z)}\Bigg[F(z)-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}B_{jr}(z)\Phi^{(r)}(\beta_j)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=n+1}^{n+q}B_j(z)f(\beta_j)\Bigg]. \tag{5.19$'$}$$

于是，为使方程(5.1)可解，以下三个原则必须得到满足：

1° 当把 $z=\beta_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 代入(5.19)$'$及其直到μ_j-1阶导数时，式子两边不能出现矛盾；

2° 在(5.19)$'$右边令$z\to\beta_j$ $(z\in D^+,\ j=n+1,n+2,\cdots,n+q)$时，必须确保(5.22)成立；

3° (5.19)$'$右边确实是D^+内的全纯函数，且在$\overline{D}$上$\in H$.

在现在的情况下，与上段中相似，仍可证这时1°无条件成立.

现在我们来验证，2°也无条件成立，令$z\to\beta_j$ $(z\in D^+,\ j>n)$，注意到(5.21)，得

$$\Phi^+(\beta_j)=\frac{D_j(\beta_j)}{2b(\beta_j)}\lim_{z\to\beta_j}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{K(z,\tau)f(\tau)}{D_j(\tau)}\left(\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{\tau-\beta_j}\right)d\tau+\frac{1}{4}f(\beta_j)$$
$$=\frac{1}{2}f(\beta_j).$$

为了使要求3°满足，在(5.19)$'$中记$\Phi^{(r)}(\beta_j)=C_{rj}$，式中[…]在$z=\alpha_k$ $(1\leqslant k\leqslant m)$处必须至少有$\lambda_k$重零点，即必须

$$4\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}B_{jr}^{(s)}(\alpha_k)C_{jr}=\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\frac{\partial^s}{\partial z^s}\frac{K(z,\tau)}{\tau-z}\right]_{z=\alpha_k}\frac{f(\tau)d\tau}{a(\tau)-b(\tau)}$$
$$-\sum_{j=n+1}^{n+q}B_j^{(s)}(\alpha_k)f(\beta_j),$$
$$s=0,1,\cdots,\lambda_k-1;\ k=1,2,\cdots,m. \tag{5.23}$$

这样，$\Phi(z)$就必定在D^+内全纯. 又为了保证$\Phi(z)$在$\overline{D}$上连续，必须(5.19)右边[…]中的函数当$z\to\alpha_k$ $(k>m)$时极限为零：

$$4\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}B_{jr}(\alpha_k)C_{jr}=-\frac{1}{2}f(\alpha_k)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(\alpha_k,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-\alpha_k)}d\tau$$
$$-\sum_{j=n+1}^{n+q}B_j(\alpha_k)f(\beta_j),$$
$$k=m+1,m+2,\cdots,m+p. \tag{5.24}$$

以后我们会看到，当这些条件满足时，的确能保证$\Phi(z)$在$\overline{D}$上连续(且$\in H$).

(5.23),(5.24)合在一起是$\{C_{jr}\}$的一线方程组. 如果它们相容，这时，

在(5.19)′中令$z \to t$ ($t \neq \alpha_k$, $k > m$; $t \neq \beta_j$, $j > n$). 由 Plemelj 公式[①]

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\left\{\frac{b(t)f(t)}{a(t)-b(t)} + \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(t,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau - t)}\mathrm{d}\tau\right.$$

$$\left. -4\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{\mu_j-1} B_{jr}(t)C_{jr} - \sum_{j=n+1}^{n+q} B_j(t)f(\beta_j)\right\}. \qquad (5.25)$$

以此代入(5.8), 得

$$\varphi(t) = \frac{a(t)f(t)}{a^2(t)-b^2(t)} - \frac{1}{a(t)+b(t)}\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(t,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau - t)}\mathrm{d}\tau$$

$$+\frac{4}{a(t)+b(t)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1} B_{jr}(t)C_{jr}$$

$$+\frac{1}{a(t)+b(t)}\sum_{j=n+1}^{n+q} B_j(t)f(\beta_j). \qquad (5.26)$$

此式当$t=\alpha_k$ ($k>m$) 或β_j ($j>n$) 时本无意义. 今将证明当t沿着L趋于这些点时, 它确有极限, 且$\varphi(t) \in H$. 当t不在这些点附近时, $\varphi(t) \in H$ 无问题. 现在来看$t=\alpha_k$ ($k>m$) 附近时的情况. 这时, 由(5.8), 只要证明$\Phi^+(t) \in H$就行了, 这里$\Phi^+(\alpha_k)$暂时只能理解为$\lim\limits_{t\to\alpha_k}\Phi^+(t)$; 可以证明, 下列函数均$\in H$[②].

$$B_{jr}^*(t) = \begin{cases} \dfrac{B_{jr}(t)-B_{jr}(\alpha_k)}{t-\alpha_k}, & \text{当 } t \neq \alpha_k \text{ 时;} \\ B_{jr}'(\alpha_k), & \text{当 } t = \alpha_k \text{ 时,} \end{cases}$$

$$B_j^*(t) = \begin{cases} \dfrac{B_j(t)-B_j(\alpha_k)}{t-\alpha_k}, & \text{当 } t \neq \alpha_k \text{ 时;} \\ B_j'(\alpha_k), & \text{当 } t = \alpha_k \text{ 时.} \end{cases}$$

由于条件(5.24)满足, 因而, 要证明$\Phi^+(t)$在$t=\alpha_k$附近$\in H$, 由(5.25), 只要证明函数

$$\frac{b(t)[f(t)-f(\alpha_k)] + \frac{1}{2}[a(t)+b(t)]f(\alpha_k)}{a(t)+b(t)}$$

---

① 易证, 对于下面形式的 Cauchy 型积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(z,t)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(t-t_j)(t-z)}\mathrm{d}t, \quad t_j \in L,\ z \overline{\in} L,$$

Plemelj 公式仍成立. 参看定理 1.4.3.

② 确切说来还要假定L是 Lyapunov 曲线, 即其上各点切线的倾角作为弧长的函数时$\in H$, 参看 1.2.3 段, 例 5.

或者

$$\frac{f(t)-f(\alpha_k)}{t-\alpha_k}$$

以及函数

$$\frac{1}{t-\alpha_k}\left\{\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(t,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-t)}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(\alpha_k,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-\alpha_k)}\mathrm{d}\tau\right\}$$

(当 $t=\alpha_k$ 时它们的意义如上面那样)在 $t=\alpha_k$ 附近 $\in H$ 即可. 因为 $f'(t)\in H$, 故前一函数 $\in H$; 后一函数$\{\cdots\}$中第一项在 $t=\alpha_k$ 附近其导数可证明 $\in H$, 因此这后一函数本身在 $t=\alpha_k$ 附近也 $\in H$. 这就证实了$\Phi^+(t)$ 从而 $\varphi(t)$ 在 $t=\alpha_k$ 附近 $\in H$.

再考虑 $\varphi(t)$ 在 $t=\beta_j$ $(j>n)$ 附近的情况. (5.26) 中右边第二项可证其 $\in H$, 第三项无疑也 $\in H$; 最后一项和式中也只要考虑附标为 j 的那一项. 所以, 为了证明 $\varphi(t)$ 在 $t=\beta_j$ 附近 $\in H$, 只要证明函数

$$\begin{aligned}\psi(t)&=\frac{a(t)f(t)}{a(t)-b(t)}+B_j(t)f(\beta_j)\\&=\frac{a(t)f(t)}{a(t)-b(t)}-\frac{K(t,\beta_j)f(\beta_j)}{D_j(\beta_j)(t-\beta_j)}\\&=\frac{1}{t-\beta_j}\left\{\frac{a(t)}{D_j(t)}[f(t)-f(\beta_j)]-\frac{f(\beta_j)}{D_j(\beta_j)}[K(t,\beta_j)-b(\beta_j)]\right.\\&\qquad\left.+f(\beta_j)\left[\frac{a(t)}{D_j(t)}-\frac{a(\beta_j)}{D_j(\beta_j)}\right]\right\}\in H.\end{aligned}$$

再根据前述理由, 可知它在 $t=\beta_j$ 附近的确 $\in H$.

这样, 我们便证明了在整个 L 上 $\varphi(t)\in H$, 从而$\Phi^+(t)\in H$ 也无问题.

现在来证明 $\Phi(z)$ 在整个 $\overline{D}$ 上连续. 由于(5.22) 已经成立, 且 $\Phi(z)$ 在 D^+ 内全纯也无问题, 所以唯一要讨论的是在 $z=\alpha_k$ $(k>m)$ 处的情况. 显然 (5.19)$'$ 右边$[\cdots]$中的函数在 $z=\alpha_k$ 处属于$\overline{D}$ 的邻域中 $\in H$, 因为 $B_{jr}(z)$, $B_j(z)$ 在 $\overline{D}$ 中在 $z=\alpha_k$ 附近 $\in H$ 无问题, 而其中第一项 $F(z)$, 根据核密度带参数的 Plemelj-Privalov 定理, 可知它在 $t=\alpha_k$ 附近也 $\in H$. 再注意到 (5.24) 现在已成立, 这样, 我们便知道, 在整个 $\overline{D}$ 上, 有

$$|\Phi(z)|\leqslant\frac{A}{|z-\alpha_k|^{\nu_k}},\quad 0\leqslant\nu_k<1,\ k>m.$$

再注意到$\Phi^+(t)\in H$于L上, 这里$\Phi^+(\alpha_k)$暂时理解为当t沿L趋于α_k时$\Phi^+(t)$ 的极限值, 由定理 1.7.2 知, $\Phi(z)$ 在 $\overline{D}$ 上连续, 且 $\in H$.

这样, 容易得出, (5.26) 确实是方程(5.1) 的解. 因为, 定义$\Phi^+(t)$ 如 (5.25), 既然要求 1°～3° 均满足, 我们确知它是(5.19) 中函数 $\Phi(z)$ 的边值;

又由(5. 26)，故(5. 8) 也成立，从而(5. 2) 也成立. 于是 $\varphi(t)$ 满足(5. 1). 至此问题已完全解决.

如果记

$$K_{jr}(z)=\left[\frac{\partial^{\mu_j-r-1}}{\partial\tau^{\mu_j-r-1}}\frac{K(z,\tau)}{\tau-z}\right]_{\tau=\beta_j},$$

$$r=0,1,\cdots,\mu_j-1;\ j=1,2,\cdots,n, \qquad (5.27)$$

由于 $B_{jr}(z)$ 是 $K_{jr}(z)$ 的线性组合，则可解的相容性条件(5. 23)，(5. 24) 可改写为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}K_{jr}^{(s)}(\alpha_k)c_{jr}=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\left[\frac{\partial^s}{\partial z^s}\frac{K(z,\tau)}{\tau-z}\right]_{z=\alpha_k}\frac{f(\tau)}{a(\tau)-b(\tau)}\mathrm{d}\tau$$
$$-\sum_{j=n+1}^{n+q}B_j^{(s)}(\alpha_k)f(\beta_j),$$
$$s=0,1,\cdots,\lambda_k-1;\ k=1,2,\cdots,m, \qquad (5.23)'$$

以及

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}K_{jr}(\alpha_k)c_{jr}=-\frac{1}{2}f(\alpha_k)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(\alpha_k,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-\alpha_k)}\mathrm{d}\tau$$
$$-\sum_{j=n+1}^{n+q}B_j(\alpha_k)f(\beta_j),$$
$$k=m+1,m+2,\cdots,m+p. \qquad (5.24)'$$

当且仅当这方程组相容时，方程(5. 1) 可解，且一般解为

$$\varphi(t)=\frac{a(t)f(t)}{a^2(t)-b^2(t)}-\frac{1}{a(t)+b(t)}\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-t)}\mathrm{d}\tau$$
$$+\frac{1}{a(t)+b(t)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}c_{jr}K_{jr}(t)$$
$$+\frac{1}{a(t)+b(t)}\sum_{j=n+1}^{n+q}f(\beta_j)B_j(t), \qquad (5.26)'$$

其中 $\{c_{jr}\}$ 即上述方程组的一般解组.

注 如果 $a(z)\pm b(z)$ 在 L 上有不到一阶的零点，上述论证完全成立. 例如，设

$$a(z)-b(z)=(z-\beta)^{\nu}D(z),\quad 0<\nu<1,\ D(\beta)\neq 0,\ \beta\in L,$$

则因

$$\mathrm{res}\left\{\frac{K(z,\tau)\,\Phi^+(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}\right\}_{\tau=\beta}=0,$$

故(5. 19)仍成立，但不会出现相应于 β 的项. 对于要求 2° 而言，在 β 处应要求

$$\Phi^{+}(\beta)=\frac{1}{2}f(\beta).$$

但这确实无条件成立，因为

$$\lim_{z\to\beta}(z-\beta)^{\nu}\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{K(z,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}d\tau=\frac{b(\beta)f(\beta)}{D(\beta)}.$$ [①]

如若 $a(z)+b(z)$ 在 L 上出现不到一阶的零点 $z=\alpha$，为使要求 3° 在该处满足，则必须在(5.24) 中添加 $\alpha_k=\alpha$ 的一方程.

例 1 求解方程

$$(t^2+t-1)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{(\tau t-\tau+1)\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t),\quad t\in L,$$

其中 L 为单位圆周 $|t|=1$，已取定反时针向为积分路径.

解 这时

$$a(t)+b(t)=2t^2,\quad a(t)-b(t)=2(t-1),$$

于是 $m=1$，$\alpha_1=0$，$\lambda_1=2$，$p=0$；$n=0$，$q=1$，$\beta_1=1$. 这时

$$B_1(z)=\frac{z}{2(1-z)}.$$

现在不存在条件(5.24)′，而(5.23)′ 经化简后为

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau=0,$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{f(\tau)}{\tau^2(\tau-1)}d\tau=f(1).$$

这就是方程的可解条件. 当它们满足时，原方程有唯一解

$$\varphi(t)=\frac{(t^2+t-1)f(t)}{4t^2(t-1)}-\frac{1}{4\pi i t^2}\int_{L}\frac{(\tau t-\tau+1)f(\tau)}{(\tau-1)(\tau-t)}d\tau+\frac{f(1)}{4t(1-t)}.$$

例如，当 $f(t)=t^2\psi(t)$，其中 $\psi(t)$ 在 D^{+} 内全纯，在 $\overline{D}$ 上 $\in H$，则易见可解条件满足，并容易算出 $\varphi(t)=\frac{1}{2}\psi(t)$.

例 2 求解方程

$$(t^2+1)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{-t\tau+t+\tau+1}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau=f(t),\quad t\in L,$$

其中 L 同例 1.

解 这时

$$a(t)+b(t)=2(t+1),\quad a(t)-b(t)=2t(t-1),$$

于是 $m=0$，$p=1$，$\alpha_1=-1$；$n=1$，$\beta_1=0$，$\mu_1=1$，$q=1$，$\beta_2=1$. 因此

---

① 参见[42]，§26，(26.22) 式.

$$K_{10}(t) = \frac{K(t,\tau)}{\tau - t}\bigg|_{\tau=0} = -\frac{t+1}{t},$$

$$B_2(z) = \frac{-K(z,1)}{D_2(1)(z-1)} = \frac{1}{1-z}.$$

现在不存在(5.23)′，经化简后(5.24)′成为

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau^2-1}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1),$$

而原式中的 $c_{10} = c$ 可以任意. 上式就是方程的可解条件. 当这条件满足时，方程的一般解为

$$\varphi(t) = \frac{(t^2+1)f(t)}{4(t^2-1)} - \frac{1}{4\pi \mathrm{i}(t+1)}\int_L \frac{(-t\tau+t+\tau+1)f(\tau)}{\tau(\tau-1)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau$$
$$+ \frac{f(1)}{2(1-t^2)} + \frac{c}{t},$$

其中 c 为任意常数.

例如，当 $f(t)$ 在 D^+ 内全纯，在 $\overline{D}$ 上连续且 $f'(t) \in H$（至少在 $t=-1$ 附近如此时），方程的可解条件为 $f(-1)=0$；而当它满足时，方程有一般解

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{2(t+1)} + \frac{c}{t},$$

但 $\varphi(-1)$ 要理解为

$$\lim_{t\to -1}\varphi(t) = \frac{1}{2}f'(-1) - c.$$

3.5.5 $a(z) \pm b(z)$ 有相同零点的情况

这时要求 1° 一般不能无条件成立，从而也要构成可解条件的一部分.

为了简略地说明这一点，我们只考虑 $a(z), b(z)$ 在 D^+ 内有唯一的一个而且是公共的零点 β，且它至少是其中之一的单零点的情况. 注意这时 $a(z) \pm b(z)$ 之一仍可能有重零点，但无论如何，λ, μ 中至少有一个等于1（以下将略去附标 $k = j = 1$).

我们记

$$b' = b'(\beta) = K'_t(\beta,\beta) + K'_\tau(\beta,\beta) = K'_1 + K'_2, \tag{5.28}$$

$$\left.\begin{aligned} a(z) + b(z) &= (z-\beta)^\lambda S(z), \\ a(z) - b(z) &= (z-\beta)^\mu D(z), \end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

且 $S(\beta)D(\beta) \neq 0$. 若再记

$$k(z,\tau) = \frac{K(z,\tau)}{D(\tau)},$$

则由(5.11)知，

$$B_r(z)=\frac{1}{r!(\mu-r-1)!}\left[\frac{\partial^{\mu-r-1}}{\partial\tau^{\mu-r-1}}\frac{k(z,\tau)}{\tau-z}\right]_{\tau=\beta}$$
$$=-\frac{1}{r!}\frac{k(z,\beta)}{(z-\beta)^{\mu-r}}-\frac{1}{r!}\frac{k'_r(z,\beta)}{(z-\beta)^{\mu-r-1}}$$
$$+O\left(\frac{1}{|z-\beta|^{\mu-r-2}}\right),\quad 0\leqslant r<\mu-1;\tag{5.30}$$

$$B_{\mu-1}(z)=-\frac{1}{(\mu-1)!}\frac{k(z,\beta)}{z-\beta}.\tag{5.31}$$

但因

$$k(z,\beta)=\frac{K(z,\beta)}{D(\beta)}=\frac{K'_z(\beta,\beta)}{D(\beta)}(z-\beta)+O(|z-\beta|^2),$$

$$k'_\tau(z,\beta)=k'_\tau(\beta,\beta)+O(|z-\beta|)=\frac{K'_\tau(\beta,\beta)}{D(\beta)}+O(|z-\beta|),$$

考虑到(5.28)，因此

$$B_r(z)=-\frac{b'}{r!}\frac{1}{D(\beta)(z-\beta)^{\mu-r-1}}+O\left(\frac{1}{|z-\beta|^{\mu-r-2}}\right),$$
$$0\leqslant r<\mu-1,\tag{5.32}$$

$$B_{\mu-1}(z)=-\frac{K'_1}{(\mu-1)!D(\beta)}+O(|z-\beta|).\tag{5.33}$$

以(5.29),(5.32),(5.33)代入(5.10)，便得

$$\Phi(z)=(z-\beta)^{\mu-1}\frac{D(z)}{S(z)}F(z)$$
$$+2\frac{D(z)}{S(z)}\sum_{r=0}^{\mu-1}\left[\frac{b'}{r!D(\beta)}(z-\beta)^{r-\lambda+2}+O(|z-\beta|^{r-\lambda+1})\right]\Phi^{(r)}(\beta)$$
$$+2\frac{D(z)}{S(z)}\left[\frac{K'_1}{(\mu-1)!D(\beta)}(z-\beta)^{\mu-\lambda}\right.$$
$$\left.+O(|z-\beta|^{\mu-\lambda+1})\right]\Phi^{(\mu-1)}(\beta).\tag{5.34}$$

以下分几种情况讨论.

Ⅰ. 先设 $\lambda=\mu=1$. 这时(5.34)成为

$$\Phi(z)=\frac{D(z)}{S(z)}F(z)+2\frac{D(z)}{S(z)}\left[\frac{K'_1}{D(\beta)}+O(|z-\beta|)\right]\Phi(\beta).$$

这时 $\Phi(z)$ 在 D^+ 内确已全纯. 以 $z=\beta$ 代入上式，记住必须要求 $C_0=\Phi(\beta)$，故得

$$[S(\beta)-2K'_1]C_0=\frac{D(\beta)}{2\pi i}\int_L\frac{K(\beta,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-\beta)}d\tau.$$

所以又有两种可能：

a) 如果 $2K_1' \neq S(\beta)$，则

$$C_0^* = 4C_0 = \frac{D(\beta)}{S(\beta)-2K_1'}\frac{2}{\pi i}\int_L \frac{K(\beta,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-\beta)}d\tau, \qquad (5.35)$$

而原方程有唯一解，由(5.13)，此解现为

$$\varphi(t) = \frac{a(t)f(t)}{a^2(t)-b^2(t)} - \frac{1}{a(t)+b(t)}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-t)}d\tau + \frac{C_0^* B_0(t)}{a(t)+b(t)}, \qquad (5.36)$$

其中 C_0^* 以(5.35) 给出.

b) 如果 $2K_1' = S(\beta)$，那么，

(i) 若

$$\int_L \frac{K(\beta,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-\beta)}d\tau \neq 0,$$

则原方程无解；

(ii) 若上面积分为零，则原方程的一般解为(5.36)，其中 C_0^* 为任意常数.

Ⅱ. 设 $\mu > \lambda = 1$. 这时(5.34) 成为

$$\Phi(z) = (z-\beta)^{\mu-1}\frac{D(z)}{S(z)}F(z) + \frac{2D(z)}{S(z)}\sum_{r=0}^{\mu-2}\left[\frac{b'}{r!D(\beta)}(z-\beta)^r + O(|z-\beta|^{r+1})\right]\Phi^{(r)}(\beta) + \frac{2D(z)}{S(z)}\left[\frac{K_1'}{(\mu-1)!D(\beta)}(z-\beta)^{\mu-1} + O(|z-\beta|^{\mu})\right]\Phi^{(\mu-1)}(\beta).$$

这时 $\Phi(z)$ 确在 D^+ 内全纯. 将上式及其两边逐次取导数到 $\mu-1$ 阶的式子以 $z=\beta$ 代入，并记住 $C_r = \Phi^{(r)}(\beta)$，便可得下列线方程组

$$C_0 = \frac{2b'}{S(\beta)}C_0,$$

$$C_1 = \frac{2b'}{S(\beta)}C_1 + L_1(C_0),$$

$$C_2 = \frac{2b'}{S(\beta)}C_2 + L_2(C_0,C_1),$$

$$\cdots,$$

$$C_{\mu-2} = \frac{2b'}{S(\beta)}C_{\mu-2} + L_{\mu-2}(C_0,C_1,\cdots,C_{\mu-3}),$$

$$C_{\mu-1}=\frac{(\mu-1)!D(\beta)}{S(\beta)}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{K(\beta,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-\beta)}d\tau$$
$$+\frac{2K_1'}{S(\beta)}C_{\mu-1}+L_{\mu-1}(C_0,C_1,\cdots,C_{\mu-2}),$$

其中 L_r 为其变元的某齐次线性函数.

但要注意，在现在的情况下，

$$a(t)+b(t)=(t-\beta)S(t),$$
$$a(t)-b(t)=(t-\beta)^{\mu}D(t)\quad(\mu>1);$$

容易验证，这时必有

$$2b'=S(\beta).$$

因而上面这一方程组实际上就是

$$\left.\begin{aligned}L_1(C_0)&=0,\\L_2(C_0,C_1)&=0,\\&\cdots,\\L_{\mu-2}(C_0,C_1,\cdots,C_{\mu-3})&=0,\\S(\beta)L_{\mu-1}(C_0,C_1,\cdots,C_{\mu-2})&+[2K_1'-S(\beta)]C_{\mu-1}\\=-(\mu-1)!\frac{D(\beta)}{2\pi i}&\int_L\frac{K(\beta,\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-\beta)}d\tau.\end{aligned}\right\}\tag{5.37}$$

此方程组的系数矩阵为左下三角的，故极易找出其相容条件并进一步求出其一般解. 例如，当 $2K_1'\neq S(\beta)$ 时，(5.37) 肯定可解，解得 C_r 后便可写出原方程的解(5.13)，但要记住 $C_r^*=4C_r$.

Ⅲ. 最后设 $\lambda>\mu=1$. 这时由(5.34) 和(5.10)，

$$\Phi(z)=\frac{1}{(z-\beta)^{\lambda-1}}\frac{D(z)}{S(z)}\left\{F(z)+\left[\frac{2K_1'}{D(\beta)}+O(|z-\beta|)\right]\Phi(\beta)\right\}$$
$$=\frac{1}{(z-\beta)^{\lambda-1}}\frac{D(z)}{S(z)}[F(z)-2C_0B_0(z)],\tag{5.38}$$

其中 $C_0=\Phi(\beta)$. 注意,

$$B_0(z)=\left.\frac{k(z,\tau)}{\tau-z}\right|_{\tau=\beta}=-\frac{K(z,\beta)}{D(\beta)(z-\beta)}$$
$$=-\frac{1}{D(\beta)}\left[K_1'+\frac{K_1''}{2!}(z-\beta)+\cdots+\frac{K_1^{(\lambda-1)}}{(\lambda-1)!}(z-\beta)^{\lambda-2}\right.$$
$$\left.+\frac{K_1^{(\lambda)}}{\lambda!}(z-\beta)^{\lambda-1}+\cdots\right],\tag{5.39}$$

这里已令

$$K_1^{(r)} = \left[\frac{\partial^r}{\partial z^r} K(z,\beta)\right]_{z=\beta}. \tag{5.40}$$

为了保证 $\Phi(z)$ 在 D^+ 内全纯，故原方程可解条件的一部分为

$$-\frac{2K_1^{(r+1)}}{D(\beta)(r+1)} C_0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \left[\frac{\partial^r}{\partial z^r} \frac{K(z,\tau)}{\tau - z}\right]_{z=\beta} \frac{f(\tau)}{a(\tau) - b(\tau)} \mathrm{d}\tau,$$

$$r = 0, 1, \cdots, \lambda - 2. \tag{5.41}$$

暂设这些条件成立. 这时虽已保证 $\Phi(z)$ 在 D^+ 内全纯，但仍不能保证 (5.38) 两边不矛盾. 这时，我们把(5.38) 改写为

$$\Phi(z) = \frac{D(z)}{S(z)} \left\{ \frac{1}{(\lambda - 1)!} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \left[\frac{\partial^{\lambda-1}}{\partial z^{\lambda-1}} \frac{K(z,\tau)}{\tau - z}\right]_{z=\beta} \frac{f(\tau)}{a(\tau) - b(\tau)} \mathrm{d}\tau \right.$$

$$\left. + \frac{2K_1^{(\lambda)} C_0}{\lambda! D(\beta)} + O(|z - \beta|) \right\},$$

以 $z = \beta$ 代入，则有

$$[\lambda! S(\beta) - 2K_1^{(\lambda)}] C_0 = \frac{\lambda D(\beta)}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \left[\frac{\partial^{\lambda-1}}{\partial z^{\lambda-1}} \frac{K(z,\tau)}{\tau - z}\right]_{z=\beta} \frac{f(\tau)}{a(\tau) - b(\tau)} \mathrm{d}\tau. \tag{5.42}$$

(5.41) 连同(5.42) 构成原方程的可解条件. 因此又可分为下列两种情况：

(a) 如果这些方程中 C_0 的系数都是零，即

$$K_1^{(r)} = 0,\ r = 0, 1, \cdots, \lambda - 1;\quad 2K_1^{(\lambda)} - \lambda! S(\beta) = 0, \tag{5.43}$$

则原方程的可解条件为

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \left[\frac{\partial^r}{\partial z^r} \frac{K(z,\tau)}{\tau - z}\right]_{z=\beta} \frac{f(\tau)}{a(\tau) - b(\tau)} \mathrm{d}\tau = 0,$$

$$r = 0, 1, \cdots, \lambda - 1. \tag{5.44}$$

这时原方程的一般解为

$$\varphi(t) = \frac{a(t) f(t)}{a^2(t) - b^2(t)} - \frac{1}{a(t) + b(t)} \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{K(t,\tau) f(\tau)}{[a(\tau) - b(\tau)](\tau - t)} \mathrm{d}\tau$$

$$+ \frac{C_0^* B_0(t)}{a(t) + b(t)}, \tag{5.45}$$

其中 C_0^* 为任意常数.

(b) 如果(5.43) 诸式左边的值有些为零，例如当 $r = r_1, r_2, \cdots, r_s$ 时为零(可能包括 $r = \lambda$)，而另一些又不为零，则可解条件为

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \left[\frac{\partial^r}{\partial z^r} \frac{K(z,\tau)}{\tau - z}\right]_{z=\beta} \frac{f(\tau)}{a(\tau) - b(\tau)} \mathrm{d}\tau = 0, \quad r = r_1, r_2, \cdots, r_s,$$

而从另一些 r 中由(5.41),(5.42) 算出的 C_0 值必须相同. 这时原方程有唯一

解(5.45)，其中 $C_0^* = 4C_0$.

奇异积分方程直接解法的一般情况较为复杂，钟寿国在[8],[70]中有全面的讨论，特别还推广到方程组的情况.

3.5.6 一些应用

我们将对本节中所得结果作一些简单的应用.

1) 反演问题　我们再次来考虑奇异积分的反演问题：

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(t,\tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \quad t \in L, \tag{5.46}$$

其中 L, K, f, φ 等所满足的条件均如前. 我们来讨论，对一切 $f(t)$ 来说，关于(5.46)成立反演公式

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(t,\tau)}{\tau - t}f(\tau)\mathrm{d}\tau = \varphi(t), \quad t \in L \tag{5.47}$$

的必要充分条件.

我们先设 $b(z) = K(z,z)$ 在 $\overline{D}$ 上无零点. 由于现在 $a = 0$,不存在 α_k, β_j 诸点，故由(5.18)知，第一型奇异方程(5.46)有唯一解

$$\varphi(t) = \frac{1}{b(t)}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(t,\tau)f(\tau)}{b(\tau)(\tau - t)}\mathrm{d}\tau. \tag{5.48}$$

为要(5.47)对任何 $f(t)$ 成立，须且只须

$$b(t)b(\tau) = 1,$$

亦即 $b(t) = \pm 1$，此在(5.48)中令 $f(t) = b(t)$ 立即可知. 因此得到

定理3.5.1　*在所设条件下，若 $b(t)$ 在 $\overline{D}$ 上无零点，则一对反演公式(5.46)，(5.47)成立的必要充分条件是 $b(t) = +1$ 或 -1 于 L 上.*

在1.4.3段中曾获得此定理的充分性部分.

现在来考虑 $b(z)$ 在 D^+ 内有一单零点 β，但在 L 上无零点的情况. 我们将证明这时(5.46)不可能有反演公式(5.47).

按3.5.4段中记号，这时 $a = 0$，对于 β，我们有 $\lambda = \mu = 1$，而

$$b(z) = (z - \beta)S(z), \quad S(\beta) \neq 0.$$

如果 $2K_1' = 2K_t'(\beta,\beta) \neq S(\beta)$，则由(5.36)，方程(5.1)有解

$$\varphi(t) = \frac{1}{b(t)}\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(t,\tau)f(\tau)}{b(\tau)(\tau - t)}\mathrm{d}\tau + \frac{C_0^* B_0(t)}{b(t)},$$

其中 C_0^* 为由(5.35)给出的常数.

为要(5.47)对任何 $f(t)$ 成立，须且只须

$$b(t)=\pm 1,\quad C_0^*=0.$$

但这样一来，必然在整个 $\overline{D}$ 上 $b(z)=\pm 1$，这与 $z=\beta$ 是 $b(z)$ 的单零点矛盾，可见不能有反演公式(5.47).

如果 $2K_1=S(\beta)$，由 3.5.4 段知，(5.46) 不可能对任何 $f(t)$ 有解，反演公式更不可能成立.

于是有

定理3.5.2 *在所设条件下，若 $b(z)$ 在 D^+ 内有一单零点，而在 L 上 $\neq 0$，则反演公式不会成立.*

显然，当 $b(z)$ 在 D^+ 内有多个单零点时，情况也是如此.

2) 应用于 Fredholm 积分方程　我们来考虑第二型的 Fredholm 积分方程

$$a(t)\varphi(t)+\frac{\lambda}{\pi \mathrm{i}}\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L,\tag{5.49}$$

这里 L 同前，$a(t),k(t,\tau)$ 对其变元在 $\overline{D}$ 上全纯，λ 为一复参数. 它可以看成方程(5.1) 的特例，这里

$$K(t,\tau)=\lambda k(t,\tau)(\tau-t);\tag{5.50}$$

因此 $b(t)=0$，而 $a(t)\pm b(t)=a(t)$.

如果 $a(t)$ 在 $\overline{D}$ 上无零点，则由 3.5.5 段(也易直接看出) 有明显的结果；(5.49) 无条件可解，且有唯一解

$$\varphi(t)=\frac{f(t)}{a(t)}-\frac{\lambda}{a(t)}\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{k(t,\tau)}{a(\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{5.51}$$

而(5.49) 无特征值.

现设 $a(z)$ 在 D^+ 内有一单零点 β，而在 L 上无零点，并记

$$a(z)=(z-\beta)A(z),\quad A(\beta)\neq 0.$$

按 3.5.4 段中记号，可得

$$\left.\begin{aligned}K_1'&=K_t'(\beta,\beta)=-\lambda k(\beta,\beta),\\ S(t)&=D(t)=A(t),\\ B_0(z)&=\left[\frac{K(z,\tau)}{D(\tau)(\tau-z)}\right]_{z=\beta}=\frac{\lambda k(z,\beta)}{A(\beta)}.\end{aligned}\right\}\tag{5.52}$$

以下分两种情况讨论：

(a) 设 $2K_1'\neq A(\beta)$，由(5.52)，此即

$$\lambda\neq-\frac{A(\beta)}{2k(\beta,\beta)}.$$

这时由(5.35)，(5.36) 知，方程(5.49) 有唯一解

$$\varphi(t)=\frac{f(t)}{a(t)}-\frac{1}{a(t)}\frac{\lambda}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{k(t,\tau)f(\tau)}{a(\tau)}\mathrm{d}\tau+\frac{c_0k(t,\beta)}{a(t)},\tag{5.53}$$

其中

$$c_0=\frac{2\lambda^2}{A(\beta)+2\lambda k(\beta,\beta)}\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{k(\beta,\tau)f(\tau)}{a(\tau)}\mathrm{d}\tau.\tag{5.54}$$

(b) 设 $2K_1'=A(\beta)$，即

$$\lambda=-\frac{A(\beta)}{2k(\beta,\beta)}.\tag{5.55}$$

这时方程(5.49) 的可解条件为(注意这时 $\lambda\neq 0$)

$$\int_L\frac{k(\beta,\tau)f(\tau)}{a(\tau)}\mathrm{d}\tau=0,\tag{5.56}$$

而这时(5.49) 的一般解仍以(5.53) 给出，但这时 c_0 为任意常数.

可见，在后一情况下，方程(5.49) 有唯一的一阶特征值(5.55)，而其特征函数为 $k(t,\beta)/a(t)$.

于是我们有

定理3.5.3 在所设条件下，Fredholm 积分方程(5.49) 至多有一个特征值.

习　题

1. 设当 $t,\tau\in\overline{D}$ 时，$\Omega(\tau-t)$ 是其变元的解析函数，且 $\Omega(z)$ 在 $z=0$ 处有一单极点，其留数为 $+1$ 或 -1，而当 $z=\tau-t$ 为别的值时无奇点. 求证下列一对反演公式成立：

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\Omega(\tau-t)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L,$$

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\Omega(\tau-t)f(\tau)\mathrm{d}\tau=\varphi(t),\quad t\in L.$$

2. 设 $F(z)$ 为 $\overline{D}$ 上的单叶全纯函数. 求证：对于

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{F'(\tau)}{F(\tau)-F(t)}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L,$$

也成立反演公式.

3. 在上题中，若把 $F'(\tau)$ 改为 $F'(t)$ 将有什么结果?

第四章　一般情况下的边值问题

本章将把第二章中的一些基本边值问题推广到所涉及的曲线为非封闭曲线的情况(包括开口弧段和具有节点的情况)以及有关系数具有间断点的情况.

4.1　Cauchy 型积分在端点附近的性质

4.1.1　核密度属 H 类的情况

在第一章中我们讨论 Cauchy 型积分的性质时，虽然对 Plemelj 公式、Poincaré-Bertrand 积分换序公式等也包括了积分路径为开口曲线的情况，但主要仍是限制在积分路径为封闭曲线的情形. 本节将进一步讨论积分曲线为开口时的 Cauchy 型积分在积分曲线端点附近的性质. 也要讨论 Cauchy 主值积分的类似性质.

设 $L=\widehat{ab}$ 为一开口光滑弧段($a\neq b$)，并设已取定自 a 到 b 为其正向. 本段中仍设 $f(t)\in H$ 于 L 上，而来讨论 Cauchy 型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\quad z\overline{\in}L \tag{1.1}$$

以及 Cauchy 主值积分

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau,\quad t\in L,\ t\neq a,b \tag{1.2}$$

的性质.

由第一章中的讨论，将全平面沿 L 剖开后所形成的区域 S 中，$\Phi(z)$ 是全纯函数，且 $\Phi(\infty)=0$. $\Phi(t)$ 一般说来不会在整个 L 上 $\in H$，因为，当 $t=a$ 或 b 时，$\Phi(t)$ 甚至可能无意义(积分发散). 但若在 L 上 a,b 附近各取一点 a'，b' (图 4-1)，并记 $L'=\widehat{a'b'}$，则可证明 $\Phi(t)\in H(L')$，这是因为，如果我们把 L 延伸即补充一光滑弧段 Γ，使 $L+\Gamma$ 成为一光滑封闭曲线，同时把 $f(t)$ 也

延拓到Γ上，使延拓后的$f(t)$在整个$L+\Gamma$上$\in H$（这是可能的，例如可以定义$f(t)$于Γ上为一线性函数，并保持$f(a), f(b)$的值不变）. 于是，

$$\Psi_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L+\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau,\quad t\in L+\Gamma$$

将是$L+\Gamma$上$\in H$的函数. 但对于$t\in L'$来说，

$$\Psi_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau,\quad t\in L'$$

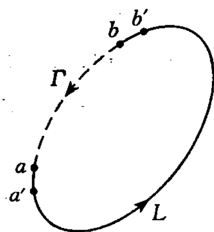


图 4-1

是t的全纯函数，当然也$\in H$于L'上，从而$\Phi(t)=\Psi_1(t)-\Psi_2(t)\in H$于$L'$上.

以下，我们将着重研究(1.1)与(1.2)在端点a和b附近的性质.

首先我们注意到，如果$f(a)=0$，则(1.2)中的$\Phi(a)$就有意义了. 这是比较明显的. 因为，如果我们把L在端点a处光滑地延伸一小段弧$\gamma=\widehat{ca}$使不与L的其余各点相交（图 4-2)，并认为$f(t)\equiv 0$于γ上，则

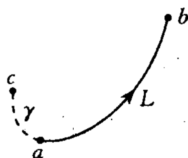


图 4-2

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L+\gamma}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

这时$f(t)\in H(L+\gamma)$，从而由前所述，$\Phi(a)$的确有意义. 不仅如此，由此还可进一步看出，(1.2)定义的$\Phi(t)$这时在包括端点a在内的弧段上也$\in H$. 在端点b处也可有类似情况. 特别，如果$f(a)=f(b)=0$，则$\Phi(t)$在整个L上也$\in H$. 此外，由 Plemelj 公式，

$$\Phi^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}f(t)+\Phi(t),$$

且因$f(t)\in H$，故$\Phi^{\pm}(t)$也有与$\Phi(t)$相类似的性质. 因此我们有

引理 4.1.1 若$f(t)\in H$于$L=\widehat{ab}$上，则对于由(1.1)定义的函数$\Phi(z)$来说，当$f(a)$（或$f(b)$）$=0$时，$\Phi(t), \Phi^{\pm}(t)$都在L的包括端点a（或b）的子弧上$\in H$；特别，当$f(a)=f(b)=0$时，它们在整个L上$\in H$.

注意，即使$f(a)$或$f(b)=0$，仍不能得出结论说$\Phi(z)$在a或b处解析.

下面将讨论$f(a)$或$f(b)\neq 0$的情况.

设$t\in L$在a点附近，由第一章(2.6)式，

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)-f(a)}{\tau-t}d\tau+\frac{f(a)}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(\tau)-f(a)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau + f(a)\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\log\frac{b-t}{a-t}+\frac{1}{2}\right),$$

其中对数分支仍如那里那样选取. 由上述引理，此式右边第一项在$t=a$附近（包括a点在内）$\in H$. 由此立即可知

$$\Phi(t) = -\frac{f(a)}{2\pi \mathrm{i}}\log(a-t)+\Phi_a^*(t), \tag{1.3}$$

其中$\Phi_a^*(t)\in H$于$t=a$附近. 这样，$\Phi(t)$在$t=a$附近一般有对数型的奇异性. 由(1.3)还可看出，$\lim\limits_{t\to a}(t-a)^{\varepsilon}\Phi(t)=0$对任何$\varepsilon>0$成立，且$(t-a)^{\varepsilon}$可取任何分支，或即在$t=a$附近，

$$|\Phi(t)|\leqslant\frac{A_{\varepsilon}}{|t-a|^{\varepsilon}}\quad (A_{\varepsilon}\text{ 为常数}).$$

这时我们也说$\Phi(t)$在$t=a$附近**几乎有界**.

同样，在$t=b$附近，则有

$$\Phi(t) = \frac{f(b)}{2\pi \mathrm{i}}\log(b-t)+\Phi_b^*(t), \tag{1.4}$$

其中$\Phi_b^*(t)$也$\in H$于$t=b$附近. 即$\Phi(t)$在$t=b$附近有对数型奇异性或几乎有界.

对于由(1.1)定义的$\Phi(z)$，也可作类似的讨论. 可以得知，在$z=a$的邻近，

$$\Phi(z) = -\frac{f(a)}{2\pi \mathrm{i}}\log(a-z)+\Phi_a^*(z) \tag{1.5}$$

其中$\Phi_a^*(z)$在$z=a$附近沿L剖开的邻域内全纯，且当$z\to a$时有确定的极限，而在$z=b$附近，

$$\Phi(z) = \frac{f(b)}{2\pi \mathrm{i}}\log(b-z)+\Phi_b^*(z), \tag{1.6}$$

$\Phi_b^*(z)$在$z=b$附近也有类似性质.

简单说来，我们有

定理 4.1.1 $\Phi(z)$与$\Phi(t)$在端点a与b附近，一般均有对数型奇异性，或说几乎有界.

习　题

1. 如果$f(a)=0$，则由(1.1)定义的$\Phi(z)$在z无论以何种方式趋于a时（包括z可取L上的点）恒有确定的极限. 求证之.

2. 试证(1.5),(1.6)式成立.

3. 当 L 为开口弧段时，1.3.1 段中的 Privalov 定理是否仍成立？应如何修正？

4.1.2 H^* 类函数

为了以后的需要，我们要引进开口弧段 $L=\widehat{ab}$ 上的一类新的函数.

定义 4.1.1 设 $f(t)$ 定义于 $L=\widehat{ab}$ 上（可能除去端点 $t=a$ 或 b 外）. 如果 $f(t)$ 在不包含 $t=a$ 的、在 a 附近的任何一段子弧上 $\in H$，而在 $t=a$ 附近，

$$f(t)=\frac{f^*(t)}{|t-a|^\alpha},\quad 0\leqslant\alpha<1,\tag{1.7}$$

其中 $f^*(t)$ 在包含 $t=a$ 的一段子弧上 $\in H$，则称 $f(t)$ 在 $t=a$ 附近 $\in H_\alpha^*$ 类. 同样可定义 $f(t)$ 在 $t=b$ 附近 $\in H_\alpha^*$ 类. 如果 $f(t)$ 在不包含 a,b 的任何子弧上 $\in H$，而在 a,b 附近都 $\in H_\alpha^*$，则称 $f(t)$ 在整个 L 上 $\in H_\alpha^*$. 还可定义

$$H^*=\bigcup_\alpha H_\alpha^*$$

（无论在 a 附近、b 附近或整个 L 上）.

显然 H_α^* 与 H 都是 H^* 的子类.

为了方便，我们还给出下一定义.

定义 4.1.2 一切条件如定义 4.1.1，但是，例如在 $t=a$ 附近，(1.7) 改成了

$$f(t)=\frac{f^*(t)}{(t-a)^\gamma}\text{①},\quad \gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta,\ 0\leqslant\alpha<1,\tag{1.8}$$

则称 $f(t)$ 在 $t=a$ 附近 $\in\widetilde{H}_\gamma^*$. 在 $t=b$ 附近或在整个 L 上，也可有 $\widetilde{H}_\gamma^*$ 的类似定义. 并记

$$\widetilde{H}^*=\bigcup_\gamma\widetilde{H}_\gamma^*.$$

关于 H_α^* 与 $\widetilde{H}_\gamma^*$ 类之间有如下的一些关系. 但为了说明它们起见，我们先证下一引理.

---

① 以后永远把 $(z-a)^\gamma$ 理解为从 a 起沿 L 并伸向无穷远剖开平面后在 $z=a$ 附近的任一单值连续分支，而把 $(t-a)^\gamma$ 理解为此分支在 $t=a$ 附近的正(左)侧的边值，对 $(z-b)^\gamma$ 与 $(t-b)^\gamma$ 作类似的理解.

引理4.1.2 设 $\varphi(t) \in H^{\mu}$ 于 $L = \widehat{ab}$ 上的 $t = a$ 附近，且 $\varphi(a) = 0$，而 $\psi(t)$ 为 L 上的函数，满足条件

$$\left.\begin{aligned} |\psi(t)| &\leqslant \frac{K}{|t-a|^{\varepsilon}}, \\ \left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right| &\leqslant \frac{K}{|t-a|^{1+\varepsilon}} \end{aligned}\right\} \quad (K \text{ 为常数}),\ 0 \leqslant \varepsilon < \mu, \tag{1.9}$$

则必 $\omega(t) = \varphi(t)\psi(t) \in H^{\mu}$ 于 L 上的 $t = a$ 附近.

证 设 $t, t' = t + h$ 为 L 上任意两点，沿正方向依次为 a, t, t'. 设

$$|\varphi(t') - \varphi(t)| \leqslant A|h|^{\mu}.$$

在 L 上以 $t = a$ 为起点引进弧长参数 s，对应于 t, t' 分别有参数 $s, s' = s + \Delta s$ $(\Delta s > 0)$，于是 $|h| = |t' - t| \leqslant \Delta s$，由第一章(2.9)式，

$$s \geqslant |t-a| \geqslant Cs \quad (0 < C < 1).$$

所以

$$|\psi(t')| \leqslant \frac{K_1}{|t'-a|^{\varepsilon}} \leqslant \frac{K_1}{C^{\varepsilon}} \frac{1}{(s+\Delta s)^{\varepsilon}}. \tag{*}$$

我们写

$$\begin{aligned} \omega(t') - \omega(t) &= [\varphi(t') - \varphi(t)]\psi(t') + \varphi(t)[\psi(t') - \psi(t)] \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

由引理条件与(*)式，

$$|I_1| \leqslant A_1 \frac{|h|^{\mu}}{(s+\Delta s)^{\varepsilon}} \leqslant A_1 \frac{|h|^{\mu}}{\Delta s^{\varepsilon}} \leqslant A_1 |h|^{\mu-\varepsilon}$$

(A_1 及下面诸 A_j 都是某些正常数). 为证引理，只须估计 $|I_2|$. 因 $\varphi(a) = 0$，故

$$|I_2| \leqslant A_1 |t-a|^{\mu} |\psi(t') - \psi(t)|.$$

若 $|t-a| \leqslant h$，则

$$\begin{aligned} |I_2| &\leqslant A|t-a|^{\mu}[|\psi(t')| + |\psi(t)|] \\ &= A_2|t-a|^{\mu}\left[\frac{1}{(s+\Delta s)^{\varepsilon}} + \frac{1}{|t-a|^{\varepsilon}}\right] \\ &\leqslant A_3|t-a|^{\mu-\varepsilon} \leqslant A_3|h|^{\mu-\varepsilon}. \end{aligned}$$

若 $|t-a| > h$，记 $\psi(t) = \psi(s)$. 不妨设 $\psi(s)$ 为实值函数因而可应用中值定理，因为否则的话，可将其实部、虚部分开分别讨论. 这样，(1.9) 中后一不等式等价于 $|\psi'(s)| \leqslant \frac{A_4}{s^{1+\varepsilon}}$. 所以

$$|I_2| \leqslant A_5 s^{\mu} |\psi(s+\Delta s) - \psi(s)| = A_5 s^{\mu} |\psi'(s+\theta\Delta s)| \Delta s$$

$$\leqslant \frac{A_6 s^{\mu}\Delta s}{(s+\theta\Delta s)^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{A_6\Delta s}{s^{1+\varepsilon-\mu}} \leqslant A_6 s^{\mu-\varepsilon}$$

$$\leqslant A_7 |h^{\mu-\varepsilon}| \quad (0<\theta<1).$$ ① □

在引用这一引理时，我们常用到下列事实. 由于

$$\log(t-a) = \ln|t-a| + \mathrm{i}\theta \quad (\theta = \arg(t-a)),$$

故

$$\frac{1}{t-a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|t-a| + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

从而

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|t-a|\right| \leqslant \frac{1}{|t-a|}, \quad \left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant \frac{1}{|t-a|}. \tag{1.10}$$

因此 $\theta(t)$ 从而 $\log(t-a)$ 完全符合引理中 $\psi(t)$ 所要求的条件(对任何 $\varepsilon>0$)，因为

$$\left.\begin{array}{l} \big|\ln|t-a|\big| \leqslant \dfrac{K}{|t-a|^{\varepsilon}}, \\ \left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|t-a|\right| \leqslant \dfrac{1}{|t-a|} \leqslant \dfrac{K}{|t-a|^{1+\varepsilon}} \end{array}\right\} \quad (K \text{ 为某常数}).$$

现在我们来证明以下一些性质.

1° 设 $f(t) \in \widetilde{H}_{\gamma}^{*}$ 于 $t=a$ 附近($\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$)，则必 $f(t) \in H_{\alpha+\varepsilon}^{*}$ 于 $t=a$ 附近，其中 $\varepsilon>0$ 可任意小.

我们将(1.8)改写为

$$f(t) = f^{*}(t)\exp\{-(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\ln|t-a|+\mathrm{i}\theta)\}$$

$$= \frac{f^{*}(t)}{|t-a|^{\alpha}}\exp\{-\mathrm{i}(\beta\ln|t-a|+\gamma\theta)\}.$$

显然

$$\psi(t) = \exp\{-\mathrm{i}(\beta\ln|t-a|+\gamma\theta)\}$$

为有界函数. 且由(1.10)，它满足条件(1.9). 因此对任何 $\varepsilon>0$，$|t-a|^{\varepsilon}\psi(t) \in H^{\varepsilon}$ (由引理 4.1.2) 于 $t=a$ 附近. 所以

$$f(t) = \frac{f^{**}(t)}{|t-a|^{\alpha+\varepsilon}},$$

其中 $f^{**}(t) = f^{*}(t) - |t-a|^{\varepsilon}\psi(t) \in H$ 于 L 上 a 的附近，即 $f(t) \in H_{\alpha+\varepsilon}^{*}$.

2° 设 $f(t) \in \widetilde{H}_{\gamma}^{*}$ 于 $t=a$ 附近($\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$)，则必 $f(t) \in \widetilde{H}_{\alpha+\varepsilon}^{*}$ 于 L 上 $t=a$ 附近，$\varepsilon>0$ 可任意小.

① 本引理当 $\varepsilon=0$ 时为已知结果，推广到 $\varepsilon>0$ 的情况是由林玉波提供的.

将(1.8) 改写为

$$f(t)=\frac{f^*(t)(t-a)^{\varepsilon-i\beta}}{(t-a)^{\alpha+\varepsilon}},$$

因$(t-a)^\varepsilon\in H^\varepsilon$，且$t=a$时为零，而

$$\psi(t)=(t-a)^{-i\beta}=\exp\{\beta(\theta-\mathrm{i}\ln|t-a|)\}$$

满足条件(1.9)，可知结论显然成立.

3° 若$f(t)\in H_\alpha^*$ 于L上的$t=a$附近，则必$f(t)\in \widetilde{H}_{\alpha+\varepsilon}^*$ 于$t=a$附近，$\varepsilon>0$可任意小.

将(1.7) 改写为

$$f(t)=\frac{f^*(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\theta}}{(t-a)^\alpha}=\frac{f^*(t)(t-a)^\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\theta}}{(t-a)^{\alpha+\varepsilon}},$$

用类似于上面推理，便可得出所要的结论.

综合以上诸性质可知，在$t=a$附近，有下列关系成立：

$$\widetilde{H}_{\alpha+i\beta}^*\subset\widetilde{H}_{\alpha+\varepsilon_1}^*\subset H_{\alpha+\varepsilon_2}^*\subset\widetilde{H}_{\alpha+\varepsilon}^*,\tag{1.11}$$

其中$0\leqslant\alpha<1$，$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon$.

如果不记指数，则由(1.11)可知，在$t=a$附近，

$$\widetilde{H}^*=H^*.$$

基于这一原因，今后若无特别需要明确指数时，就可不必采用记号$\widetilde{H}^*$了.

以上所论，当然对于$t=b$附近或整个L上自然也同样成立.

习　题

1. 在定义4.1.1中，假定$f(t)$在不包含a的、在a的附近一段子弧上$\in H$是可以省去的，它可以从(1.7)及其下面的说明中推出. 试证之.

2. 试证：在性质1°～3°中，如果还已知$f^*(a)=0$，则所有其中的ε均可取成零.

4.1.3 核密度属 H^* 类时 Cauchy 型积分的性质

本段将考虑下形的Cauchy型积分在$z=a$附近的性质：

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{(t-a)^\gamma(t-z)}\mathrm{d}t,\quad \gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta\neq0,\ 0\leqslant\alpha<1,\tag{1.12}$$

其中$L=\widehat{ab}$同前，$f(t)\in H$，亦即，在$t=a$附近，

$$\frac{f(t)}{(t-a)^\gamma}\in H^*.$$

首先考虑一特殊情况：$f(t)=1$，即，令

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\gamma(t-z)}.\qquad (*)$$

注意$(t-a)^\gamma$为$(z-a)^\gamma$当z从L的正(左)侧趋于L上一点t时的极限值，故可记

$$[(t-a)^\gamma]^+=(t-a)^\gamma.$$

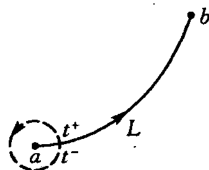


图 4-3

注意平面已沿L剖开，故当t从L上一点自其正侧绕a转一圈(当然是反时针向)到达L上同一位置t时，$\theta=\arg(t-a)$增加了2π(图4-3). 因此，

$$[(t-a)^\gamma]^-=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma}[(t-a)^\gamma]^+=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma}(t-a)^\gamma.$$

所以，

$$[(t-a)^{-\gamma}]^+-[(t-a)^{-\gamma}]^-=(1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\gamma})(t-a)^{-\gamma}.\qquad(1.13)$$

我们如果记(注意$\gamma\neq 0$)

$$\Psi(z)=\frac{(z-a)^{-\gamma}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\gamma}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma\pi}}{2\mathrm{i}\sin\gamma\pi}\frac{1}{(z-a)^\gamma},$$

则有

$$\Psi^+(t)-\Psi^-(t)=\frac{1}{(t-a)^\gamma}.$$

另一方面，在(*)中引用 Plemelj 公式，则有

$$\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)=\frac{1}{(t-a)^\gamma}.$$

于是$\Phi_1(z)-\Psi(z)$在L上a的附近也是解析的，而以$z=a$为其孤立奇点.

在$z=a$附近，若记$z=a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则可写

$$(z-a)^{-\gamma}=\rho^{-\alpha}h(z),\quad h(z)=\exp\{-\mathrm{i}\beta\ln\rho-\mathrm{i}\gamma\varphi\},$$

$h(z)$显然有界，故

$$|\Psi(z)|\leqslant\frac{K}{\rho^\alpha}\quad(0\leqslant\alpha<1).$$

一方面，若记$|t-a|=r$，并取ν使$\alpha<\nu<1$，我们来考虑

$$\begin{aligned}\rho^\nu\Phi_1(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\rho^\nu h(t)\mathrm{d}t}{r^\alpha(t-z)}\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{(\rho^\nu-r^\nu)h(t)}{r^\alpha(t-z)}\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{r^{\nu-\alpha}h(t)}{t-z}\mathrm{d}t\\&=J_1+J_2.\end{aligned}$$

因(见 1.2.3 段例 1 中的说明)

$$|\rho^\nu-r^\nu|\leqslant|z-t|^\nu,$$

且 $\alpha<1$，$h(t)$ 有界，故 J_1 是有界的，再因 $h(t)$ 满足引理 4.1.2 中 $\psi(t)$ 所满足的条件($\varepsilon=0$)，故

$$r^{\nu-\alpha}h(t)\in H$$

于 $t=a$ 附近，当然也 $\in H$ 于整个 L 上，且它在 $t=a$ 处为零，故知 J_2 在 $z=a$ 附近也有界. 于是

$$|\Phi_1(z)|\leqslant\frac{K}{\rho^{\nu}}. \qquad (**)$$

这样，$\Phi_1(z)-\Psi(z)$ 在 $z=a$ 附近有不到 1 阶的奇异性. 此不可能，除非 $z=a$ 是它的常点. 即

$$\Phi_1(z)=\frac{e^{\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{1}{(z-a)^{\gamma}}+\Phi_0(z), \qquad (1.14)$$

其中 $\Phi_0(z)$ 为 $z=a$ 处的全纯函数.

现在回到一般的积分(1.12). 把它写成

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)-f(a)}{(t-a)^{\gamma}(t-z)}dt+\frac{f(a)}{2\pi i}\int_L\frac{dt}{(t-a)^{\gamma}(t-z)}\\&=\Phi_*(z)+f(a)\Phi_1(z).\end{aligned}$$

我们要求证

$$\Phi_*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)-f(a)}{(t-a)^{\gamma}(t-z)}dt$$

在 $z=a$ 附近有界. 先设 $\gamma=\alpha+i\beta$ 中的 $\alpha=0$. 这时

$$\Phi_*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{[f(t)-f(a)](t-a)^{-i\beta}}{t-z}dt,$$

这里核密度函数显然 $\in H$，且当 $t=a$ 时它为零，故 $\Phi_*(z)$ 确实在 $z=a$ 附近有界，且当 $z\to a$ 时它有确定的极限.

以下设 $\alpha>0$. 设 $f(t)\in H^{\mu}$ ①，取 $\varepsilon>0$ 充分小(比 μ,α 都小即可)，可以证明

$$\varphi(t)=\frac{f(t)-f(a)}{(t-a)^{\varepsilon}}\in H \qquad (1.15)$$

(事实上，由引理 4.1.2，立刻可知 $\varphi(t)\in H^{\mu-\varepsilon}$). 因此

$$\Phi_*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{(t-a)^{\gamma-\varepsilon}(t-z)}.$$

与证明(**)式时类似，可知

---

① 若 $\mu>\alpha$，则证明显然. 以下不分 μ,α 孰大孰小. 且若 $\mu>\alpha$，当 $z\to a$ 时，$\Phi_*(z)$ 也有极限.

$$|\Phi_*(z)| \leqslant \frac{K}{|z-a|^{\nu}},$$

其中 $\nu > \alpha - \varepsilon$. 当然也可取 $\nu < \alpha$. 这样一来，可写

$$\Phi(z) = \frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{f(a)}{(z-a)^{\gamma}} + \Phi_a^*(z), \tag{1.16}$$

其中 $\Phi_a^*(z)$ 在沿前述剖开的平面中在 $z=a$ 附近全纯，且在 $z=a$ 附近，

$$|\Phi_a^*(z)| \leqslant \frac{K}{|z-a|^{\nu}} \quad (\nu < \alpha). \tag{1.17}$$

注意：当 $\alpha = 0$ 时，由前所述，$\Phi^*(z)$ 当 $z \to a$ 时还有确定的极限.

剩下的还要证明(1.15)式. 我们先证，如果在(1.15)中把 $(t-a)^{\varepsilon}$ 改为 $|t-a|^{\varepsilon}$ 时它的确成立. 设在 L 上任取两点 $t, t+h$，其相应弧坐标为 $s, s+\Delta s$，且 $\Delta s > 0$. 于是

$$\begin{aligned}|\varphi(t+h) - \varphi(t)| &= \left|\frac{f(t+h)-f(a)}{|t+h-a|^{\varepsilon}} - \frac{f(t)-f(a)}{|t-a|^{\varepsilon}}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{f(t+h)-f(t)}{|t+h-a|^{\varepsilon}}\right| + \frac{|f(t)-f(a)|}{|t+h-a|^{\varepsilon}|t-a|^{\varepsilon}} \\ &\quad \cdot \big| |t+h-a|^{\varepsilon} - |t-a|^{\varepsilon} \big| \\ &\leqslant \frac{A(h)^{\mu}}{|t+h-a|^{\varepsilon}} + \frac{A(t-a)^{\mu-\varepsilon}}{|t+h-a|^{\varepsilon}}\big| |t+h-a|^{\varepsilon} - |t-a|^{\varepsilon} \big| \\ &= \delta_1 + \delta_2.\end{aligned}$$

由于

$$|t+h-a| \geqslant C(s+\Delta s) \geqslant C\Delta s \geqslant C|h|,$$

故

$$\delta_1 \leqslant A|h|^{\mu-\varepsilon}.$$

现在估计 δ_2. 如果 $|t-a| \leqslant |h|$，并注意到 $|t-a|^{\varepsilon} \in H^{\varepsilon}$，立即可见

$$\delta_2 \leqslant A_2|h|^{\mu-\varepsilon}.$$

再设 $|t-a| > |h|$，则 $s > |h|$，又 $\Delta s \leqslant \frac{|h|}{C}$，故

$$\begin{aligned}\delta_2 &\leqslant \frac{A_2 s^{\mu-\varepsilon}}{(s+\Delta s)^{\varepsilon}}\left[\left(1+\frac{|h|}{|t-a|}\right)^{\varepsilon} - 1\right]|t-a|^{\varepsilon} \\ &\leqslant \frac{A_2 s^{\mu-\varepsilon}}{(s+\Delta s)^{\varepsilon}}\frac{\varepsilon|h|}{|t-a|^{1-\varepsilon}} \leqslant \frac{A_3 s^{\mu-1}}{(s+\Delta s)^{\varepsilon}}|h| \\ &\leqslant \frac{A_3|h|}{s^{1+\varepsilon-\mu}} \leqslant A_3|h|^{\mu-\varepsilon}.\end{aligned}$$

这样，我们证明了

$$\frac{f(t)-f(a)}{|t-a|^{\varepsilon}} \in H^{\mu-\varepsilon}.$$

由此立即可证明(1.15)：

$$\varphi(t)=\frac{f(t)-f(a)}{(t-a)^{\varepsilon}}=\frac{[f(t)-f(a)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\theta}}{|t-a|^{\varepsilon}}$$

$$=\frac{[f(t)-f(a)]|t-a|^{\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\theta}}{|t-a|^{2\varepsilon}},$$

再引用一再用过的引理，可知右边分子 $\in H$，因此根据已证的结果知 $\varphi(t)\in H$.

至此我们的结论已全部证明.

如果我们考虑 $z=b$ 附近的情况，可得一类似于(1.14) 的公式：

$$\Phi(z)=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma\pi}}{2\mathrm{i}\sin\gamma\pi}\frac{f(b)}{(z-b)^{\gamma}}+\Phi_b^*(z), \tag{1.14$'$}$$

有关说明同前. 这里右边出现了两个负号，是因为 b 是 L 的终点，t 从 L 上正侧绕过 b 到负侧同一点时，是顺时针向转一圈，故

$$[(t-b)^{\gamma}]^{-}=\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\gamma}[(t-b)^{\gamma}]^{+},$$

从而代替(1.13) 有

$$[(t-b)^{-\gamma}]^{+}-[(t-b)^{-\gamma}]^{-}=(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma})(t-b)^{-\gamma}.$$

于是我们有

定理 4.1.2 对于 Cauchy 型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}\mathrm{d}t,$$

$$z\,\overline{\in}\,L=\widehat{ab},\ \gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta\neq0,\ 0\leqslant\alpha<1,\ c=a\text{ 或 }b, \tag{1.18}$$

其中 $f(t)\in H$，且 L 取定自 a 到 b 的方向为正向，而 $(t-c)^{\gamma}$ 理解为从 c 沿 L 伸向无穷远剖开的平面上 $(z-c)^{\gamma}$ 的一个全纯分支在 L 正侧的边值，则在 $z=c$ 附近，我们有

$$\Phi(z)=\pm\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\gamma\pi}}{2\mathrm{i}\sin\gamma\pi}\frac{f(c)}{(z-c)^{\gamma}}+\Phi^*(z), \tag{1.19}$$

其中正号或负号随 $c=a$ 或 b 而定，$\Phi^*(z)$ 则在 $z=c$ 的剖开的邻域中全纯，并且

(ⅰ) 若 $\alpha=0$，则当 z 以任何方式趋于 c 时，$\Phi^*(z)$ 有确定的极限①，

(ⅱ) 若 $\alpha>0$，则在 $z=c$ 附近，下式成立：

$$|\Phi^*(z)|\leqslant\frac{K}{|z-c|^{\nu}},\quad 0<\nu<\alpha. \tag{1.20}$$

① 实际上，当 $f(t)\in H^{\mu}$ 而 $\mu>\alpha$ 时，结论(ⅰ)也成立，见第 212 页底注.

推论 4.1.1 假设与记号同定理 4.1.2，但 $\alpha > 0$. 则 $(z-c)^{\gamma}\Phi(z)$ 在上述剖开平面中在 $z=c$ 附近全纯，且可连续延拓到 L 的两侧，且

$$(z-c)^{\gamma}\Phi(z)=\pm\frac{e^{\pm\gamma\pi i}f(c)}{2i\sin\gamma\pi}+O(|z-c|^{\varepsilon}),$$

其中 $\varepsilon>0$ 可任意小，正、负号取法同前.

利用(1.19)与(1.20)立即可证此推论，只要注意 $\varepsilon=\alpha-\nu>0$ 可任意小.

以后对我们来说，$\gamma=\frac{1}{2}$ 的情况最为常用，这时我们有

$$\Phi(z)=\frac{f(c)}{2\sqrt{z-c}}+\Phi^{*}(z), \tag{1.21}$$

其中 $c=a$ 或 b，$\Phi^{*}(z)$ 的说明如前.

4.1.4 核密度属 H^{*} 类时 Cauchy 主值积分的性质

下面考虑 Cauchy 主值积分

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{f(\tau)}{(\tau-a)^{\gamma}(\tau-t)}d\tau,\quad t\in L=\widehat{ab},\ t\neq a,b \tag{1.22}$$

在 $t=a$ 附近的性质，其中记号与条件均同上段，由 Plemelj 公式，与(1.12)比较，知

$$\Phi(t)=\frac{\Phi^{+}(t)+\Phi^{-}(t)}{2}.$$

但由(1.16)知(记住 $(t-a)^{\gamma}=[(t-a)^{\gamma}]^{+}$)，

$$\Phi^{+}(t)=\frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{f(a)}{(t-a)^{\gamma}}+\Phi^{*+}(t),$$

$$\Phi^{-}(t)=\frac{e^{-i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{f(a)}{(t-a)^{\gamma}}+\Phi^{*-}(t),$$

因此

$$\Phi(t)=\frac{\cot\gamma\pi}{2i}\frac{f(a)}{(t-a)^{\gamma}}+\Phi^{*}(t), \tag{1.23}$$

其中

$$\Phi^{*}(t)=\frac{1}{2}[\Phi^{*+}(t)+\Phi^{*-}(t)].$$

当 $\gamma=\alpha+i\beta$ 中的 $\alpha=0$ 时，由于 $\Phi^{*}(z)$ 当 $z\to a$ 时有确定的极限，故 $\Phi^{*}(t)$ 当 t 沿 L 趋于 a 时也有这同一极限①；当 $\alpha>0$ 时，由于(1.20)的关系，在

① 当 $f(t)\in H^{\mu}$ 而 $\mu>\alpha$ 时也是如此. 见第 214 页底注.

$t=a$ 附近，也有

$$|\Phi^*(t)|\leqslant\frac{K}{|t-a|^{\nu}},\quad 0<\nu<\alpha. \tag{1.24}$$

还可证明，在前一情形，$\Phi^*(t)$ 在 $t=a$ 附近 $\in H$；而在后一情形，$\Phi^*(t)\in H_\nu^*$ $(\nu<\alpha)$，但证明比较复杂，这里从略，读者可参考[42]，§25.

对于 $t=b$ 附近，也有类似的结果：

$$\Phi(t)=-\frac{\cot\gamma\pi}{2\mathrm{i}}\frac{f(b)}{(t-b)^{\gamma}}+\Phi^*(t),$$

其中 $\Phi^*(t)$ 在 $t=b$ 附近有类似性质.

总之我们有

定理4.1.3 对于 Cauchy 主值积分

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{(\tau-c)^{\gamma}(\tau-t)}\mathrm{d}\tau,$$

$$L=\widehat{ab},\ t\in L,\ t\neq a,b,\ \gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta,\ 0\leqslant\alpha<1,\ c=a\text{ 或 }b, \tag{1.25}$$

$f(t)\in H$，则必

$$\Phi(t)=\pm\frac{\cot\gamma\pi}{2\mathrm{i}}\frac{f(c)}{(t-c)^{\gamma}}+\Phi^*(t), \tag{1.26}$$

其中正号或负号随 c 为 L 的起点 a 或终点 b 而定，且

(i) 当 $\alpha=0$ 时，$\Phi^*(t)$ 在 $t=c$ 附近 $\in H$①；

(ii) 当 $\alpha>0$ 时，$\Phi^*(t)$ 在 $t=c$ 附近 $\in H_\nu^*$，这里正数 $\nu<\alpha$ 可任意.

由(1.26)可以看出，$(t-c)^{\gamma}\Phi(t)$ 在 $t=c$ 的割开的邻域内是有界的，且当 t 沿着 L 趋于 c 点时，它有确定的极限 $\pm\frac{\cot\gamma\pi}{2\mathrm{i}}f(c)$；更由引理4.1.2知，它还 $\in H$.

这样，我们有

推论4.1.2 假设同前($\alpha>0$)，则 $(t-c)^{\gamma}\Phi(t)\in H$ 于 $t=c$ 附近，且

$$(t-c)^{\gamma}\Phi(t)=\pm\frac{\cot\gamma\pi}{2\mathrm{i}}f(c)+O(|t-c|^{\varepsilon}), \tag{1.27}$$

其中 $\varepsilon>0$ 可任意小.

习　题

1. 讨论 Cauchy 型积分

① 见第 215 页底注.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}(t-z)}dt, \quad z\overline{\in}L, L=\widehat{ab}$$

在 L 的端点 a 与 b 邻近的性质，这里根式是指沿 L 剖开平面后取定 $\sqrt{(b-z)(z-a)}$ 的一连续分支在 L 正侧的边值，而 $f(t)\in H$ 于 L 上.

2. 类似地讨论 Cauchy 主值积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\sqrt{(b-\tau)(\tau-a)}(\tau-t)}d\tau, \quad t\in L, t\neq a,b$$

的性质.

4.1.5 积分路径具有节点的情况

以后我们还会遇到这样的情况：Cauchy 型积分(1.18) 或主值积分(1.25) 中，积分路径由聚会在同一点 c 的若干光滑弧段 L_j 构成，即 $L=\sum_j L_j$，而每一 L_j 均以 c 为起点或终点(图 4-4). c 称为 L 的**节点(或结点)**.

我们设 $f(t)$ 在每一 L_j 上 $\in H$，意即，当 t 沿某一 L_j 趋于 c 点时，$f(t)$ 有确定的极限值 $f_j(c)$，但对不同的 j，$f_j(c)$ 也可以不同，且若以 $f_j(c)$ 作为 $f(t)$ 在 L_j 上 c 处之值时，它在 L_j 上 $\in H$，这时我们也称 $f(t)$ 在 L 上 $\in H_0$ **类**.

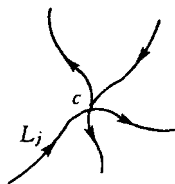


图 4-4

同样可定义 $f(t)$ 在 L 上 $t=c$ 附近 $\in H_0$. 相应地也可定义 $f(t)$ 属于 H^*, H_ε^* 等在 L 上(或在 c 附近).

现在我们来看 Cauchy 型积分：

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{(t-c)^\gamma(t-z)}dt,$$

$$z\overline{\in}L, \gamma=\alpha+i\beta\neq 0, 0\leqslant\alpha<1, \qquad (1.28)$$

这里 L 如上，c 为 L 的节点. 又设 $f(t)\in H_0$ 于 $t=c$ 附近. 这里 $(t-c)^\gamma$ 要这样理解：对每一 j，当 $t\in L_j$ 时，若把平面沿 L_j 剖开(当然还要如前延伸到无穷远剖开)，它就是 $(z-c)^\gamma$ 在 $z=c$ 附近的一全纯分支 $[(z-c)^\gamma]_j$ 在 L_j 正侧的边值，不妨记为 $[(t-c)^\gamma]_j$. 这样，从定理 4.1.2 立刻可以推得

定理 4.1.4 对于 Cauchy 型积分(1.28)，在 $z=c$ 附近，有

$$\Phi(z)=\sum_j \varepsilon_j \frac{e^{\varepsilon_j\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{f_j(c)}{[(z-c)^\gamma]_j}+\Phi^*(z), \qquad (1.29)$$

其中 $\varepsilon_j=+1$ 若 c 为 L_j 的起点，$\varepsilon_j=-1$ 若 c 为 L_j 的终点，而 $\Phi^*(z)$ 在

沿 L 剖开后的 c 的邻域中全纯，并且 $\Phi^*(z)$ 在 $z=c$ 附近仍有定理 4.1.2 中所述的性质.

对于 Cauchy 主值积分

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{(\tau-c)^\gamma(\tau-t)}\mathrm{d}\tau,\quad t\in L,\ t\neq c,\tag{1.30}$$

也可得一些结论. 不过要注意，当 $t\in L_j$ 时，我们应把(1.30) 拆开写成

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_j}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L-L_j}.$$

对于右边第一积分，可应用定理 4.1.3；而对于后一积分，由于 $t\overline{\in} L-L_j$，故应该应用定理 4.1.4. 详细结论自明.

以上所论节点情况，当然也包括 $L=\widehat{ab}$ 而 c 为弧 L 上的一内点这情况. 又若 L 有若干个类似节点，对于其中某一个节点 c 来说，(1.28) 与(1.30) 仍有类似结论.

习　题

设 L 为一光滑封闭曲线，c 为 L 上一点，试讨论积分(1.28),(1.30) 在 c 附近的性质.

4.2　一般 Riemann 边值问题

4.2.1　开口弧段上的 R 问题

本段将讨论一条开口光滑弧段 $L=\widehat{ab}$（自 a 到 b 取作正向）上的 Riemann 边值问题，即求解

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L=\widehat{ab},\ t\neq a,b,\tag{2.1}$$

其中 $G(t),g(t)\in H$ 已给于 L 上，且 $G(t)\neq 0$，而 $\Phi(z)$ 为全平面用 L 剖开后所成的区域 S 中的全纯函数，$\Phi^\pm(t)$ 仍表示它在 L 正、负侧的边值. 为确定起见，若无特别需要，我们总是在 R_{-1} 中求解问题，即要求 $\Phi(\infty)=0$.

注意，我们并没有要求(2.1) 在 $t=a$ 与 b 处也成立. 一般，对于 $\Phi^\pm(t)$ 在端点 a,b 附近，要求它有可积奇异性，亦即不到 1 阶的奇异性，例如，在 $z=a$ 附近，要求

$$|\Phi(z)|\leqslant\frac{K}{|z-a|^\alpha},\quad 0\leqslant\alpha<1,\tag{2.2}$$

当然也有在 $t=a$ 附近，

$$|\Phi^{\pm}(t)| \leqslant \frac{K}{|t-a|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{2.2$'$}$$

在 b 点也有类似要求. 不过，有时为了某种特殊目的，我们也可要求 $\Phi(z)$ 在 $z=a$ 或(与) $z=b$ 附近保持有界，当然这时 $\Phi^{\pm}(t)$ 也有类似性质. 我们把要求在 $z=a$ 与 b 附近都有界的解类记为 $h_2=h(a,b)$；把在 a 与 b 附近都允许无界(但有可积奇异性，下同)的解类记为 h_0；而把在 $z=a$ 附近要求有界，在 $z=b$ 附近可以无界的解类记为 $h(a)$. 同样也可定义解类 $h(b)$. 显然，

$$h_2 \subset h(c) \subset h_0, \quad c = a \text{ 或 } b.$$

我们先来考虑齐次 R 问题($g\equiv 0$)：

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t). \tag{2.3}$$

求解的关键仍是要把 $G(t)$ 分解为 $X^{+}(t)/X^{-}(t)$ 的形式，其中 $X(z)$ 在 S 中全纯，在 L 两侧存在有边值 $X^{\pm}(t)$，且在 S 中 $X(z)$ 与 $1/X(z)$ 都没有零点.

由于 $G(t)\neq 0$，因此可以在 L 上取定 $\log G(t)$ 的一单值连续分支. 引进函数

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G(t)}{t-z}\mathrm{d}t, \quad z \overline{\in} L. \tag{2.4}$$

它也在 S 中全纯，$\Gamma(\infty)=0$，在 $z=a,b$ 附近，$\Gamma(z)$ 一般有对数型奇异性：

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(z) &= \gamma_a \log(a-z) + \Phi_a(z), \quad \text{在 } z=a \text{ 附近；} \\ \Gamma(z) &= \gamma_b \log(b-z) + \Phi_b(z), \quad \text{在 } z=b \text{ 附近，} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

其中已令

$$\left.\begin{aligned} \gamma_a &= \alpha_a + i\beta_a = -\frac{\log G(a)}{2\pi i}, \\ \gamma_b &= \alpha_b + i\beta_b = \frac{\log G(b)}{2\pi i}, \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

而 $\Phi_a(z),\Phi_b(z)$ 分别在 $z=a,b$ 附近沿 L 剖开的邻域 N_a,N_b 中全纯(见(1.5)与(1.6)式)，且对数的取法如 4.1 节. 由 Plemelj 公式，

$$\Gamma^{+}(t) - \Gamma^{-}(t) = \log G(t).$$

于是，令 $\chi(z)=\mathrm{e}^{\Gamma(z)}$ 时，就有

$$G(t) = \frac{\chi^{+}(t)}{\chi^{-}(t)},$$

且 $\chi(z)$ 具有以上对 $X(z)$ 提出的要求，这样，由(2.3)，

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\chi^{+}(t)} = \frac{\Phi^{-}(t)}{\chi^{-}(t)}.$$

此即表示 $\psi(z)=\dfrac{\Phi(z)}{\chi(z)}$ 在全平面中可能除去 a,b 外全纯，且 $\psi(\infty)=0$. 我们要特别注意 $\chi(z)$ 在 $z=a,b$ 附近的性质. 由(2.5)知，

$$\left.\begin{array}{ll}\chi(z)=(z-a)^{\gamma_a}\chi_a(z), & 在\ z=a\ 附近；\\ \chi(z)=(z-b)^{\gamma_b}\chi_b(z), & 在\ z=b\ 附近，\end{array}\right\}\tag{2.7}$$

其中 $\chi_a(z),\chi_b(z)$ 分别在 N_a,N_b 中全纯，$(z-a)^{\gamma_a},(z-b)^{\gamma_b}$ 则又是按 4.1 节中的方法所取的分支①.

下面先设在 h_2 类中求解. 我们定义一整数 λ_a 如下：如果 α_a 是整数，则令 $\lambda_a=-\alpha_a$；如果 α_a 不是整数，则令 λ_a 使 $0<\lambda_a+\alpha_a<1$. 对于 λ_b 由 α_b 作类似规定. 再令

$$X(z)=(z-a)^{\lambda_a}(z-b)^{\lambda_b}\chi(z),\tag{2.8}$$

并记

$$\kappa=-(\lambda_a+\lambda_b),\tag{2.9}$$

称为问题(2.3)在 h_2 类中的**指标**. $X(z)$ 仍在 S 中全纯，而在 a,b 附近有界，且至多有不到1阶的零点，并仍保持 $G(t)=\dfrac{X^+(t)}{X^-(t)}$ 以及前面对 $X(z)$ 提出的要求. 这样一来，如果 $\Phi(z)$ 是 h_2 类中的解，则 $\Psi(z)=\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ 将在全平面全纯，但在 $z=a,b$ 处至多只有不到一阶的奇异性，从而在 a,b 处也全纯. 由于要求 $\Phi(\infty)=0$，而 $X(z)$ 在 ∞ 处有 $-\kappa=\lambda_a+\lambda_b$ 阶，因此 $\Psi(z)$ 在 ∞ 处至多有 $\kappa-1$ 阶，从而是一个 $\kappa-1$ 次任意多项式($\kappa<1$ 时它为0). 于是，齐次问题(2.3)在 h_2 类中的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)P_{\kappa-1}(z),\tag{2.10}$$

其中 $P_{\kappa-1}(z)$ 为 $\kappa-1$ 次任意多项式($\kappa<1$ 时它恒等于零). $X(z)$ 也称为原问题在 h_2 类中的**典则解或典则函数**.

再设在 h_0 类中求解. 这时我们重新规定 λ_a 如下：如果 α_a 为整数，则仍令 $\lambda_a=-\alpha_a$；如果 α_a 不是整数，则令 λ_a 使 $-1<\lambda_a+\alpha_a<0$. 对于 λ_b 也作类似规定. 仍以(2.8)式定义 $X(z)$，以(2.9)式定义 h_0 类中的**指标**. 这时 $X(z)$ 仍满足前面提出的要求，且在 $z=a$ 或 b 处有界(当 α_a 或 α_b 是整数时)，或者有不到一阶的奇异性(当 α_a 或 α_b 不是整数时)，我们称 $X(z)$ 为 h_0 中的典则函

---

① 这里我们已把 $a-z,b-z$ 分别改为 $z-a,z-b$. 这没有关系，所差常数因子可分别归入 $\chi_a(z),\chi_b(z)$ 中.

数. 于是，$\Psi(z)=\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ 在全平面全纯(包括 a,b 在内)，在 ∞ 处仍至多有 $\kappa-1$ 阶，从而仍是一 $\kappa-1$ 次多项式. 这样，问题(2.3) 在 h_0 类中的一般解仍以(2.10) 给出，且易见 $\Phi(z)$ 确实在 $z=a,b$ 处至多有不到一阶的奇异性.

类似地可讨论在 $h(a)$ 或 $h(b)$ 类中求解.

特别要注意，如果 α_a 是整数，则 $\Phi(z)\in h_0$ 仍在 $z=a$ 附近有界. 这就是说，在 h_0 类中求解时，虽然我们允许 $\Phi(z)$ 在 $z=a$ 附近可以有奇异性，但实际上求出的解必然在这里是有界的. 这种使 $\alpha_a=\mathrm{Re}\,\gamma_a$ 是整数的端点 a，称为**特异端点**. 同样可定义什么叫做 b 是特异端点. 既然在特异端点附近(2.3) 的解总是有界的，因此就不必列入 h 类的括号中. 例如，如果 a 是特异端点，而 b 不是，那么求 $h(b)$ 类中的解就意味着求在 a,b 附近都是有界的解；又如，若 a,b 都是特异端点，则我们不写 $h(a,b)$ 类而直接写成 h_0 类.

此外，如果 a 是一个**普通端点**，即不是特异端点，则在 $h(a)$ 类中的解 $\Phi(z)$ 必有 $\Phi(a)=0$，意即，当 z 以任何方式趋于 a 时，$\Phi(z)$ 的极限都是零. 这是因为，相应于这个类的典则函数 $X(z)$ 中含有因子 $(z-a)^{\lambda_a+\gamma_a}$，从而 $X(a)=0$. 且易见零点阶数不到 1.

综上所述，我们可小结如下：

定理4.2.1 对于齐次 R_{-1} 问题(2.3)，我们可先算出(2.6)(其中 $\log G(t)$ 可任意取定一支). 如果 α_a（或 α_b）是整数，即 a（或 b）是特异端点，则令 $\lambda_a=-\alpha_a$（或 $\lambda_b=-\alpha_b$）. 如果 α_a（或 α_b）不是整数，即 a（或 b）是普通端点，则如下方法规定 λ_a（或 λ_b）：若要求 $\Phi(z)$ 在 a（或 b）附近有界，则应使 $0<\alpha_a+\lambda_a<1$（或 $0<\alpha_b+\lambda_b<1$）；否则，应使 $-1<\alpha_a+\lambda_a<0$（或 $-1<\alpha_b+\lambda_b<0$）. 问题相应类的指标 κ 由(2.9) 给出，相应的典则函数由(2.8) 给出，其中

$$\chi(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\log G(t)}{t-z}\mathrm{d}t\right\}. \tag{2.11}$$

这时，问题(2.3) 在相应类中的一般解由(2.10) 给出($\kappa\leqslant 0$ 时只有零解). 而且，在普通端点处有界的解一定在该点等于 0（且阶数小于 1)，而在特异端点处的解总在该处有界[①].

(2.8) 式中(属于一确定的解类) 的典则函数 $X(z)$ 具有以下的性质：

1° $X(z)$ 在 S 中全纯，处处不等于 0；

① 一般说来并不一定有确定的极根，除非相应于该点的 $\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta=0$.

2° $X(z)$ 与 $1/X(z)$ 在 L 的端点附近至多有不到一阶奇异性；

3° $\dfrac{X^+(t)}{X^-(t)}=G(t)$；

4° $X(z)$ 在 $z=\infty$ 处有 $-\kappa$ 阶.

性质 1° ~ 4° 是(相应类中)典则函数的特征性质. 亦即，如果另有一函数 $Y(z)$ 也满足 1° ~ 4°，则 $Y(z)$ 与 $X(z)$ 至多只差一个非零常数因子. 证明如下：设 $Y(z)$ 也满足 1° ~ 4°，则由 3°，

$$\frac{Y^+(t)}{X^+(t)}=\frac{Y^-(t)}{X^-(t)},$$

从而 $\varphi(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$ 在整个平面全纯，可能除 a,b 外. 由于 $X(z)$ 与 $Y(z)$ 属同一解类，由 2°，$\varphi(z)$ 在端点 a 与 b 附近至多有不到一阶奇异性，于是也在 a,b 处解析. 又由 4°，$\varphi(z)$ 在 ∞ 处是零阶的，因此 $\varphi(z)$ 为一常数(当然不能为 0)，即

$$Y(z)=CX(z),\quad C\neq 0.$$

以上证明中没有用到 $Y(z)$ 处处不为 0. 但 $X(z)$ 既满足 1°，显然 $Y(z)$ 也满足 1°. 即，任一 $Y(z)$，若满足 2° ~ 4° 且在 S 中全纯，则必 $Y(z)\neq 0$.

以后，把凡是满足 1° ~ 4° 的函数 $X(z)$ 都称为问题(2.3)属于相应类的**典则函数**；它除去一个非零常数因子外，唯一确定.

现在来考虑非齐次 R_{-1} 问题(2.1). 仍如前确定在某一类中求解，定义 $\lambda_a,\lambda_b,\kappa,X(z)$ 如前，$X(z)$ 仍称为问题的典则函数，κ 为其指标. 特异端点与普通端点也仍区别如前. 于是(2.1)可化为

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}+\frac{g(t)}{X^+(t)}.\tag{2.12}$$

记

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t,\tag{2.13}$$

则由 Plemelj 公式知，

$$\Omega(z)=\frac{\Phi(z)}{X(z)}-\Phi_0(z)$$

可能除 a,b 外在全平面全纯，$\Phi_0(z)$ 在 ∞ 处为 0.

若 a 为一特异端点，且 $\beta_a\neq 0$，则由(1.19)，$\Phi_0(z)$ 在 $z=a$ 附近有 $(z-a)^{-\mathrm{i}\beta_a}$ 的因子，所以它有界；而若 $\beta_a=0$，则 $\Phi_0(z)$ 在 $z=a$ 附近有对数型奇异性. 因此，不论怎样，只要 a 是特异端点，$\Omega(z)$ 在 $z=a$ 附近只可能有不到一阶的奇异性(因为 $\Phi(z)$ 本身也是如此)，从而 $\Omega(z)$ 以 a 点为常点，于是

$$\Phi(z) = X(z)[\Omega(z) + \Phi_0(z)] \tag{2.14}$$

必在 $z = a$ 附近或者有界(若 $\beta_a \neq 0$)，或者有对数型奇异性(若 $\beta_a = 0$)，总之属于 H_ε^* 类($\varepsilon > 0$ 可任意小). 由此可见，像齐次问题一样，在特异端点附近，(2.1) 的解已有特定性质，而不必另加限制. 所以，这种端点也不应写入 h 类的括号中.

现在再回到问题(2.1) 的求解问题. 设 a,b 都不是特异端点，而要在 $h(a)$ 类中求解. 在 $z = a$ 附近，$g(t)/X^+(t)$ 有 $(t-a)^{-\lambda_a}$ 的因子，故由 (1.19)，

$$|\Phi_0(z)| \leqslant \frac{K}{|z-a|^{\lambda_a+\alpha_a}}.$$

又因 $X(z)\Phi_0(z)$ 有不到一阶的奇异性，从而 $\Omega(z)$ 也是如此(因为已设所求解 $\Phi(z)$ 有界，且 $0 < \lambda_a + \alpha_a < 1$)，于是 $\Omega(z)$ 以 $z = a$ 为常点. 这时由(2.14)确定的 $\Phi(z)$ 也确实在 $z = a$ 附近有界(但不一定等于0). 至于在 $z = b$ 附近，由于 $X(z)$ 确有不到一阶的奇异性，故 $g(t)/X^+(t)$ 以 $t = b$ 为其零点，从而 $\Phi_0(z)$ 在 $z = b$ 处有确定的值. 考虑到 $\Phi(z)$ 在 $z = b$ 附近可以有不到一阶的奇异性，故 $\Omega(z)$ 也是如此，从而它也以 $z = b$ 为常点. 于是 $\Omega(z)$ 在全平面(包括 a,b) 全纯. 由于在 $z = \infty$ 处 $1/X(z)$ 有 $-\kappa$ 阶，$\Phi_0(\infty) = 0$，又要求 $\Phi(\infty) = 0$，故 $\Omega(z)$ 当 $\kappa > 0$ 时为 $\kappa - 1$ 次多项式；当 $\kappa \leqslant 0$ 时，$\Omega(z) \equiv 0$. 在后一情况下，

$$\Phi(z) = X(z)\Phi_0(z).$$

但 $\kappa < 0$ 时，因 $X(z)$ 在 ∞ 处有 $-\kappa$ 阶极点，为了保证 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处为 0，应要求 $\Phi_0(z)$ 在 ∞ 处的 Taylor 展式中所有 $z^{-1}, z^{-2}, \cdots, z^{\kappa}$ 的系数为 0，亦即

$$\int_L \frac{t^j g(t)}{X^+(t)} \mathrm{d}t = 0, \quad j = 0,1,\cdots,-\kappa-1. \tag{2.15}$$

以上的讨论对于在别的类中求解完全适用. 因此，我们有

定理 4.2.2 对非齐次 R_{-1} 问题(2.1)，在某类中求解时，设相应于该类的指标为 κ，典则函数为 $X(z)$. 则当 $\kappa \geqslant 0$ 时，在该类中的一般解为

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)} \mathrm{d}t + X(z) P_{\kappa-1}(z), \tag{2.16}$$

其中 $P_{\kappa-1}(z)$ 为 $\kappa-1$ 次任意多项式；如果 $\kappa < 0$，则当且仅当条件(2.15)满足时，问题有唯一解($P_{\kappa-1} = 0$). 又，在特异端点附近，解(如果存在)必有界或有对数型奇异性，总之，$\in H_\varepsilon^*$.

注意，与齐次情况不一样，在普通端点附近，解有界时一般并不等于零.

习　题

1. 试证：如果 $\gamma_a = \frac{1}{2}$，则在 $h(a)$ 或 $h(a,b)$ 类中(2.1)的解 $\Phi(z)$ 必能使 $\Phi(a) = 0$.

2. 试证：a 为特异端点当且仅当 $G(a)$ 为正实数时.

4.2.2　带节点曲线上的 R 问题

本段中我们将把上段中 L 推广到带节点(或称带结点)曲线的情况. 所谓 L 是**一带节点的(光滑)曲线**，即把图 4-4 中的情形稍加推广，它是由有限条(开口或封闭)光滑弧段 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 组成，$L = \sum_{j=1}^{n} L_j$，诸 L_j 中可能有些有相同的一些端点 c_k(图 4-5)，且各 L_j 已取定正向. 注意，我们把各 L_j 的单独端点也算在节点之中，仍记全平面除掉 L 后的域为 S；注意，当 L 中有一部分围成封闭曲线时，S 并不连通，这时它实际上是一些区域之并.

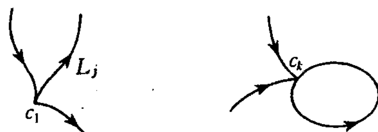


图 4-5

我们来求解 R_{-1} 问题

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \quad t \in L = \sum_{j=1}^{n} L_j, \tag{2.17}$$

这里仍设 $G(t), g(t) \in H_0$ 于 L 上，亦即 $\in H$ 于每一 L_j 上，且 $G(t) \neq 0$. 当然仍要求 $\Phi(z)$ 在各节点处有不到一阶奇异性.

上一段中求解的方法很容易推广到这种情况. 首先注意，现在也可分特异节点与普通节点. 设 c 为 L 上某一节点，有某些 L_j 以它为端点. 沿每一 L_j 仍任意取定 $\log G(t)$ 的一单值连续分支，照样如(2.6)可定义

$$\gamma_{jc} = \alpha_{jc} + \mathrm{i}\beta_{jc} = \mp \frac{\log G_j(c)}{2\pi \mathrm{i}}, \tag{2.18}$$

其中 $\log G_j(c)$ 表示当 $t \in L_j$ 时 $\log G(t)$ 的那一支在 $t = c$ 处的值，且式中负号或正号要根据 c 是 L_j 的起点或终点决定. 然后记

$$\gamma_c = \alpha_c + \mathrm{i}\beta_c = \sum_{c \in L_j} \gamma_{jc} = \sum_{c \in L_j} \mp \frac{\log G_j(c)}{2\pi \mathrm{i}}, \tag{2.19}$$

其中$\sum$是对一切以c为端点的L_j求和(当c是一曲线弧中间的一点时，应看做两段弧的各自的端点)．如果α_c是一整数，则称c为一**特异节点**，且仍令$\lambda_c=-\alpha_c$．以后我们将会看到，(2.17) 的任何解(如果存在) 在c附近必有界或有对数型奇异性，总之其性质是确定了的．那些使α_c不是整数的节点，则称为**普通节点**，设有m个，记为$c_1,c_2,\cdots,c_m$．在求解(2.17)时，在诸c_j ($1\leqslant j\leqslant m$) 附近，可额外要求有界或不作此要求．例如，我们可要求$\Phi(z)$在$c_1,c_2,\cdots,c_q$ ($q\leqslant m$) 附近有界，而在其余的$c_{q+1},c_{q+2},\cdots,c_m$附近除要求可能有不到一阶的奇异性外不另加限制．这种解类称为$h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ **类**．当$q=m$时$h_m=h(c_1,c_2,\cdots,c_m)$是最窄的解类，而把最广的解类记为$h_0$**类**，即对所有的$c_j$都不作额外的要求．于是，

$$h_m\subset h(c_1,c_2,\cdots,c_q)\subset h_0.$$

当我们希望在$h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$类中求解(2.17) 时，对于每一$c\in\{c_1,c_2,\cdots,c_q\}$(故$\alpha_c$不是整数)，定义$\lambda_c$使$0<\alpha_c+\lambda_c<1$，而对其余的普通节点$c$，定义$\lambda_c$使$-1<\alpha_c+\lambda_c<0$；对于特异节点$c$，仍取$\alpha_c+\lambda_c=0$．同样，称

$$\kappa=-\sum_c\lambda_c\quad(\text{对一切节点 } c \text{ 求和})\tag{2.20}$$

为问题(2.17) 在$h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$类中的**指标**．

仍先考虑齐次问题($g\equiv 0$)．仍如(2.4) 那样作出$\Gamma(z)$，并仍令$\chi(z)=e^{\Gamma(z)}$，再记

$$X(z)=\prod_c(z-c)^{\lambda_c}\cdot\chi(z)\quad(\text{对一切节点 } c \text{ 求乘积}).\tag{2.21}$$

不难看出，上段中有关$X(z)$的性质$1^\circ\sim 4^\circ$仍都成立，我们也称它是问题在类$h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$中的**典则函数**．最后，仍如上段同样地讨论，可得(2.17) 在这个类中的一般解(2.10)，且它在各个节点c附近的性质完全与上段所述相似．于是我们得到

定理 4.2.3 对于齐次 R_{-1} 问题(2.17)，如果在$h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$类中求解，则如上求出指标κ与典则函数$X(z)$后，其一般解由(2.10) 给出，且在普通节点附近有界的解必在该处等于零(且零点的阶数小于 1)，而在特异节点附近，解必有界．

现在考虑一般的非齐次问题(2.17)．我们仍可将它改写为(2.12)．由于$X(z)$的性质(特别是在各节点附近的性质) 与上段所论相似，所以由(2.13) 定义的$\Phi_0(z)$仍有类似的性质．因此上段中有关的讨论全都成立．从而可得

定理4.2.4 对于非齐次 R_{-1} 问题(2.17)，设在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中求解，相应于该类的指标为 κ，典则函数为 $X(z)$，则定理 4.2.2 中的所有结论同样成立.

注 由于非齐次问题在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中的一般解(如果存在)可写成其一特解与相应的齐次问题在同一类中的一般解之和. 而 h_m 类是最窄的解类，因此 h_m 类中的任何特解(如果存在的话)当然也是上述解类中的特解，因此(2.16)即问题在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中的一般解也可改写为

$$\Phi(z)=\frac{X_m(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(t)}{X_m^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t+X(z)P_{\kappa-1}(z),\qquad(2.16)'$$

其中 $X_m(z)$ 为 h_m 类中的典则函数，而 $X(z)$ 仍为 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中的典则函数.

4.2.3 相联 R 问题

和封闭曲线情况类似，对于带节点的曲线 L 上的 R 问题，也可定义其相联问题. 亦即，对于 R 问题(2.17)，我们称问题

$$\Psi^+(t)=\frac{1}{G(t)}\Psi^-(t)\qquad(2.22)$$

为它的**相联 R 问题**.

像 2.3.2 段中那样，(2.17) 与(2.22) 之间也有密切联系. 首先注意，我们这里是要求 $z=\infty$ 时解取零值，还应注意，讲到求解一个 R 问题时，一定要联系到在某一类中求解.

把(2.22)与(2.17)相比较，我们看到，系数$G(t)$现在换成了$1/G(t)$，因此 $\log G(t)$ 换成了$-\log G(t)$（取适当分支）. 所以对于以某一节点c为端点的 L_j 来说，γ_{jc} 现在换成了$-\gamma_{jc}$，于是 γ_c 也换成了$-\gamma_c$. 由此可见，(2.17) 的特异节点与普通节点，仍分别是(2.22) 的特异节点与普通节点. 仍设 c_1，$c_2,\cdots,c_m$ 为L 上的普通节点，且 $h=h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 为我们要考虑的(2.17)的解类. 我们称 $h'=h(c_{q+1},c_{q+2},\cdots,c_m)$ 为相联问题(2.22) 的与 h 类**相联的类**. 并且总是以带撇的记号来表示(2.22) 在相联类h'中的相应记号，例如由 $\gamma'_c=-\gamma_c$ 定义的λ'_c、指标κ'、典则函数$X'(z)$ 等，而把不带撇的记号仍保留给(2.17) 的 h 类中的相应记号.

对于特异节点c来说，因为$\alpha'_c=-\alpha_c$，所以$\lambda'_c=-\lambda_c$. 现设c为普通节点. 如果 $c\in\{c_1,c_2,\cdots,c_q\}$，故 $0<\alpha_c+\lambda_c<1$，但这时$c\overline{\in}\{c_{q+1},c_{q+2},\cdots,c_m\}$，

故$-1<\alpha'_c+\lambda'_c<0$；从而由$\alpha'_c=-\alpha_c$仍得$\lambda'_c=-\lambda_c$. 当$c\in\{c_{q+1},c_{q+2},\cdots,c_m\}$时也有类似情况. 总之，不论$c$是怎样的节点，总有$\lambda'_c=-\lambda_c$. 于是，相联问题(2.22)在相联类$h'$中的指标$\kappa'=-\kappa$. 又由(2.4)，很明显，

$$\Gamma'(z)=-\Gamma(z),$$

故$\chi'(z)=\dfrac{1}{\chi(z)}$. 再由(2.21)便可得知，$X'(z)=\dfrac{1}{X(z)}$（当然可以相差一个非零常数因子）. 于是我们得到，齐次相联问题(2.22)在相联类h'中当$\kappa'>0$即$\kappa<0$时有一般解

$$\Psi(z)=\frac{P_{-\kappa-1}(z)}{X(z)},$$

或即，当$\kappa<0$时，

$$\Psi_k(z)=\frac{z^k}{X(z)},\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-1$$

为(2.22)在h'类中的线性无关全解系；而当$\kappa'\leqslant 0$即$\kappa\geqslant 0$时，它在h'类中只有零解.

但对于非齐次R问题(2.17)来说，在h类中求解时，当$\kappa\geqslant 0$时无条件可解，而当$\kappa<0$时，其可解条件为(2.15)，现在可改写为

$$\int_L g(t)\Psi_k^+(t)\mathrm{d}t=0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-1.\tag{2.23}$$

因此我们得到与定理2.3.3相类似的结果：

定理 4.2.5 R_{-1}问题(2.17)在h类中可解的必要充分条件是$g(t)$与齐次相联问题(2.22)在相联类h'中的一切解的正边值正交.

习 题

1. 若不要求$\Phi(\infty)=0$，仅要求$\Phi(z)$在∞处有界，试求解问题(2.17).
2. 在上题的情况下，是否有类似于定理4.2.5的结果?

4.2.4 几种重要特殊情况

本段讨论在应用中特别重要的几种特殊情况下的R问题.

1° 若干开口弧段的情况　设L由n条互不相交的光滑开口弧段$L_j=\widehat{a_jb_j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$组成，各L_j均取成自a_j到b_j为正向. 我们要求解R问题(2.17)，其中$G(t)$，$g(t)$都是给出在L上$\in H$的函数. 仍设要求$\Phi(\infty)=0$. 现在诸a_j，b_j都是节点.

这种情况虽然简单，却最常见. 因为每一节点即端点处只有L中一条弧

以它为起点或终点，(2.18)，(2.19) 现在成为

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{a_j} &= \alpha_{a_j} + \mathrm{i}\beta_{a_j} = -\frac{\log G(a_j)}{2\pi\mathrm{i}},\\ \gamma_{b_j} &= \alpha_{b_j} + \mathrm{i}\beta_{b_j} = \frac{\log G(b_j)}{2\pi\mathrm{i}}.\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

根据所要求的解类定义 $\lambda_{a_j}, \lambda_{b_j}$ 与 κ，而典则函数(2.21) 就成为

$$X(z) = \prod_{j=1}^{n} (z-a_j)^{\lambda_{a_j}} (z-b_j)^{\lambda_{b_j}} \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, \tag{2.25}$$

其中 $\Gamma(z)$ 仍由(2.4) 给出.

对这种情况我们不再作详细讨论.

2° 封闭曲线情况　现设 L 是一条封闭的(分段) 光滑曲线，已取定反时针向为其正向. $G(t), g(t)$ 给出在 L 上，但有若干个点 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ (按沿 L 正向前进的方向排列) 为 $G(t)$ 或 $g(t)$ 的第一类间断点，并设 $\in H_0$，即在每一弧段 $L_j = \widehat{c_{j-1}c_j}$ 上 $\in H$ (图 4-6)①. 仍要求解(2.17)，使解在某个类中，且 $\Phi(\infty) = 0$.

图 4-6

现在各 c_j 是问题的节点. 我们可以用下面方法使问题求解的手续稍为简单些.

在诸 L_j 中任意取定一段弧，例如 $L_1 = \widehat{c_0c_1}$. 在其上任意取定 $\log G(t)$ 的一连续分支，它在 c_0, c_1 处的值分别记为 $\log G(c_0+0)$，$\log G(c_1-0)$. 然后接着在 $L_2 = \widehat{c_1c_2}$ 上(若 $n \geqslant 2$) 选取 $\log G(t)$ 的一连续分支，其在 c_1, c_2 处的值分别记为 $\log G(c_1+0), \log G(c_2-0)$，使满足下列条件：如果 c_1 是一特异节点，则要求

$$\arg G(c_1-0) = \arg G(c_1+0)$$

(当然，$G(t)$ 在 c_1 处连续，但 $g(t)$ 在此处不连续时也属此情况)；如果 c_1 是一普通节点，则根据解 $\Phi(z)$ 要求在 c_1 附近有界或允许有可积奇异性，分别要求

$$0 < \frac{1}{2\pi}[\arg G(c_1-0) - \arg G(c_1+0)] < 1$$

或

$$-1 < \frac{1}{2\pi}[\arg G(c_1-0) - \arg G(c_1+0)] < 0.$$

---

① 一般，$G(t), g(t)$ 可有不同的间断点，但不妨把所有这些点都算作节点，甚至 L 上的角点也可列入节点之列.

这就是说，在 c_1 处，我们已做到 $\gamma_{c_1}=\alpha_{c_1}+\mathrm{i}\beta_{c_1}$，简记为 $\gamma_1=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$ 时其中实部 α_1 已分别满足 $\alpha_1=0$，$0<\alpha_1<1$ 或 $-1<\alpha_1<0$. 从而按以前的记号，在 c_1 处应取 $\lambda_1(=\lambda_{c_1})=0$.

然后再在 $L_3=\widehat{c_2c_3}$（若 $n\geqslant 3$）上选取 $\log G(t)$ 的一连续分支，类似于上面方法，使 c_2 满足类似要求，从而 $\lambda_2=0$. 如此继续下去，直到 $L_{n+1}=\widehat{c_nc_0}$ 上也已选定了 $\log G(t)$ 的连续分支为止. 这样，我们得到 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 这时，

$$\gamma_0=\alpha_0+\mathrm{i}\beta_0=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\log G(c_0-0)-\log G(c_0+0)]$$

就已有确定的值. 再根据解类在 c_0 处的要求，定出 λ_0；这样，$\kappa=-\lambda_0$ 就是问题的指标. 这时，典则函数(2.21)就简化成

$$X(z)=(z-c_0)^{-\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, \tag{2.26}$$

其中 $\Gamma(z)$ 仍由(2.4)给出，当然其中 $\log G(t)$ 已如上选定.

我们甚至还可这样做. 一开始不从 c_0 出发，而从例如 L_1 上的一个内点 c 出发($G(t)$ 在这里当然连续)，好像把它也看成一个节点(必然是特异节点). 先设 $\widehat{cc_1}$ 上取定 $\log G(t)$ 的任一连续分支，以后依次在 $L_2,L_3,\cdots,L_n$ 以及 $\widehat{c_0c}$ 上取定 $\log G(t)$ 的连续分支如前，这样就可使 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\lambda_0=0$，但 $\log G(c-0)$ 与 $\log G(c+0)$ 一般并不相等. 但由于 $\log G(t)$ 在 c 处连续，这时

$$\gamma_c=\alpha_c=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\log G(c-0)-\log G(c+0)]$$
$$=\frac{1}{2\pi}[\arg G(c-0)-\arg G(c+0)]$$

已是一整数. 现在应取 λ_c 使 $\lambda_c+\gamma_c=0$，而指标 $\kappa=-\lambda_c$，亦即，这时问题的指标有简单公式

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}\arg\frac{G(c-0)}{G(c+0)}, \tag{2.27}$$

而典则函数(2.26)则要改写为

$$X(z)=(z-c)^{-\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, \tag{2.28}$$

其中 $\Gamma(z)$ 仍由(2.4)给出，当然其中 $\log G(t)$ 也要如上取定.

以上两种做法各有其优点. 前者比较自然，不需引进本来不是节点的 c 点. 特别当 L 上仅有一个节点 c_0 时更为方便. 后者做法对各节点的处理比较整齐. 特别当原有节点中，若有某个 c_k 是 $g(t)$ 的间断点而并不是 $G(t)$ 的间断点时，就可取这个点作为 c 比较方便.

还可注意，1° 的情况可以看做这里的特例. 因为，可以把 1° 中诸 L_j 补充连接成一光滑封闭曲线，而在各补充的弧段上令 $G(t)\equiv 1$，$g(t)\equiv 0$. 这就

变成这里讨论的问题了.

3° 无穷直线情况　当 L 是一条无穷长直线例如实轴 X 时，在应用中也常见. 设在某个解类中要求解 R 问题

$$\Phi^{+}(x)=G(x)\Phi^{-}(x)+g(x),\quad x\in X, \tag{2.29}$$

这里 $G(x),g(x)\in\hat{H}_0$，亦即分段 $\in H$（包括 ∞ 点附近在内）. 这也是 2° 的一特殊情况. 设 $G(x),g(x)$ 在 X 上有间断点（由小到大排列）$c_1,c_2,\cdots,c_n$，同时 ∞ 点也可能是间断点，即在 $\pm\infty$ 处它们可能分别取不同的值. 现在 ∞ 点属于 X，故不能要求 $\Phi(\infty)=0$. 我们只要求 $\Phi(z)$ 当 $z\overline{\in}X$ 时处处解析. 由于 ∞ 点有某些特殊性，故须稍加小心.

我们不妨按 2° 中第一种办法来做：把 ∞ 点看做 c_0，亦即，在 $-\infty\leqslant x\leqslant c_1$ 上，取定 $\log G(x)$ 的一连续分支，然后依次各取它在 $c_1\leqslant x\leqslant c_2,\cdots,c_n\leqslant x\leqslant+\infty$ 上的一连续分支，使在各 c_j 处 $\log G(x)$ 的跳跃符合 2° 中所述要求，最后则定义

$$\gamma_\infty=\alpha_\infty+\mathrm{i}\beta_\infty=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\log G(+\infty)-\log G(-\infty)],$$

由此再确定整数 λ_∞ 使 $\lambda_\infty+\alpha_\infty=0$，或者 $0<\lambda_\infty+\alpha_\infty<1$ 或 $-1<\lambda_\infty+\alpha_\infty<0$，视 ∞ 点为特异节点，或者为普通节点且要求 $\Phi(z)$ 在 ∞ 附近有界或允许有不到一阶奇异性而定. 然后指标为

$$\kappa=-\lambda_\infty.$$

仿照 2.4.1 段，按照我们现在的要求，可以得出如下结果：

设要求问题(2.29) 在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中求解（现在 c_j 不一定要按从小到大的次序排列，∞ 点也可能在 $\{c_1,c_2,\cdots,c_q\}$ 中）. 仍记

$$Y(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in Z^{+};\\ \left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^{\kappa}\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in Z^{-},\end{cases} \tag{2.30}$$

其中

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\,\frac{\log G_0(x)}{x-z}\mathrm{d}x, \tag{2.31}$$

$$G_0(x)=\left(\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\right)^{\kappa}G(x),$$

这里

$$\log G_0(x)=\kappa\log\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}+\log G(x)$$

且 $\log G(x)$ 已如前取定，$\log\dfrac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}$ 也在整个 X 上任意取定一连续分支，但它

在 $x=\pm\infty$ 处的值一般不等. 则当 $\kappa\geqslant 0$ 时，问题(2.29)有一般解

$$\Phi(z)=\frac{Y(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\frac{g(x)}{Y^{+}(x)(x-z)}\mathrm{d}x+\frac{Y(z)Q_{\kappa}(z)}{(z+\mathrm{i})^{\kappa}}, \quad (2.32)$$

其中 $Q_{\kappa}(z)$ 为 κ 次任意多项式；当 $\kappa=-1$ 时，应取 $Q_{\kappa}=0$；当 $\kappa<-1$ 时，当且仅当

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)}{Y^{+}(x)(x+\mathrm{i})^{j}}\mathrm{d}x=0, \quad j=2,3,\cdots,-\kappa \quad (2.33)$$

满足时才有唯一解(2.32)(其中 $Q_{\kappa}\equiv 0$).

习　题

1. 试论证 3° 中的结论.
2. 可不可以把(2.31)写成

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log G_0(x)}{x-z}\mathrm{d}x-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log G_0(x)}{x+\mathrm{i}}\mathrm{d}x,$$

从而略去其中最后一项(这不过影响改变 $Y(z)$ 的一个非零常数因子，但这是允许的)? 类似的问题也存在于解的表达式(2.32)中.

3. 当 ∞ 点不是节点时，上题中提出的问题又应怎样回答?

4.3 间断系数的 Hilbert 边值问题

4.3.1 单位圆情况

设 L 为一封闭的 Lyapunov 曲线，取定反时针向为正向，所围内域记为 S^{+}. 我们再来考虑 Hilbert 问题:

$$\operatorname{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Phi^{+}(t)\}=c(t), \quad t\in L, \quad (3.1)$$

但这一次 $a(t),b(t),c(t)$ 在 L 上可以有有限个第一类间断点，未知函数 $\Phi^{+}(t)$ 是 S^{+} 内全纯函数 $\Phi(z)$ 在 L 上的边值，但在上述各点处，它至多有不到一阶的奇异性.

和 2.6 节中一样，用保形映射，可以把 L 及其内域 S^{+} 变成单位圆周及其内域. 这时 $a(t),b(t),c(t)$ 仍保留着同样的性质. 因此，以下我们不妨就设 L 为单位圆周 $|t|=1$，S^{+} 为 $|z|<1$. 我们设 $a(t),b(t),c(t)$ 在 L 上 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 处有第一类间断点，仍称为问题的节点，还设它们 $\in H_0$ 于 L 上，并限于考虑正则型情况: $a(t)\pm\mathrm{i}b(t)\neq 0$ 于 L 上.

与 2.6.3 段中类似，把 $\Phi(z)$ 对称扩张成全平面中的分区全纯函数

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z), & \text{当 } z\in S^+\text{时；}\\ \overline{\Phi}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\overline{\Phi\left(\dfrac{1}{\bar z}\right)}, & \text{当 } z\in S^-\text{时，}\end{cases}$$

则问题仍可化为 R_0 问题(即要求 $\Phi(\infty)$ 有界)

$$\Omega^+(t)=G(t)\Omega^-(t)+g(t), \tag{3.2}$$

其中

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib},\quad g(t)=\frac{2c}{a+ib}, \tag{3.3}$$

且要求 $\Omega(z)$ 满足条件 $\Omega(z)=\overline{\Omega}\left(\dfrac{1}{z}\right)$. 所不同的，现在是间断系数的 Riemann 边值问题. 问题(3.1)的解也可分成一些解类，也是 $\Omega(z)$ 所属的解类，例如，要求属于 $h(c_0,c_1,\cdots,c_q)$，即，在普通节点 $c_0,c_1,\cdots,c_q$ 附近有界，而在其他节点不作此限制. 这时普通节点与特异节点区分的方法就按照 R 问题(3.2)来决定.

对于(3.2)，我们可按 4.2.4 段，2° 中的方法求解，这时

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L \tag{3.4}$$

就是问题的指标. 但要注意，现在 κ 不一定是偶数. 这是因为，在讨论 $\dfrac{a-ib}{a+ib}$ 的辐角的跃度时，要与整个函数 $\log\dfrac{a-ib}{a+ib}$ 的虚部的跃度相联系来看，而不能拆成两个函数 $\log(a-ib)$ 与 $\log(a+ib)$ 来看.

以下的讨论完全与 2.6.3 段类似. 要特别当心的是：κ 现在可以是偶数也可以是奇数.

现在规范化典则函数 $X(z)$ 仍如 2.6 节给出，对于齐次问题($c\equiv 0$)，当 $\kappa\geqslant 0$ 时，R_0 问题(3.2)的一般解仍如第二章(6.17)式给出；由对于 $\Omega(z)$ 的特殊要求 $\Omega(z)=\overline{\Omega}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ 以及 $\overline{X}\left(\dfrac{1}{z}\right)=z^{\kappa}X(z)$ (参看第二章(6.16)式)，则所求解

$$\Phi(z)=X(z)(C_0z^{\kappa}+C_1z^{\kappa-1}+\cdots+C_{\kappa}),\quad z\in S^+, \tag{3.5}$$

其中

$$C_k=\overline{C}_{\kappa-k}. \tag{3.6}$$

当 κ 为偶数时，这又和第二章(6.18)式相同($C_{\kappa/2}$ 为实数)；当 κ 为奇数时，则(3.6)说明只有 $C_0,C_1,\cdots,C_{(\kappa-1)/2}$ 可以任意选取. 不论哪种情况，(3.5)中共含有 $\kappa+1$ 个实常数，当 $\kappa\leqslant -1$ 时，齐次问题在所说解类中只有零解.

对非齐次 H 问题(3.1) 来说，当$\kappa\geqslant 0$时，其一个特解仍如第二章(6.22)表示为

$$\Phi_0(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\left[\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}+z^\kappa\int_L\frac{t^{-\kappa}c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}\right.$$
$$\left.-z^\kappa\int_L\frac{t^{-\kappa-1}c\,dt}{(a+ib)X^+(t)}\right]. \tag{3.7}$$

再加上(3.5) 式就是所求一般解. 当$\kappa=-1$时，它有唯一解(3.7)，但这时解又可化简为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}. \tag{3.7$'$}$$

当$\kappa\leqslant -2$时，又和以前一样，非齐次问题(3.1) 当且仅当满足可解条件

$$\int_L\frac{t^k c\,dt}{(a+ib)X^+(t)}=0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-2 \tag{3.8}$$

时有唯一解，且此时解仍可写成(3.7)′.

习　题

试证：在(3.8) 中，当$k=j$与$k=-\kappa-2-j$时它们只表示同一式子. 由此计算出(3.8) 中实际上共有多少个实的条件. 并说明问题的实自由度.

提示　利用等式$(a-ib)X^-(t)=-(a+ib)X^+(t)$以及$X^+(t)=t^{-\kappa}\overline{X^-(t)}$. 并注意当$\kappa$为偶数时，(3.8) 中当$k=-\frac{\kappa}{2}-1$时是一个实条件.

答　实自由度为$\kappa+1$.

4.3.2　半平面情况

和连续系数情况一样，半平面中间断系数的 H 问题也是很常见的. 仍设$L=X$为实轴. 要寻求一个在上半平面Z^+内全纯的函数$\Phi(z)$，使其在X上的边值满足条件

$$\mathrm{Re}\{[a(x)+ib(x)]\Phi^+(x)\}=c(x),\quad x\in X, \tag{3.9}$$

其中$a(x),b(x),c(x)$为$\in\hat{H}_0$的函数，在X上有若干个第一类间断点c_0，$c_1,\cdots,c_n$（∞点也可能在其内），在这些节点附近，允许$\Phi(z)$有至多不到一阶的奇异性.

和 2.6.4 段类似，定义

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z), & \text{当 } z\in Z^+;\\ \overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar z)}, & \text{当 } z\in Z^-,\end{cases}$$

则问题(3.9) 可化为 R 问题

$$\Omega^{+}(x)=G(x)\Omega^{-}(x)+g(x),\quad x\in X, \tag{3.10}$$

其中

$$G(x)=-\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b},\quad g(x)=\frac{2c}{a+\mathrm{i}b}.$$

按照问题(3.10)，也可把节点分为普通节点与特异节点两类，并规定(3.10)或即(3.9)所求的解属于$h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$类，当然$c_1,c_2,\cdots,c_q$都应是普通节点. 于是可求出(3.10)亦即(3.9)在该类中的指标

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}[\arg G(x)]_X=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b}\right]_X, \tag{3.11}$$

这里辐角的选法见4.2.4段，3°. 这样，$Y(z)$仍由(2.30)给出，其中$\Gamma(z)$现在可写成

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\frac{\Theta(x)}{x-z}\mathrm{d}x+C, \tag{3.12}$$

这里

$$\Theta(x)=\frac{1}{\mathrm{i}}\log\left[\left(\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\right)^{\kappa}G(x)\right]=\arg\left[-\left(\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\right)^{\kappa}\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b}\right]$$

为一实函数. 此外，考虑到$\Gamma(z)$可相差一常数因子，因此我们在(3.12)右端添加了一待定常数C的项. 我们将选择C使结果简化，要求$\overline{\Gamma}(z)=\Gamma(z)$. 但因

$$\overline{\Gamma}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z-\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\frac{\Theta(x)}{x-z}\mathrm{d}x+\overline{C},$$

因此，为达到目的，只要把C取成纯虚数$\mathrm{i}\gamma$就行. 这时

$$2\mathrm{i}\gamma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{z-\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}-\frac{z+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\right)\frac{\Theta(x)}{x-z}\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Theta(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x,$$

从而

$$\begin{aligned}\Gamma(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\frac{\Theta(x)}{x-z}\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Theta(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(xz+1)\Theta(x)}{(x^2+1)(x-z)}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.12'}$$

这时，如2.6.4段那样，也有

$$\overline{Y}(z)=\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^{\kappa}Y(z). \tag{3.13}$$

这样，对齐次R问题(3.10) ($c\equiv 0$)，如果$\kappa\geqslant 0$，则其一般解为

$$\Omega(z)=\frac{Y(z)}{(z+\mathrm{i})^{\kappa}}(C_0+C_1z+\cdots+C_{\kappa}z^{\kappa}). \tag{3.14}$$

但对H问题(3.9)来说，

$$\Phi(z)=\frac{1}{2}[\Omega(z)+\bar{\Omega}(z)].$$

于是由(3.13)立即可知，(3.14)中的所有 $C_0, C_1, \cdots, C_\kappa$ 均应取成实数，就成为齐次问题(3.9)在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的一般解. 注意，由于这时 $z\in Z^+$，故 $Y(z)=e^{\Gamma(z)}$. 当 $\kappa<0$ 时，问题显然只有零解.

对于非齐次 R 问题(3.10)，当 $\kappa\geqslant-1$ 时，由(2.32)，有特解

$$\begin{aligned}\Omega(z)&=\frac{Y(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z+i}{x+i}\frac{g(x)dx}{Y^+(x)(x-z)}\\&=\frac{Y(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z+i}{x+i}\frac{c\,dx}{(a+ib)Y^+(x)(x-z)},\end{aligned}\tag{3.15}$$

从而 H 问题(3.9)在所求解类中有一特解

$$\Phi(z)=\frac{1}{2}[\Omega(z)+\bar{\Omega}(z)],$$

再加上相应齐次问题的解(3.14)即得其一般解. 注意到

$$\overline{Y^+(x)}=\bar{Y}^-(x)=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^\kappa Y^-(x)=-\frac{a+ib}{a-ib}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^\kappa Y^+(x),$$

因此 $\bar{\Omega}(z)$ 可由下式算出：

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}(z)&=-\frac{\bar{Y}(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z-i}{x-i}\frac{c\,dx}{(a-ib)\overline{Y^+(x)}(x-z)}\\&=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^\kappa\frac{Y(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{x-i}\right)\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^\kappa\frac{c\,dx}{(a+ib)Y^+(x)(x-z)}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

特别，当 $\kappa=-1$ 时，易见 $\bar{\Omega}(z)=\Omega(z)$，因此这时 H 问题(3.9)有唯一解 $\Omega(z)$ 由(3.15)给出.

当 $\kappa<-1$ 时，R 问题的可解条件是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c\,dx}{(a+ib)Y^+(x)(x+i)^j}=0,\quad j=2,3,\cdots,-\kappa,\tag{3.17}$$

也可写成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^j\frac{c\,dx}{(a+ib)Y^+(x)(x+i)^2}=0,$$
$$j=0,1,\cdots,-\kappa-2.\tag{3.17'}$$

它也是 H 问题(3.9)的可解条件. 当它们成立时，R 问题(3.10)有唯一解(3.15). 但易证 $\bar{\Omega}(z)$ 也是其一个解，因而由解的唯一性知 $\bar{\Omega}(z)=\Omega(z)$，从而 H 问题(3.9)的唯一解仍可由(3.15)给出.

为了检验我们所得结果的正确性，不妨直接验证当 $\kappa<-1$ 时，确实 $\bar{\Omega}(z)=\Omega(z)$. 将(3.16)改写为

$$\overline{\Omega}(z)=\frac{Y(z)}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(z+\mathrm{i})^{-\kappa}}{(z-\mathrm{i})^{-\kappa-1}}\frac{(x-\mathrm{i})^{-\kappa-1}}{(x+\mathrm{i})^{-\kappa}(x-z)}\frac{c\,\mathrm{d}x}{(a+\mathrm{i}b)Y^{+}(x)}.$$

设

$$\frac{(x-\mathrm{i})^{-\kappa-1}}{(x+\mathrm{i})^{-\kappa}(x-z)}=\frac{A_{-\kappa}}{(x+\mathrm{i})^{-\kappa}}+\cdots+\frac{A_1}{x+\mathrm{i}}+\frac{B}{x-z},$$

易证

$$B=-A_1=\frac{(z-\mathrm{i})^{-\kappa-1}}{(z+\mathrm{i})^{-\kappa}},$$

再利用可解条件(3.17)′，便可得到

$$\overline{\Omega}(z)=\Omega(z).$$

为了弄清楚可解条件(3.17)或(3.17)′中究竟有多少个实的条件，如2.6.4段中所做那样进行讨论．由(3.12)知，

$$Y^{+}(x)=\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\Theta(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+\mathrm{i}}{\xi+\mathrm{i}}\frac{\Theta(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi\right\}.$$

不计一非零常数因子，又可写

$$Y^{+}(x)=\sqrt{-\left(\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\right)^{\kappa}\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b}}\,\nu(x),$$

其中

$$\nu(x)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\xi x+1)\Theta(\xi)}{(\xi^2+1)(\xi-x)}\mathrm{d}\xi\right\}.$$

记

$$\arg(x+\mathrm{i})=\theta(x),\quad \arg(x-\mathrm{i})=-\theta(x),$$

其中 $\theta(x)$ 已取定一连续分支，例如 $\theta(+\infty)=0$．于是

$$\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta},$$

可解条件(3.17)′现可写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(k+\frac{\kappa}{2})\theta}\frac{\nu(x)c\,\mathrm{d}x}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}(x+\mathrm{i})^2}=0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-2,\tag{3.18}$$

其中 $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ 要理解为

$$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}=(a+\mathrm{i}b)\sqrt{\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b}}=(a+\mathrm{i}b)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\omega(x)},$$

$$\omega(x)=\arg\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b}.$$

这里，最后一式中的辐角已按以前规定取好．注意

$$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{a^2+b^2},$$

其中正、负号在相邻节点间的各直线段上可能各自取得不同. 记

$$H(x)=\frac{\nu(x)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)}=\frac{\nu(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega(x)}}{(a+\mathrm{i}b)(x^2+1)},$$

它是一实函数(在节点处可有第一类间断点). 这样, (3.18) 可写成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(k+\frac{\kappa}{2}+1)\theta}H(x)c(x)\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-2.$$

当 κ 为偶数时, 写成实的形式, 则为

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)c(x)\cos 2j\theta(x)\ \mathrm{d}x=0,\ j=0,1,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1;\\&\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)c(x)\sin 2j\theta(x)\ \mathrm{d}x=0,\ j=1,2,\cdots,-\frac{\kappa}{2}-1;\end{aligned}\right\}\tag{3.19}$$

当 κ 为奇数时, 则有

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)c(x)\cos\ (2j-1)\theta(x)\ \mathrm{d}x=0,\\&\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)c(x)\sin\ (2j-1)\theta(x)\ \mathrm{d}x=0,\end{aligned}\right\}$$

$$j=1,2,\cdots,-\frac{\kappa+1}{2}.\tag{3.20}$$

因此, 无论 κ 为偶数或奇数, (3.19) 与(3.20) 都表示 $-\kappa-1$ 个实的条件.

由此可见, 原 H 问题的实自由度为 $\kappa+1$.

习　题

1. 试作出单位圆中间断系数的解析函数 Dirichlet 问题的解.
2. 同上题, 但单位圆改为上半平面.
3. 试研究正文中 $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{a^2+b^2}$ 的正、负号究竟如何选取.

4.4 其他边值问题

4.4.1 一般复合边值问题

现在我们可以把 2.7 节讨论过的复合边值问题推广到更一般的情形. 仍设 D 为一有界单连通区域, 其边界 L 为一 Lyapunov 曲线. 又设 $\Gamma=\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j$ 由 D 内一组互不相交的光滑弧段 $\Gamma_j=\widehat{a_jb_j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 所组成, 且已取定自

a_j 到 b_j 为其正向(如果 Γ_j 中有某些为封闭曲线也无关紧要). **复合 RH 问题**提法如下：求在 $D-\Gamma$ 内全纯、连续到 L 与 Γ 两侧(端点可能除外)上的函数 $\Phi(z)$，使满足

$$1^\circ \qquad \Phi^+(\tau)=G(\tau)\Phi^-(\tau)+g(\tau),\quad \tau\in\Gamma, \tag{4.1}$$

$$2^\circ \qquad \mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Phi(t)\}=c(t),\quad t\in L, \tag{4.2}$$

这里为简单起见，设实函数 $a(t),b(t),c(t)\in H$ 于 L 上，且 $a+\mathrm{i}b\neq 0$，而 $G(t),g(t)\in H$ 于 Γ 上，且 $G(t)\neq 0$. 要注意的是：在 Γ 的各端点 a_j,b_j 附近，$\Phi(z)$ 可允许有不到一阶的奇异性. 我们可按 1° 的要求，仿照 R 问题时那样，把各端点分为普通端点与特异端点两类，也同样称为上述 RH 问题的**普通端点**或**特异端点**. 求解时，也应要求 $\Phi(z)$ 属于某一指定的解类，例如 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_q$ 为某些普通端点，即要求 $\Phi(z)$ 在这些端点附近有界，而在其他普通端点附近可以允许有不到一阶的奇异性，而在所有特异端点附近，以后可以看到，只能至多是几乎有界的.

2.7 节中所述的消去法这时仍有效.

在各 Γ_j 上取定 $\log G(\tau)$ 的一连续分支，记

$$\alpha_j=\mathrm{Re}\left[-\frac{\log G(a_j)}{2\pi\mathrm{i}}\right],\quad \beta_j=\mathrm{Re}\left[\frac{\log G(b_j)}{2\pi\mathrm{i}}\right],$$

使得

$$\begin{aligned} 0<\alpha_j<1,&\quad \text{当 } a_j\in\{c_1,c_2,\cdots,c_q\};\\ \alpha_j=0,&\quad \text{当 } a_j \text{ 为特异节点};\\ -1<\alpha_j<0,&\quad \text{其余情况}; \end{aligned}$$

并再选取整数 κ_j，使得

$$\begin{aligned} 0<\beta_j-\kappa_j<1,&\quad \text{当 } b_j\in\{c_1,c_2,\cdots,c_q\};\\ \kappa_j=\beta_j,&\quad \text{当 } b_j \text{ 为特异节点};\\ -1<\beta_j-\kappa_j<0,&\quad \text{其余情况}. \end{aligned}$$

于是，$\kappa=\sum_{j=1}^{n}\kappa_j$ 为相应 R 问题 1° 属于 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类的指标. 再记

$$k=\mathrm{Ind}_L(a-\mathrm{i}b)=\frac{1}{2\pi}[\arg(a-\mathrm{i}b)]_L,$$

我们就可称 $K=k+\kappa$ 为 RH 问题属于 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中的**指标**.

相应 R 问题 1° 的典则函数现在是

$$X(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-b_j)^{-\kappa_j}\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, \tag{4.3}$$

其中

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\log G(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\overline{\in}\Gamma.$$

在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中求出 D 中相应 R 问题的一个特解

$$\Phi_1(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau-z)}d\tau. \tag{4.4}$$

利用消去法换元，令

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+X(z)\Phi_0(z), \tag{4.5}$$

其中 $\Phi_0(z)$ 为 $D-\Gamma$ 中新的未知函数.

和 2.7 节中一样，易证在各 Γ_j 弧的内点 τ 处，$\Phi_0^+(\tau)=\Phi_0^-(\tau)$，故 $\Phi_0(z)$ 在 D 内单值解析，只在各端点 a_j,b_j 处可能有奇点. 我们来证明，$\Phi_0(z)$ 在各端点处也是解析的.

由(2.7)知，$X(z)$ 在端点 $c\ (=a_j$ 或 $b_j)$ 附近，

$$X(z)=(z-c)^{\gamma_c}\chi_c(z),$$

其中 $\mathrm{Re}\,\gamma_c=\alpha_c$，$-1<\alpha_c<1$，而 $\chi_c(z)$ 在 c 附近割开的邻域中解析，且 $\neq 0$. 注意到$\Phi_1(z)\in h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$，根据对 $\Phi(z)$ 的要求，可见应要求 $X(z)\Phi_0(z)\in h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$.

若 c 为一特异端点，则 $\alpha_c=0$，因此 $X(z)$ 在 c 附近有界，且 $\neq 0$，今 $\Phi_0(z)$ 既以 c 为孤立奇点，而又只有不到一阶的奇异性，故必以 c 为常点. 顺便看出，因为这时 $\Phi_1(z)$ 在 $z=c$ 附近几乎有界，可见，如果 RH 问题有解，则解 $\Phi(z)$ 也必在 $z=c$ 附近几乎有界. 若 $c\in\{c_1,c_2,\cdots,c_q\}$，则因 $0<\alpha_c<1$，又 $\Phi_1(z)$ 在这里有界，故为了保证 $X(z)\Phi_0(z)$ 也在此有界，$\Phi_0(z)$ 也必以 c 为常点，且这时未知函数 $\Phi(z)$ 也必在此有界. 若 c 不属以上两种情况，则 $-1<\alpha_c<0$，$\Phi_1(z)$ 在 c 附近有不到一阶奇异性，为了保证 $\Phi(z)$ 也是如此，必须 $X(z)\Phi_0(z)$ 也是如此，从而 $\Phi_0(z)$ 也只能至多有不到一阶的奇异性，因此也必以 c 为常点.

总之，无论 c 是Γ 上的哪一种端点，$\Phi_0(z)$ 总以它为常点，因而 $\Phi_0(z)$ 在 D 内全纯. 又因 $\Phi_1(z),X(z)$ 都连续到 L 上，且 $X(z)\neq 0$，故 $\Phi_0(z)$ 也必连续到 L 上，而 $\Phi_0(z)$ 在 L 上的边值则应满足条件

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+ib(t)]X(t)\Phi_0(t)\}=c^*(t),\quad t\in L, \tag{4.6}$$

其中

$$c^*(t)=c(t)-\mathrm{Re}\{[a(t)+ib(t)]\Phi_1(t)\}.$$

这样，原RH问题就化成了L上的 H 问题(4.6). 这是一个 L 上连续系数的 H 问题. 由(4.3)，

$$\mathrm{Ind}_L X(t) = -\sum_{j=1}^{n} \kappa_j = -\kappa,$$

故这个 H 问题的指标为

$$\mathrm{Ind}_L\{[a(t) - \mathrm{i}b(t)]\overline{X(t)}\} = k + \kappa = K.$$

以后的讨论与 2.7.2 段全同，从略.

且可看到，由于 $\Phi_1(z) \in h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$，所得的 $\Phi(z)$ 也的确属于这同一类.

习 题

1. 当 Γ 改为由一些带节点的光滑弧段时，本段中的论证仍是有效的，请补充作出.

2. 如果 $a(t), b(t), c(t)$ 在 L 上也有第一类间断点，且 $\in H_0$，则相应的 RH 问题会有什么结果?

提示 特别注意指标概念的差异.

4.4.2 一般的 PR 问题

本段考虑开口弧段或间断系数情况的周期 Riemann 边值问题. 如前，仍记为 **PR 问题**.

如 2.8.1 段中所述，$|\mathrm{Re}\, z| < \frac{1}{2} a\pi$ 为一周期带. 我们将着重讨论开口弧段情况. 设 L_0 由 p 条开口弧段 $\widehat{a_r b_r}$ $(r = 1, 2, \cdots, p)$ 所组成，它们彼此不相交，都落在上述基本周期带内，且已取定自 a_r 到 b_r 为正向. 与 L_0 周期合同的曲线的集合记为 L. 我们的问题是：求解下列周期边值问题：

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \tag{4.7}$$

其中 $G(t), g(t) \in H$ 于 L 上，且以 $a\pi$ 为周期，$G(t) \neq 0$，而 $\Phi(z)$ 是全平面上除去 L 后的全纯周期函数.

对于 L_0 或 L 的各端点可与通常一样类似地定义普通端点和特异端点，且要求 (4.7) 的解属于某个解类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 为 $\{a_r, b_r\}_1^p$ 中的某些普通端点. 完全可同样定义问题在这个类中的指标.

仍用变换

$$\zeta = \tan\frac{z}{a}, \quad \tau = \tan\frac{t}{a}$$

变到 ζ 平面，则(4.7) 转化为通常的 R 问题

$$\Phi_*^+(\tau) = G_*(\tau)\Phi_*^-(\tau) + g_*(\tau), \quad \tau \in \Gamma_0, \tag{4.7$'$}$$

其中$G_*\left(\tan\frac{t}{a}\right)=G(t)$，等等，$\Gamma_0$为$L_0$的像. 这时$\Phi_*(\zeta)$必属于$h(c_1^*,c_2^*,\cdots,c_q^*)$，这里$c_j^*=\tan\frac{c_j}{a}$，且$\Phi_*(\infty)$必须有界，而$\Phi_*(\pm\mathrm{i})$亦即$\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$仍保留有任意性.

Ⅰ. 先来讨论齐次PR问题($g\equiv 0$). 不论对$\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$作何限制，此问题的解$\Phi(z)$在特异端点附近必定有界；在普通端点附近，若有界，则必为零.

1° 要求$\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$有界. 这时(4.7)′在$h(c_1^*,c_2^*,\cdots,c_q^*)$类中的一般解为

$$\Phi_*(\zeta)=X_*(\zeta)P_\kappa(\zeta),$$

其中

$$X_*(\zeta)=\prod_{j=1}^{2p}(\zeta-c_j^*)^{\lambda_j}\mathrm{e}^{\Gamma_*(\zeta)},$$

$$\Gamma_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\frac{\log G_*(\tau)}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau,$$

$P_*(\zeta)$为ζ的κ次任意多项式，这里λ_j与指标κ的确定方法均同4.2.2段.

回到z平面，得齐次PR问题(4.7)在$h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$类中的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)P_\kappa\left(\tan\frac{z}{a}\right),\tag{4.8}$$

其中

$$X(z)=\prod_{j=1}^{2p}\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{c_j}{a}\right)^{\lambda_j}\mathrm{e}^{\Gamma(z)},$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\log G(t)\,\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t.\tag{4.9}$$

不难看出，(4.8)也可改写成

$$\Phi(z)=\prod_{j=1}^{2p}\sin^{\lambda_j}\frac{z-c_j}{a}\,\mathrm{e}^{\Gamma(z)}Q_\kappa\left(\sin\frac{z}{a},\cos\frac{z}{a}\right),\tag{4.8$'$}$$

这里$Q_\kappa(X,Y)$为X,Y的κ次任意齐次多项式.

当$\kappa<0$时，(4.8)或(4.8)′要理解为$\Phi(z)=0$，即这时齐次PR问题(4.7)只有零解.

2° 要求$\Phi(+\infty\mathrm{i})=\Phi(-\infty\mathrm{i})$. 这时应要求(4.8)中的$P_\kappa(\zeta)$适合条件

$$P_\kappa(+\mathrm{i})=G_\infty P_\kappa(-\mathrm{i}),$$

其中

$$G_\infty=\frac{X(-\infty\mathrm{i})}{X(+\infty\mathrm{i})}=\prod_{j=1}^{2p}\left[\frac{\tan\frac{c_j}{a}+\mathrm{i}}{\tan\frac{c_j}{a}-\mathrm{i}}\right]^{\lambda_j}\exp\left\{-\frac{1}{a\pi}\int_{L_0}\log G(t)\,\mathrm{d}t\right\}$$

$$= (-1)^{\kappa}\exp\left\{-\frac{2\mathrm{i}}{a}\sum_{j=1}^{2p}\lambda_j c_j - \frac{1}{a\pi}\int_{L_0}\log G(t)\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{4.10}$$

注意，$\kappa=0$ 时，$P_0=C_0$ 为一常数，因此齐次 PR 问题有非零解的条件为 $G_\infty=1$，亦即

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\log G(t)\,\mathrm{d}t \equiv -\sum_{j=1}^{2p}\lambda_j c_j \pmod{a\pi}. \tag{4.11}$$

当 $\kappa=0$ 而(4.11)不满足或者 $\kappa<0$ 时，齐次 PR 问题只有零解.

3° 要求 $\Phi(+\infty\mathrm{i})=-\Phi(-\infty\mathrm{i})$. 这时应要求

$$P_\kappa(+\mathrm{i})=-G_\infty P_\kappa(-\mathrm{i}).$$

与 2° 相仿，$\kappa=0$ 时原齐次 PR 问题有非零解的条件为 $G_\infty=-1$，亦即，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L}\log G(t)\,\mathrm{d}t \equiv \frac{a\pi}{2}-\sum_{j=1}^{2p}\lambda_j c_j \pmod{a\pi}; \tag{4.11$'$}$$

这时若它不满足或者 $\kappa<0$，就只有零解.

4° 要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})=0$. 这时齐次 PR 问题的一般解为

$$\Phi(z)=\prod_{j=1}^{2p}\sin^{\lambda_j}\frac{z-c_j}{a}\,\mathrm{e}^{\Gamma(z)}Q_{\kappa-2}\left(\sin\frac{z}{a},\cos\frac{z}{a}\right); \tag{4.12}$$

当然，当 $\kappa<2$ 时就只有零解.

Ⅱ. 现在讨论非齐次 PR 问题. 这时，不论对 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 作何种限制，在特异端点附近，其解 $\Phi(z)$ 一定至多几乎有界.

一般情形下的讨论，完全和以前相似.

下面我们感兴趣的是一个重要特例. 设 L_0 是 X 轴上一线段 γ_0: $-l\leqslant x\leqslant l$，其中 $l<\frac{1}{2}a\pi$，且 $G(x)=-K$ 是一负实常数的情形，并要求在 h_0 类中求解，即在 $x=\pm l$ 处解允许有不到一阶的奇异性.

现在 $c_1=-l$，$c_2=l$. 取 $\log(-K)=\ln K+\pi\mathrm{i}$. 因此，

$$\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta,\quad \alpha_2+\mathrm{i}\beta_2=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta,$$

其中已令 $\beta=\dfrac{\ln K}{2\pi}$. 所以 c_1,c_2 都是普通端点，且在 h_0 类中，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$，从而指标 $\kappa=1$. 这时易见

$$\Gamma(z)=\frac{\log(-K)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}\cot\frac{x-z}{a}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta\right)\log\frac{\tan\dfrac{z}{a}-\tan\dfrac{l}{a}}{\tan\dfrac{z}{a}+\tan\dfrac{l}{a}},$$

从而

$$X(z)=\left(\tan\frac{z}{a}+\tan\frac{l}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta}\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{l}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta},$$

这里已设 z 平面沿 γ_0 剖开，且 $X(z)$ 已任意取定一支，例如，使

$$\lim_{z\to\pm\frac{1}{2}a\pi}\tan\frac{z}{a}X(z)=1.$$

因此，若补充要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界，则问题的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}\frac{g(x)}{X^{+}(x)}\cot\frac{x-z}{a}\mathrm{d}x+X(z)\left(C_0\tan\frac{z}{a}+C_1\right).\tag{4.13}$$

若要求 $\Phi(+\infty\mathrm{i})=-\Phi(-\infty\mathrm{i})$，则因由(4.10)，现在易得

$$G_\infty=-K^{-\frac{2l}{a\pi}}\tag{4.14}$$

为一负实数，而在(4.13)中令 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 代入，得

$$\Phi(+\infty\mathrm{i})=\frac{X(+\infty\mathrm{i})}{2a\pi}\int_{-l}^{l}\frac{g(x)}{X^{+}(x)}\mathrm{d}x+X(+\infty\mathrm{i})(C_0\mathrm{i}+C_1),$$

$$\Phi(-\infty\mathrm{i})=-\frac{X(-\infty\mathrm{i})}{2a\pi}\int_{-l}^{l}\frac{g(x)}{X^{+}(x)}\mathrm{d}x+X(-\infty\mathrm{i})(-C_0\mathrm{i}+C_1),$$

因此，由于 $G_\infty=\dfrac{X(-\infty\mathrm{i})}{X(+\infty\mathrm{i})}$，所要求条件成为

$$\frac{G_\infty-1}{2a\pi}\int_{-l}^{l}\frac{g(x)}{X^{+}(x)}\mathrm{d}x=(1-G_\infty)C_0\mathrm{i}+(1+G_\infty)C_1.$$

由于 $G_\infty<0$，故可写

$$C_0=-\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}\frac{g(x)}{X^{+}(x)}\mathrm{d}x+\frac{1+G_\infty}{1-G_\infty}C_1\mathrm{i}.$$

以此代入(4.13)，最后可得

$$\begin{aligned}\Phi(z)=&\frac{X(z)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}\frac{g(x)}{X^{+}(x)}\left(\cot\frac{x-z}{a}-\tan\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}x\\&+C_1X(z)\left(1+\mathrm{i}\frac{1+G_\infty}{1-G_\infty}\tan\frac{z}{a}\right)\\=&\frac{X(z)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}\frac{g(x)}{X^{+}(x)}\left(\cot\frac{x-z}{a}-\tan\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}x\\&+\frac{CX(z)}{\cos\frac{z}{a}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}z}{a}}-G_\infty\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}z}{a}}\right),\end{aligned}\tag{4.15}$$

其中 C 又为任意常数，而 G_∞ 由(4.14)给出.

特别值得注意的是 $K=1$ 的情况，这时 $G_\infty=-1$，而

$$X(z)=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{R(z)}},\quad R(z)=\tan^2\frac{l}{a}-\tan^2\frac{z}{a}.\tag{4.16}$$

于是，在 $\Phi(+\infty\mathrm{i})=-\Phi(-\infty\mathrm{i})$ 的要求条件下，问题在 h_0 类中的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}g(x)\sqrt{R(x)}\left(\cot\frac{x-z}{a}-\tan\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}x+\frac{C}{\sqrt{R(z)}}.\tag{4.17}$$

这里，在(4.16)与(4.17)中，$\sqrt{R(z)}$ 可在沿 γ_0 剖开的平面上任意取定一支，例如，当 z 由上半平面趋于 γ_0 上的点时，根式取正值，亦即，在(4.17)中，可以认为 $\sqrt{R(x)}\geqslant 0$.

最后我们指出，如果 L_0 是基本周期带内的一条光滑封闭曲线，但 $G(t)$，$g(t)\in H_0$ 于其上，且 $G(t)\neq 0$，这时间断系数的 PR 问题完全可类似地求解.

习 题

1. 对本段中讨论的特殊情况，分别在补充条件 $\Phi(+\infty\mathrm{i})=\Phi(-\infty\mathrm{i})$ 或 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})=0$ 的情况下求解. 如果只要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界又如何?

*2. 对间断系数的 PR 问题作出详细讨论.

4.4.3 开口弧段的 DR 问题

本段讨论双周期的 Riemann 边值问题，即 **DR 问题**. 仍设 $\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)>0$. 基本胞腔 P 以及记号均同 2.9.2 段. 但现设 $L_0=\widehat{ab}$ 位于这胞腔内，取定自 a 到 b 的方向为正向. 基本胞腔除去 L_0 后的区域记为 S_0，L_0 的周期合同曲线族的集合记为 L，全平面除去 L 后的区域记为 S. 我们要求解下列 DR 问题：

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L,\tag{4.18}$$

其中 $G(t),g(t)\in H$ 于 L 上，均为双周期的，$G(t)\neq 0$，$\Phi(z)$ 为以 L 为跳跃曲线的双周期解析函数.

本段结果采自著者的论文[18]. 虽然我们限定 L_0 只是一个开口弧段，但所用方法明显可推广到 L_0 由任意个开口弧段组成的情况.

与通常的 R 问题一样，也可把端点分类，从而解也可分类. 以下为确定起见，只就在 h_0 类中求解，但所用方法对在别的类中求解时仍有效.

不失一般性，我们假定 $O\overline{\in} L_0$. $\Phi(z)$ 在 S 中处处正则的问题记为 DR_0. 而若允许 $\Phi(z)$ 在 $z=0$ 处可以有一阶极点，则称问题为 DR_1. 我们将只考虑 DR_0 或 DR_1 问题.

设 $\log G(t)$ 已取定一支，使

$$-\frac{1}{2\pi i}\log G(a)=\alpha_a+i\beta_a,\quad -1<\alpha_a\leqslant 0,$$

并设

$$\frac{1}{2\pi i}\log G(b)=\alpha_b+i\beta_b,$$

则适合 $-1<\alpha_b-\kappa\leqslant 0$ 的整数 κ 为问题在 h_0 类中的指标. 此外，记

$$G_*=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\log G(t)\,dt, \tag{4.19}$$

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\log G(t)\,\zeta(t-z)dt,\quad z\overline{\in}L. \tag{4.20}$$

易证，在端点 $c(=a$ 或 $b)$ 附近，

$$e^{\gamma(z)}=(z-c)^{\alpha_c+i\beta_c}\Omega_c(z),$$

其中 $\Omega_c(z)$ 在 $z=c$ 用 L_0 剖开后的邻域内全纯，且 $\Omega_0(c)\neq 0$，于是

$$|e^{\gamma(z)}|\leqslant M|z-c|^{\alpha_c}.$$

此外，由于

$$e^{\gamma(z+2\omega_j)}=e^{-2\eta_j G_*}e^{\gamma(z)},\quad j=1,2,$$

所以 $e^{\gamma(z)}$ 一般说来是乘法双准周期的，当且仅当

$$\eta_j G_*=k_j\pi i,\quad k_j \text{ 为整数}, j=1,2 \tag{4.21}$$

时才是双周期的.

我们有下列诸引理.

引理4.4.1 当且仅当

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{k_1}{k_2},\quad G_*=2k_1\omega_2-2k_2\omega_1$$

时(4.21)成立，亦即 $e^{\gamma(z)}$ 为双周期的；又若 $G_*=2l_1\omega_1+2l_2\omega_2$ 而 $\eta_j G_*=k_j\pi i$，则必 $l_1=-k_2$，$l_2=k_1$（这里 k_j,l_j 均为整数）.

利用熟知的关系式

$$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=\frac{1}{2}\pi i$$

立即可证明此引理.

引理4.4.2 设

$$\Psi(z)=\int_{L_0}(t-c)^r\varphi(t)\zeta(t-z)dt,\quad z\overline{\in}L,\ c=a \text{ 或 } b, \tag{4.22}$$

其中 $\varphi(t)\in H$，r 为一正整数，则当且仅当

$$\int_{L_0}(t-c)^r\varphi(t)\zeta^{(s)}(t-c)\mathrm{d}t=0,\quad s=0,1,\cdots,r-1 \tag{4.23}$$

成立时，$\Psi(z)$ 在 $z=c$ 处至少有几乎 r 阶的零点，即在 $z=c$ 附近，$\Psi(z)=(z-c)^{r-\varepsilon}\psi(z)$，$\varepsilon>0$ 可任意小，而 $\psi(z)$ 有界.

证 将 $\Psi(z)$ 改写为

$$\Psi(z)=(z-c)^r\int_{L_0}\varphi(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t+\Psi_0(z), \tag{4.24}$$

其中

$$\Psi_0(z)=\sum_{k=0}^{r-1}C_k^r(z-c)^k\int_{L_0}(t-z)^{r-k}\varphi(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t$$

在 $z=c$ 处是全纯的. 可以直接验证($s<r$)

$$\Psi_0^{(s)}(c)=(-1)^s\int_{L_0}(t-c)^r\varphi(t)\zeta^{(s)}(t-c)\mathrm{d}t. \tag{4.25}$$

这很容易，因为

$$\Psi_0^{(s)}(c)=\sum_{k=0}^{s}C_k^rC_k^sk!\int_{L_0}\left\{\frac{\partial^{s-k}}{\partial z^{s-k}}\left[(t-z)^{r-k}\zeta(t-z)\right]\right\}_{z=c}\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

如果把此式中导数用 Leibnitz 公式展开，并交换求和次序，经化简后就可得出所要结果.

注意(4.24) 右边第一项中的积分在 $z=c$ 处有对数型奇异性，因此这个项在 $z=c$ 处有几乎 r 阶的零点，而当且仅当(4.23) 成立时，$\Psi_0(z)$ 在 $z=c$ 处有 r 阶零点. □

此外，由(4.25) 知，类似地还有

引理4.4.3 函数

$$\Phi(z)=\int_{L_0}(t-c)^r\varphi(t)[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t$$

当且仅当

$$\int_{L_0}(t-c)^r\varphi(t)\zeta^{(s)}(t-c)\mathrm{d}t=(-1)^{s+1}\int_{L_0}(t-c)^r\varphi(t)\mathrm{d}t\cdot\zeta^{(s)}(c),$$
$$s=0,1,\cdots,r-1$$

时，有几乎 r 阶的零点.

注意，如果 $c\in L_0$ 不是端点，则上面二引理中的“几乎”二字均可去掉.

现在我们来讨论(4.18) 的求解问题. 先从齐次问题 $g\equiv0$ 开始：

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\quad t\in L. \tag{4.26}$$

Ⅰ. 设(4.21) 成立，即设 $\mathrm{e}^{\gamma(z)}$ 已是双周期的. 由引理 4.4.1，这时必然

$$G_* \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2\omega_1, 2\omega_2). \tag{4.27}$$

若$\Phi(z)$为(4.26)的解，则$\Phi(z)\mathrm{e}^{-\gamma(z)}$不再以$L$为间断曲线. 注意$\mathrm{e}^{\gamma(z)}$在$z=a$处有不到一阶的奇异性，而在$z=b$处有$(z-b)^{-\alpha_b}$的因子. 下面分几种情况讨论：

1° 设$\kappa=0$. 这时$\Phi(z)\mathrm{e}^{-\gamma(z)}$在$a,b$处都不会有一阶奇异性. 由于不存在非退化的一阶椭圆函数，所以不论在DR_0或DR_1中，(4.26)均有一般解

$$\Phi(z) = C\mathrm{e}^{\gamma(z)}, \tag{4.28}$$

其中C(以及后面带下标的C)为任意常数.

2° 设$\kappa=1$. 对于DR_0，一般解仍为(4.28)；对于DR_1，由于$0<\alpha_b\leqslant 1$，所以$\Phi(z)\mathrm{e}^{-\gamma(z)}$可以在$z=0$与$z=b$处有单极点，因此这时问题(4.26)的一般解为

$$\Phi(z) = \mathrm{e}^{\gamma(z)}[C_0 - C_1\zeta(z) + C_1\zeta(z-b)]. \tag{4.29}$$

3° 设$\kappa\geqslant 2$. 这时$\Phi(z)\mathrm{e}^{-\gamma(z)}$在$z=b$处可以有$\kappa$阶奇异性，所以(4.26)在$\mathrm{DR}_0$中有一般解

$$\Phi(z) = \mathrm{e}^{\gamma(z)}[C_0 + C_1\zeta'(z-b) + \cdots + C_{\kappa-1}\zeta^{(\kappa-1)}(z-b)]; \tag{4.30}$$

而在DR_1中有一般解

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \mathrm{e}^{\gamma(z)}[&C_0 - C_1\zeta(z) + C_1\zeta(z-b)\\ &+ C_2\zeta'(z-b) + \cdots + C_\kappa\zeta^{(\kappa-1)}(z-b)].\end{aligned} \tag{4.31}$$

4° 设$\kappa<0$. 这时$\Phi(z)\mathrm{e}^{-\gamma(z)}$至多只有一个单极点，且以$z=b$为零点，故(4.26)在$\mathrm{DR}_0$或$\mathrm{DR}_1$中都只有零解.

Ⅱ. 设(4.21)不成立. 由引理4.4.1，这时$G_*\neq 0$.

1° 设$\kappa=0$. 又可分两种情况：

(i) 设$G_*\equiv 0$ (mod $2\omega_1, 2\omega_2$；下同). 我们令

$$h_*(z) = \frac{\sigma(z)}{\sigma(z-G_*)}, \quad X_*(z) = h_*(z)\mathrm{e}^{\gamma(z)}, \tag{4.32}$$

后者可起典则函数的作用，只是它在$z=a,b$处都有不到一阶的奇异性. $h_*(z)$是一整函数，不计一个非零常数因子时，

$$h_*(z) = \exp\{2(l_1\eta_1 + l_2\eta_2)z\}, \tag{4.33}$$

其中l_1, l_2由$G_* = 2l_1\omega_1 + 2l_2\omega_2$决定. 因此(4.26)不论在$\mathrm{DR}_0$或$\mathrm{DR}_1$中都有一般解

$$\Phi(z) = Ch_*(z)\mathrm{e}^{\gamma(z)}. \tag{4.34}$$

(ii) 设$G_*\not\equiv 0$. 先考虑DR_1. 这时代替(4.32)要用

$$\tilde{h}_*(z) = \frac{\sigma(z+G_*)}{\sigma(z)}, \quad \widetilde{X}_*(z) = \tilde{h}_*(z)\mathrm{e}^{\gamma(z)}. \tag{4.32'}$$

于是$\Phi(z)/\widetilde{X}_*(z)$就是至多以$z=-G_*$为一阶极点的椭圆函数，故只能是常数. 因此(4.26)在DR_1中有一般解

$$\Phi(z)=Ce^{\gamma(z)}\frac{\sigma(z+G_*)}{\sigma(z)}. \tag{4.35}$$

由于DR_0中的解必在DR_1中，由上式立刻得知，(4.26)在DR_0中只有零解.

2° 设$\kappa\neq 0$. 这时我们应该令

$$h_d(z)=\frac{\sigma(z-d)}{\sigma(z-b)},\quad d=b-\frac{G_*}{\kappa}, \tag{4.36}$$

以保证$X_d(z)=h_d(z)^\kappa e^{\gamma(z)}$能起典则函数的作用.

(ⅰ) 设$d\not\equiv b$即$\frac{G_*}{\kappa}\not\equiv 0$. 又可分几种情况：

1) 设$\kappa=1$. 如果在DR_1中求解，则当$d\not\equiv 0$时，因$\Phi(z)/X_d(z)$在$z=0$与d处都可有一阶极点，因此(4.26)的一般解为

$$\Phi(z)=e^{\gamma(z)}[C_0+C_1\zeta(z)-C_1\zeta(z-d)]\frac{\sigma(z-d)}{\sigma(z-b)}, \tag{4.37}$$

而当$d\equiv 0$时易见一般解为

$$\Phi(z)=e^{\gamma(z)}[C_0+C_1\zeta'(z)]\frac{\sigma(z-d)}{\sigma(z-b)}. \tag{4.37$'$}$$

在DR_0中，不论$d\equiv 0$或否，显然(4.26)有一般解

$$\Phi(z)=Ce^{\gamma(z)}\frac{\sigma(z-d)}{\sigma(z-b)}. \tag{4.38}$$

2) 设$\kappa\geqslant 2$. 易见，(4.26)在DR_1中的一般解当$d\not\equiv 0$时为

$$\begin{aligned}\Phi(z)=e^{\gamma(z)}[C_0-C_1\zeta(z)+C_1\zeta(z-d)+C_2\zeta'(z-d)+\cdots\\+C_\kappa\zeta^{(\kappa-1)}(z-d)]\frac{\sigma^\kappa(z-d)}{\sigma^\kappa(z-b)}.\end{aligned} \tag{4.39}$$

在DR_0中的一般解，不论$d\equiv 0$或否，均为

$$\Phi(z)=e^{\gamma(z)}[C_0+C_1\zeta'(z-d)+\cdots+C_{\kappa-1}\zeta^{(\kappa-1)}(z-d)]\frac{\sigma^\kappa(z-d)}{\sigma^\kappa(z-b)}. \tag{4.40}$$

3) 设$\kappa<0$. 这时(4.26)在DR_0或DR_1中都只有零解.

注意，(4.37),(4.39),(4.40)诸式方括号中的d均可改为它在基本胞腔中的合同点d_0.

(ⅱ) 设$d\equiv b$即$\frac{G_*}{\kappa}\equiv 0$. 这时必然$d\not\equiv a$，且由(4.36)定义的$h_d(z)$又是$z$的指数函数，所以$X_d(z)$在$z=a,b$处的形状同$e^{\gamma(z)}$. 因此(ⅰ)中所述结果现在全都成立，且$d_0=b$.

现可概括如下：

定理4.4.1 齐次问题(4.26)在 DR_0 中当 $\kappa \geqslant 1$ 时有 κ 个(线性无关的)解，当 $\kappa < 0$ 时只有零解，当 $\kappa = 0$ 时如果 $G_* \neq 0$ 只有零解，否则就有一个非零解；在 DR_1 中当 $\kappa \geqslant 0$ 时有 $\kappa + 1$ 个解，当 $\kappa < 0$ 时只有零解.

现在讨论一般非齐次 DR 问题(4.18). 我们只须弄清楚问题的可解条件并求出一个特解即可.

Ⅰ. 设(4.21)满足. 如前所述，$e^{\gamma(z)}$ 已是双周期的.

1° 设 $\kappa = 0$. 这时由于 $g(t)e^{-\gamma^+(t)}$ 在 $t = a, b$ 处有界，所以显然

$$\Psi(z) = \frac{e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int_{L_0} g(t)e^{-\gamma^+(t)}[\zeta(t-z) + \zeta(z)]dt \tag{4.41}$$

是(4.18)在 DR_1 中的一个特解. 如果在 DR_0 中求解，则当且仅当

$$\int_{L_0} g(t)e^{-\gamma^+(t)}dt = 0 \tag{4.42}$$

成立时(4.18)才有解，且其一特解为

$$\Psi(z) = \frac{e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int_{L_0} g(t)e^{-\gamma^+(t)}\zeta(t-z)dt. \tag{4.43}$$

2° 设 $\kappa \geqslant 1$. 这时 $\dfrac{e^{\gamma(z)}}{\sigma^\kappa(z-b)}$ 在 $z = b$ 处有不到一阶的奇异性. 为了构作一个特解，例如，可以考虑以 $t \in L$ 为参数的椭圆函数

$$\frac{\sigma^\kappa(z)\sigma(t-z+\kappa b)}{\sigma(t-z)\sigma^\kappa(z-b)} \cdot \frac{\sigma^\kappa(t-b)}{\sigma^\kappa(t)\sigma(\kappa b)}$$

(不失一般性，我们已假定 $\kappa b \neq 0$，否则可将坐标原点作适当平移)，它在 $z = t$ 处留数为 1，故仍保有 Cauchy 核的性质. 可以直接验证：

$$\Psi(z) = \frac{\sigma^\kappa(z)e^{\gamma(z)}}{\sigma(\kappa b)\sigma^\kappa(z-b)} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{\sigma^\kappa(t-b)}{\sigma^\kappa(t)e^{\gamma^+(t)}} \frac{\sigma(t-z+\kappa b)}{\sigma(t-z)} g(t)dt \tag{4.44}$$

就是问题(4.18)在 DR_0 或 DR_1 中的一个特解.

3° 设 $\kappa < 0$. 由于 $\alpha_b \leqslant \kappa$，在 DR_1 中，$\Phi(z)e^{-\gamma(z)}$ 至多只在 $z = 0$ 处有一阶极点，故若(4.18)有解，则必定唯一，且只能是(4.41)之形. 为了它在 $z = b$ 处有不到一阶奇异性，就应要求(4.41)中的积分在 $z = b$ 处至少有几乎 $-\kappa$ 阶零点. 但因 $e^{-\gamma^+(t)}$ 在 $t = b$ 处已知有 $-\kappa$ 阶零点，故由引理4.4.3，须且只须

$$\int_{L_0} g(t)e^{-\gamma^+(t)}\zeta^{(s)}(t-b)dt = (-1)^{s+1}\int_{L_0} g(t)e^{-\gamma^+(t)}dt \cdot \zeta^{(s)}(b),$$
$$s = 0, 1, \cdots, -\kappa - 1. \tag{4.45}$$

此即(4.18) 在 DR_1 中的可解条件，当它满足时，有唯一解(4.41).

如果在 DR_0 中求解，则可解条件就是(4.42) 以及

$$\int_{L_0} g(t)e^{-\gamma^+(t)}\zeta^{(s)}(t-b)dt = 0, \quad s = 0,1,\cdots,-\kappa-1. \qquad (4.45)'$$

当它们满足时，(4.18) 有唯一解(4.43).

Ⅱ. 设(4.21) 不满足. 记住这时 $G_* \neq 0$.

1° 设 $\kappa = 0$.

(ⅰ) 设 $G_* \equiv 0$. 这时(4.18) 在 DR_1 中有特解

$$\Psi(z) = \frac{h_*(z)e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{h_*(t)e^{\gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt, \qquad (4.46)$$

这里 $h_*(z)$ 由(4.33) 给出. 如果在 DR_0 中求解，则

$$\int_{L_0}\frac{g(t)}{h_*(t)e^{\gamma^+(t)}}dt = 0 \qquad (4.47)$$

为可解条件，当它满足时，(4.18) 有唯一解

$$\Phi(z) = \frac{h_*(z)e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{h_*(t)e^{\gamma^+(t)}}\zeta(t-z)dt. \qquad (4.48)$$

(ⅱ) 设 $G_* \not\equiv 0$. 这时(4.18) 在 DR_0 中无条件可解，且显然有唯一解

$$\Phi(z) = \frac{h_*(z)e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{h_*(t)e^{\gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)+\zeta(z)-\zeta(t-G_*)-\zeta(G_*)]dt, \qquad (4.49)$$

其中 $h_*(z)$ 由(4.32) 给出. 也可把它改写为(当 $G_* \in L$ 时较为方便)

$$\Phi(z) = \frac{e^{\gamma(z)}}{\sigma(G_*)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{e^{\gamma^+(t)}}\frac{\sigma(z-t+G_*)}{\sigma(t-z)}dt. \qquad (4.49)'$$

(4.49) 或(4.49)′ 也是(4.18) 在 DR_1 中的一个特解.

2° 设 $\kappa \geqslant 1$. 由于这时

$$e^{\gamma(z)}\frac{\sigma^\kappa(z-d)}{\sigma^\kappa(z-b)}$$

已是双周期的，故有：

(ⅰ) 若 $d \overline{\in} L$，则显然

$$\Psi(z) = \frac{\sigma^\kappa(z-d)e^{\gamma(z)}}{\sigma^\kappa(z-b)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\sigma^\kappa(t-b)g(t)}{\sigma^\kappa(t-d)e^{\gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)+\zeta(z-d)]dt \qquad (4.50)$$

已是(4.18) 在 DR_0 或 DR_1 中的特解.

(ⅱ) 若 $d \in L$，则(4.50) 中的积分当 $\kappa = 1$ (且 $d \not\equiv a$) 时，在主值意义下仍可用；但当 $\kappa \geqslant 2$ 时它已发散.

为了避免这一困难，可改用下列做法. 引进一个在 $z=t$ 处留数为 -1 的 $\kappa+1$ 阶椭圆函数. 例如，当 $\kappa d\neq 0$ 时，可用

$$\frac{\sigma^{\kappa}(z)\sigma(z-t-\kappa d)}{\sigma(t-z)\sigma^{\kappa}(z-d)}\,\frac{\sigma^{\kappa}(t-d)}{\sigma^{\kappa}(t)\sigma(-\kappa d)}. \tag{4.51}$$

立刻可知，(4.18) 在 DR_0 或 DR_1 中有一特解

$$\Psi(z)=\frac{\sigma^{\kappa}(z)e^{\gamma(z)}}{\sigma(\kappa d)\sigma^{\kappa}(z-d)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\sigma^{\kappa}(t-d)\sigma(t)}{\sigma^{\kappa}(t)e^{\gamma^+(t)}}\,\frac{\sigma(t-z+\kappa d)}{\sigma(t-z)}dt. \tag{4.52}$$

而若 $\kappa d\equiv 0$，则不用(4.51) 而任取一点 $c\in L$，且 $\kappa(c-d)\neq 0$，并改用

$$\frac{\sigma^{\kappa}(z-c)\sigma(z-t+\kappa(c-d))}{\sigma(t-z)\sigma^{\kappa}(z-d)}\,\frac{\sigma^{\kappa}(t-d)}{\sigma^{\kappa}(t-c)\sigma(\kappa(c-d))}$$

代替(4.52)，则有特解

$$\Psi(z)=\frac{\sigma^{\kappa}(z-c)e^{\gamma(z)}}{\sigma(\kappa(c-d))\sigma^{\kappa}(z-d)}\,\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{L_0}\frac{\sigma^{\kappa}(t-d)g(t)}{\sigma^{\kappa}(t-c)e^{\gamma^+(t)}}\,\frac{\sigma(z-t+\kappa(c-d))}{\sigma(t-z)}dt. \tag{4.53}$$

此外，我们注意，如果 $g(t)$ 有属于 H 的 $\kappa-1$ 阶导数，则采用 1.7 节中关于奇异积分的推广，(4.50) 仍可作为(4.18) 在 DR_0 或 DR_1 中的特解.

3° 设 $\kappa<0$. 先假定 $d\neq b$，即 $\frac{G_*}{\kappa}\neq 0$. 这时显然，如果在 DR_1 中(4.18) 有解，则必唯一，且必有下形：

$$\Phi(z)=\frac{\sigma^{-\kappa}(z-b)e^{\gamma(z)}}{\sigma^{-\kappa}(z-d)}\,\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{L_0}\frac{\sigma^{-\kappa}(t-d)g(t)}{\sigma^{-\kappa}(t-b)e^{\gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt. \tag{4.54}$$

但它一般并不在 DR_1 中，因为它可能在 $z=d$ 处有 $-\kappa$ 阶奇异性(当 $d\neq a$ 时) 或者有不到 $-\kappa+1$ 阶的奇异性(当 $d\equiv a$ 时). 为了使它在 $z=d$ 处有界(当 $d\neq a$ 时) 或者有不到一阶的奇异性(当 $d\equiv a$ 时)，须且必须(4.54) 右边的积分在 $z=d$ 处直到 $-\kappa-1$ 阶的导数为零. 由引理 4.4.3，这就要求

$$\int_{L_0}\frac{\sigma^{-\kappa}(t-d)g(t)}{\sigma^{-\kappa}(t-b)e^{\gamma^+(t)}}\zeta^{(s)}(t-d)dt=(-1)^{s+1}\int_{L_0}\frac{\sigma^{-\kappa}(t-d)g(t)}{\sigma^{-\kappa}(t-b)e^{\gamma^+(t)}}dt\cdot\zeta^{(s)}(d),$$

$$s=0,1,\cdots,-\kappa-1. \tag{4.55}$$

当它们满足时，(4.54) 就是(4.18) 在 DR_1 中的唯一解. 如果在 DR_0 中求解，则可解条件应是

$$\int_{L_0} \frac{\sigma^{-\kappa}(t-d)g(t)}{\sigma^{-\kappa}(t-b)e^{\gamma^+(t)}} dt = 0, \tag{4.56}$$

$$\int_{L_0} \frac{\sigma^{-\kappa}(t-d)g(t)}{\sigma^{-\kappa}(t-b)e^{\gamma^+(t)}} \zeta^{(s)}(t-d)dt = 0, \quad s = 0,1,\cdots,-\kappa-1. \tag{4.57}$$

当它们满足时，(4.18) 在 DR_0 中有唯一解

$$\Phi(z) = \frac{\sigma^{-\kappa}(z-b)e^{\gamma(z)}}{\sigma^{-\kappa}(z-d)} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{\sigma^{-\kappa}(t-d)g(t)}{\sigma^{-\kappa}(t-b)e^{\gamma^+(t)}} \zeta(t-z)dt. \tag{4.58}$$

再设 $d \equiv b$ 即 $\frac{G_*}{\kappa} \equiv 0$. 这时 $\sigma^{-\kappa}(z-b)/\sigma^{-\kappa}(z-d)$ 是 z 的指数函数，以上的论述和结果仍成立.

综合以上结果，我们得到

定理4.4.2 对于非齐次DR问题(4.18)，如果在 DR_0 中求解，则当 $\kappa \geqslant 1$ 时无条件可解；当 $\kappa < 0$ 时有 $-\kappa+1$ 个可解条件；当 $\kappa = 0$ 时，若 $G_* \not\equiv 0$ 则无条件可解，若 $G_* \equiv 0$ 则有一个可解条件. 如果在 DR_1 中求解，则当 $\kappa \geqslant 0$ 时无条件可解，当 $\kappa < 0$ 时有 $-\kappa$ 个可解条件.

前面设 L_0 全部在基本胞腔内，今讨论 L_0 的两端在基本胞腔边界上的两合同点处而其余部分则全在其内①. 不失一般性，可以认为 $b = a + 2\omega_1$. 为简单起见，设 L_0 在 a,b 处有平行的切线. 因此，当 L_0 以 $2\omega_1$ 作周期延拓时，就成为一无限延伸的光滑曲线 L_0^*，所以 L 现在是由无限条互相平行的曲线 L_n^* $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 构成的，这里 L_n^* 是 L_0^* 经平移 $2n\omega_2$ 后形成的. 求解 (4.18) 时，由于 a 点在 L_0^* 上与别的点处于同等地位，我们自然要求 $\Phi(z)$ 在 $z = a$ 处也有界. 在 L_0 上任取 $\log G(t)$ 的一连续支(例如不妨认为下式中 $0 \leqslant \alpha < 1$)，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\log G(a) = \alpha + i\beta,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\log G(a + 2\omega_1) = \kappa + \alpha + i\beta,$$

其中 κ 为一整数，是问题的指标. 仍定义 G_*，$\gamma(z)$ 如(4.19)，(4.20).

于是以上所讨论的所有方法与结果也都成立. 还可注意，现在

$$d = a - \frac{G_*}{\kappa} + 2\omega_1,$$

---

① 如果 L_0 仅有一端点在基本胞腔边界上，则可作一平移使变成前面已讨论的情形. 若 L_0 两端都在边界上但不是周期合同点，则以上方法仍有效.

而且所有结果中的 b 与 d 一律可改为 a 与 $a-\frac{G_*}{\kappa}$.

习　题

1. 试讨论 DR 问题(4.18) 在 DR_0 或 DR_1 中求解时的广义自由度.
2. 试对 DR 问题(4.18) 在 DR_{-1} 中(即要求 $\Phi(0)=0$) 求解.

4.4.4　开口弧段的 QR 问题

本段中将把 2.10 节中讨论的双准周期 Riemann 边值问题即 **QR** 问题推广到开口弧段的情况. $L_0=\widehat{ab}$ 等记号同上段，且我们限定在 QR_0 中求解.

Ⅰ. **AQR_0 问题**　设要求解

$$\Phi^+(t)=G\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L,\tag{4.59}$$

其中 $G\neq 0$ 为一常数，$g(t)\in H$ 为双准周期的，并以 g_1,g_2 为加数，要求 $\Phi(z)$ 分区全纯，也是双准周期的；为确定起见，并设在 h_0 类中求解.

设 $\Phi(z)$ 的加数为 Φ_1,Φ_2，则

$$\Phi_j=G\Phi_j+g_j,\quad j=1,2.\tag{4.60}$$

如果 $G=1$，则必 $g_j=0$，即 $g(t)$ 是双周期的，于是立即可知

$$\Phi(z)=C_0+C_1z+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}g(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t.\tag{4.61}$$

现设 $G\neq 1$. 这时，由(4.60) 知，Φ_j 已一意确定：

$$\Phi_j=\frac{g_j}{1-G},\quad j=1,2.\tag{4.62}$$

令

$$\Psi(z)=\lambda z+\mu\zeta(z),$$

其中

$$\lambda=\frac{1}{\pi i}(\eta_1\Phi_2-\eta_2\Phi_1),\quad \mu=\frac{1}{\pi i}(\omega_2\Phi_1-\omega_1\Phi_2),\tag{4.63}$$

则 $\Psi(z)$ 也以 Φ_1,Φ_2 为加数，从而 $\Phi_0(z)=\Phi(z)-\Psi(z)$ 已是双周期的；又令

$$g_0(t)=g(t)-(1-G)\Psi(t),\tag{4.64}$$

则 $g_0(t)$ 也是双周期的. 于是(4.59) 化为了 DR 问题:

$$\Phi_0^+(t)=G\Phi_0^-(t)+g_0(t),\quad t\in L;\tag{4.65}$$

但要注意，$\Phi_0(z)$ 一般在 $z=0$ 处有一阶极点，故应在 DR_1 中求解. 如果取定

$$\log G=\ln|G|+i\theta,\quad 0\leqslant\theta<2\pi,$$

并记 $G_0=\frac{1}{2\pi i}\log G$，则

$$\alpha_a + \mathrm{i}\beta_a = -G_0 = -\frac{\theta}{2\pi} - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\ln|G|, \quad -1 < \alpha_a \leqslant 0,$$

$$\alpha_b + \mathrm{i}\beta_b = G_0 = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\ln|G|, \quad 0 \leqslant \alpha_b = -\alpha_a < 1,$$

$$G_* = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0} \log G\,\mathrm{d}t = G_0(b-a), \tag{4.66}$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0} \log G \cdot \zeta(t-z)\mathrm{d}t = G_0 \log\frac{\sigma(z-b)}{\sigma(z-a)},$$

因此，

$$\mathrm{e}^{\gamma(z)} = \left[\frac{\sigma(z-b)}{\sigma(z-a)}\right]^{G_0}, \tag{4.67}$$

这里右端的函数应理解为：以 L 为剖线割开平面后任意取定一支（取不同支只会差一个非零常数因子）. 以下就可根据上段结果进行讨论.

1° 如果(4.21) 成立，则：

(a) 若 $G\ (\neq 1)$ 是正实数，则(4.65) 的指标 $\kappa = 0$，从而在 DR_1 中无条件可解，且一般解为

$$\Phi_0(z) = \mathrm{e}^{\gamma(z)}\left\{C + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g_0(t)}{\mathrm{e}^{\gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t\right\},$$

其中 C 为任意常数. 回到 $\Phi(z)$，则有

$$\Phi(z) = \mathrm{e}^{\gamma(z)}\left\{C + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g_0(t)}{\mathrm{e}^{\gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}t\right\} + \lambda z + \mu\zeta(z). \tag{4.68}$$

但实际上 $\Phi(z)$ 不能在 $z=0$ 处有极点，故须

$$\mu = -\frac{\mathrm{e}^{\gamma(0)}}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g_0(t)}{\mathrm{e}^{\gamma^+(t)}}\mathrm{d}t, \tag{4.69}$$

或即

$$\frac{1-G}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}[\lambda t + \mu\zeta(t)]\mathrm{e}^{-\gamma^+(t)}\mathrm{d}t - \mathrm{e}^{-\gamma(0)}\mu = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{g(t)}{\mathrm{e}^{\gamma^+(t)}}\mathrm{d}t. \tag{4.69$'$}$$

这是 λ,μ 的从而也是 g_1, g_2 的线性方程，亦即，$g(t)$ 的加数要受一线性约束（当 g_1, g_2 的系数不同时为 0 时），或者 $g(t)$ 在 L_0 上的值要受一积分限制（当(4.69)$'$ 左边恒为零时），这时一般解为(4.68).

(b) 如果 G 不是正实数，则(4.65) 的指标 $\kappa = 1$. 这时它在 DR_1 中的一般解为

$$\Phi_0(z) = \mathrm{e}^{\gamma(z)}[C_0 + C_1\zeta(z) - C_1\zeta(z-b)]$$
$$+ \frac{\sigma(z)\mathrm{e}^{\gamma(z)}}{\sigma(b)\sigma(z-b)}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{\sigma(t-b)g_0(t)}{\sigma(t)\mathrm{e}^{\gamma^+(t)}}\frac{\sigma(t-z+b)}{\sigma(t-z)}\mathrm{d}t,$$

而

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\lambda z+\mu\zeta(z).$$

为要它在 $z=0$ 处无极点，应取 $C_1=-\mu e^{\gamma(0)}$. 所以这时(4.59)无条件可解，且其一般解为

$$\Phi(z)=\lambda z+\mu\zeta(z)+e^{\gamma(z)}\Big\{C_0-\mu e^{-\gamma(0)}[\zeta(z)-\zeta(z-b)]$$

$$+\frac{\sigma(z)}{\sigma(b)\sigma(z-b)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\sigma(t-b)g_0(t)}{\sigma(t)e^{\gamma^+(t)}}\frac{\sigma(t-z+b)}{\sigma(t-z)}dt\Big\}. \quad (4.70)$$

2° 如果(4.21)不成立，又可分两种情况讨论：

(a) 如果 G 是正实数，则(4.65)的 $\kappa=0$.

(ⅰ) 如果 $G_*\equiv0$，则在 DR_1 中可求出 $\Phi_0(z)$，从而求出

$$\Phi(z)=\lambda z+\mu\zeta(z)+h_*(z)e^{\gamma(z)}$$

$$\cdot\Big\{C+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_0(t)}{h_*(t)e^{\gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt\Big\}, \quad (4.71)$$

其中 $h_*(z)$ 由(4.33)给出. 为了它在 $z=0$ 处无极点，应要求

$$\mu=-\frac{e^{\gamma(0)}}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_0(t)}{h_*(t)e^{\gamma^+(t)}}dt. \quad (4.72)$$

这又是 g_1,g_2 应满足的线性关系或 $g_0(t)$ 应满足的积分条件. 当它满足时，(4.59)的一般解为(4.71).

(ⅱ) 如果 $G_*\not\equiv0$，则可得

$$\Phi(z)=\lambda z+\mu\zeta(z)+C\frac{\sigma(z+G_*)}{\sigma(z)}e^{\gamma(z)}$$

$$+\frac{e^{\gamma(z)}}{\sigma(G_*)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{e^{\gamma^+(t)}}\frac{\sigma(z-t+G_*)}{\sigma(t-z)}dt. \quad (4.73)$$

为要使它在 $z=0$ 处无极点，必须取

$$C=-\frac{\mu}{\sigma(G_*)e^{\gamma(0)}}.$$

以此代入(4.73)，便得(4.59)的唯一解.

(b) 如果 G 不是正实数，则 $\kappa=1$.

(ⅰ) 如果 $G_*\equiv0$，则上段中的 $d_0=b$，故

$$\Phi(z)=\lambda z+\mu\zeta(z)+e^{\gamma(z)}[C_0+C_1\zeta(z)-C_1\zeta(z-b)]$$

$$+\frac{h_*(z)e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g_0(t)}{h_*(t)e^{\gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)+\zeta(z-b+G_*)]dt, \quad (4.74)$$

其中 $h_*(z)$ 同前. 为使它在 $z=0$ 处正则，应取

$$C_1=-\frac{\mu}{e^{\gamma(0)}}.$$

故问题(4.59)恒可解，且一般解中含有一个任意常数.

(ⅱ) 如果 $G_*\not\equiv 0$，令 $d=b-G_*$，由上段结果，则:

1) 若 $b\not\equiv G_*$，则

$$\Phi(z)=\lambda z+\mu\zeta(z)+\frac{\sigma(z-b+G_*)e^{\gamma(z)}}{\sigma(z-b)}\left\{C_0+C_1\zeta(z)-C_1\zeta(z-b+G_*)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\sigma(t-b)g_0(t)}{\sigma(t-b+G_*)e^{\gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)+\zeta(z-b+G_*)]dt\right\}, \tag{4.75}$$

这里应取 $C_1=-\dfrac{\mu\sigma(b)}{\sigma(b-G_*)e^{\gamma(0)}}$.

2) 若 $b\equiv G_*$，则

$$\Phi(z)=\lambda z+\mu\zeta(z)+\frac{\sigma(z)e^{\gamma(z)}}{\sigma(z-b)}[C_0+C_1\zeta'(z)]+\frac{\sigma(z-b+G_*)e^{\gamma(z)}}{\sigma(z-b)}\frac{1}{2\pi i}$$
$$\cdot\int_{L_0}\frac{\sigma(t-b)g_0(t)}{\sigma(t-b+G_*)e^{\gamma^+(t)}}[\zeta(t-z)+\zeta(z-b+G_*)]dt, \tag{4.76}$$

这里应取 $C_1=-\dfrac{\mu\sigma(b)}{e^{\gamma(0)}}$.

综合以上结果，我们得到

定理 4.4.3 对 AQR_0 问题(4.59)，当 $G=1$ 时无条件可解，且一般解中含有两个任意常数. 当 $G\neq 1$ 时，如果它是正实数，除例外情况 $G_*\equiv 0$ 外，有唯一解；否则，$g(t)$ 的加数 g_1，g_2 要受一线性约束或者 $g(t)$ 在 L_0 上要受一积分约束才可解，且解中含一个任意常数. 如果 G 不是正实数，则问题恒可解，且解中含一个任意常数.

如果 L_0 的端点 $b=a+2\omega_1$，如上段末，记 L_0^* 等如前. 又记 L_k^* 与 L_{k+1}^* 之间的带形域为 S_k^* $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，并设 $O\in S_0^*$. 求解(4.59)时要求 $\Phi(a)$ 有界. 仍设 $g(t)\in H$ 于 L 上.

如果 $G=1$，则仍有 $g_j=0$，因此一般解仍由(4.61)给出，且容易验证 $\Phi(a)$ 确实有界.

如果 $G\neq 1$，则问题化为 DR 问题(4.65). 现在 $G_*=2\omega_1G_0$. 在(4.67)中若限定 $z\in S_0^*$，并取定一支，不计常数因子，则有

$$e^{\gamma(z)}=e^{-2G_0\eta_1 z},\quad z\in S_0^*,$$

从而一般应有

$$e^{\gamma(z)} = G^n e^{-2G_0\eta_1 z}, \quad z \in S_n^*, \tag{4.77}$$

由此易见

$$e^{\gamma(z+2\omega_j)} = e^{-2\eta_j G_*} e^{\gamma(z)}, \quad z \overline{\in} L. \tag{4.78}$$

1° 如果(4.21)成立，则 $e^{\gamma(z)}$ 已是双周期的，由此易得(4.68). 可解条件为(4.69)或(4.69)′，不过现在 $e^{\gamma(0)}=1$；此外，易见 $\Phi(t)$ 在 L_0 上 $t=a$ 处确实有界.

2° 如果(4.21)不成立，则又可分成两种情况：

（ⅰ）设 $G_* \equiv 0$. 这时仍可得 $\Phi(z)$ 以(4.71)给出，可解条件仍为(4.72)，但这时可求出

$$h_*(z)e^{\gamma(z)} = \exp\left\{-\frac{l_2\pi i}{\omega_1}z\right\}, \quad z \in S_0^*,$$

从而

$$h_*(z)e^{\gamma(z)} = G^n\exp\left\{-\frac{l_2\pi i}{\omega_1}z\right\}, \quad z \in S_n^*.$$

因此所求的一般解为

$$\Phi(z) = \lambda z + \mu\zeta(z) + G^n\exp\left\{-\frac{l_2\pi i}{\omega_1}z\right\} \cdot \left\{C + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g_0(t)\exp\left\{\frac{l_2\pi i}{\omega_1}t\right\}[\zeta(t-z)+\zeta(z)]dt\right\}, \quad z \in S_n^*, \tag{4.71$'$}$$

而可解条件则为

$$\mu = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g_0(t)\exp\left\{\frac{l_2\pi i}{\omega_1}t\right\}dt. \tag{4.72$'$}$$

（ⅱ）设 $G_* \neq 0$，这时问题有唯一解(4.73)，其中

$$C = -\frac{\mu}{\sigma(G_*)}.$$

所以我们有

定理 4.4.4 对于 $L_0 = \widehat{ab}$，$b = a + 2\omega_1$ 的情况，当 $G=1$ 时，AQR_0 问题(4.59)无条件可解，一般解中含有两个任意常数. 当 $G \neq 1$ 时，如果 $G_* \neq 0$，则问题有唯一解；如果 $G_* \equiv 0$，则或者 $g(t)$ 的加数要受一线性约束，或者 $g(t)$ 在 L_0 上要受一积分约束，且这时一般解中含有一个任意常数.

以上讨论的方法完全适用于 L 具有节点的更一般情况，也可讨论在
解类中求解的问题，原则上不会有困难.

Ⅱ. **MQR$_0$ 问题** 仍先设 $L_0=\widehat{ab}$ 在 S_0 内，$O\in L_0$. 先考虑齐次
(4.26)，其中 $G(t)\neq 0$ 为双周期的，$\in H$，而 $\Phi(z)$ 为乘法双准周期的，
为 Φ_1,Φ_2 ($\neq 0$).

仍沿用(4.19)，(4.20) 等式中的记号，设指标为 κ.

如果 $\kappa>0$，由 2.10.1 段中性质 1) 知，

$$\Phi(z)=e^{\lambda z+\gamma(z)}\frac{\sigma^{\kappa}(z-z_0)}{\sigma^{\kappa}(z-b)}\left[C_0+\sum_{k=1}^{\kappa-1}C_k\zeta^{(k)}(z-z_0)\right],\qquad(4.79)$$

其中 λ,z_0 和 $C_0,C_1,\cdots,C_{\kappa-1}$ 一样，都是任意常数.

如果 $\kappa=0$，则由 2.10.1 段中性质 2) 知，

$$\Phi(z)=Ce^{\lambda z+\gamma(z)},\qquad(4.80)$$

这里 λ 和 C 都是任意常数.

如果 $\kappa<0$，则由 2.10.1 段中性质 3) 知，必有 $\Phi(z)=0$.

因此我们有

定理4.4.5 开口光滑弧段的 MQR$_0$ 问题(4.26)，当 $\kappa\geqslant 0$ 时一般解中含有 $\kappa+2$ 个任意常数，当 $\kappa<0$ 时只有零解.

现在考虑非齐次 MQR$_0$ 问题(4.18)，其中 $G(t),g(t),\Phi(z)$ 都是乘法双准周期的，$\in H$，且 $G(t)\neq 0$，乘数分别为 G_j,g_j,Φ_j ($j=1,2$). 由于

$$\Phi_j\Phi^+(t)=\Phi_jG_jG(t)\Phi^-(t)+g_jg(t),\quad j=1,2,\qquad(4.81)$$

故矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \Phi_1 & \Phi_1G_1 & g_1\\ \Phi_2 & \Phi_2G_2 & g_2\end{pmatrix}$$

为降秩的. 其秩为 2 的情况可不考虑，因为易见这是一种平凡情况. 因此设此矩阵的秩为1. 这时 $G(t)$ 为双周期的，且 $\Phi(z)$ 与 $g(t)$ 有相同的乘数 g_j. 这时(4.18) 可化为

$$\frac{\Phi^+(t)}{e^{\gamma^+(t)}}=\frac{\Phi^-(t)}{e^{\gamma^-(t)}}+\frac{g(t)}{e^{\gamma^+(t)}},\qquad(4.82)$$

其中 $\Phi(z)/e^{\gamma(z)}$ 是乘法双准周期的，且与 $g(t)/e^{\gamma^+(t)}$ 有相同的乘数 $g_je^{2\eta_jG_*}$. 以第二章(10.22)′式定义 α,β，且取 $\beta\in S_0$.

1° 设 $\kappa=0$. 分两种情况:

(a) $G_*\neq\beta$. 定义

$$\chi(z)=\frac{e^{az}}{\sigma(\beta-G_*)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{e^{at+\gamma^+(t)}}\frac{\sigma(t-z+\beta-G_*)}{\sigma(t-z)}dt,$$

则 $\Omega(z)=\frac{\Phi(z)}{e^{\gamma(z)}}-\chi(z)$ 已无跳跃于 L 上，除在 a,b 处有不到一阶奇异性外，别无其他非周期合同的奇点，且以 $g_j e^{2\eta_j G_*}$ 为乘数，故必 $\Omega(z)=Ce^{\lambda z}$；和前面同样的理由，由于 $G_*\not\equiv\beta$，必定 $C=0$. 因此问题(4.18)有唯一解

$$\Phi(z)=\frac{e^{az+\gamma(z)}}{\sigma(\beta-G_*)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{e^{at+\gamma^+(t)}}\frac{\sigma(t-z+\beta-G_*)}{\sigma(t-z)}dt. \tag{4.83}$$

(b) $G_*\equiv\beta$. 可选取 $\log g_j$ 使 $G_*=\beta$. 因此

$$2a\omega_j=\log g_j+2\eta_j G_*,\quad j=1,2.$$

于是 e^{az} 也以 $g_j e^{2\eta_j G_*}$ 为乘数，且在 a,b（以及周期合同点）处有不到一阶的奇异性，因此 $\Psi(z)=\frac{\Phi(z)}{e^{az+\gamma(z)}}$ 就是双周期的. 这时问题已化为DR的，可按上段方法讨论，从略.

2° 设 $\kappa>0$. 引进

$$\Psi_0(z)=\frac{\sigma^\kappa(z-b)}{\sigma^\kappa(z)}\frac{\Phi(z)}{e^{\gamma(z)}},\quad g_0(t)=\frac{\sigma^\kappa(t-b)}{\sigma^\kappa(t)}\frac{g(t)}{e^{\gamma^+(t)}}.$$

在 $z=b$ 处，$\Psi_0(z)$ 的阶数在 -1 与 $+1$ 之间，而 $g_0(b)$ 是有限的，它们的乘数都是 $g_j e^{2\eta_j(G_*-\kappa b)}$. 这时问题(4.18)化为

$$\Psi_0^+(t)=\Psi_0^-(t)+g(t). \tag{4.84}$$

(a) 设 $G_*\not\equiv\beta+\kappa b$. 令

$$\chi_0(z)=\frac{e^{az}}{\sigma(\beta+\kappa b-G_*)}\frac{1}{2\pi i}$$

$$\cdot\int_{L_0}\frac{\sigma^\kappa(t-b)g(t)}{\sigma^\kappa(t)e^{at+\gamma^+(t)}}\frac{\sigma(t-z+\beta+\kappa b-G_*)}{\sigma(t-z)}dt,$$

则它除在 a,b（及周期合同点）处可能有对数型奇异性外，处处有界(事实上，在 $z=b$ 处有界). 所以 $\Omega_0(z)=\Psi_0(z)-\chi_0(z)$ 在 L 上无跳跃，乘数同前，在 a,b 等处至多有不到一阶的奇异性，从而实际上无奇异性，在 $z=0$ 处有 κ 阶极点. 故由上述性质 1)，

$$\Omega_0(z)=e^{\lambda z}\frac{\sigma^\kappa(z-z_0)}{\sigma^\kappa(z)}\left[C_0+\sum_{k=1}^{\kappa-1}C_k\zeta^{(k)}(z-z_0)\right],$$

但它的乘数取对数后 $2\omega_j\lambda-2\eta_j\kappa z_0$ 应该和 $\log g_j+2\eta_j(G_*-\kappa b)$ 相差 $2\pi i$ 的整数倍，故不妨取

$$\lambda=a,\quad z_0=b+\frac{\beta-G_*}{\kappa}.$$

因此(4.18)的一般解为

$$\Phi(z)=\mathrm{e}^{\alpha z+\gamma(z)}\left\{\left[C_0+\sum_{k=1}^{\kappa-1}C_k\zeta^{(k)}(z-z_0)\right]\frac{\sigma^\kappa(z-z_0)}{\sigma^\kappa(z-b)}\right.$$

$$+\frac{\sigma^\kappa(z)}{\sigma(\beta+\kappa b-G_*)\sigma^\kappa(z-b)}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}$$

$$\left.\cdot\int_{L_0}\frac{\sigma^\kappa(t-b)g(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t+\gamma^+(t)}\sigma^\kappa(t)}\frac{\sigma(t-z+\beta+\kappa b-G_*)}{\sigma(t-z)}\mathrm{d}t\right\}. \quad (4.85)$$

(b) 设 $G_*\equiv\beta+\kappa b$. 这时可选定 $\log g_j$ 使

$$\alpha=\frac{\log g_j+2\eta_j(G_*-\kappa b)}{2\omega_j},\quad j=1,2, \quad (4.86)$$

从而 $\mathrm{e}^{\alpha z}$ 以 $g_j\mathrm{e}^{2\eta_j(G_*-\kappa b)}$ 为乘数. 因此在(4.84)中遍乘 $\mathrm{e}^{-\alpha z}$ 后又化为双周期问题，且指标 κ 不变. 再就可按上段方法分析，从略.

3° 设 $\kappa<0$. 也分两种情况：

(a) $G_*\not\equiv\beta+\kappa b$. 令 $\Psi_0(z),g_0(t),\chi_0(z),\Omega_0(z)$ 仍同前，则 $\Psi_0(z)$ 在 $z=0$ 处有 $-\kappa$ 阶零点，而 $\chi_0(z)$ 有界，因此 $\Omega_0(z)$ 也有界，故必 $\Omega_0(z)=C\mathrm{e}^{\lambda z}$. 若 $C\neq0$，则其乘数也应是 $g_j\mathrm{e}^{2\eta_j(G_*-\kappa b)}$，这就是说可取定 $\log g_j$ 使 λ 等于(4.86)中的 α. 但这只有 $\beta+\kappa b-G_*\equiv0$ 才可以，而这已排除在外. 故 $C=0$. 所以，如果(4.84)有解，则必 $\Psi_0(z)=\chi_0(z)$，但因 $\Psi_0(z)$ 以 $z=0$ 为 $-\kappa$ 阶零点，故还必须

$$\int_{L_0}\frac{\sigma^\kappa(t-b)g(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t+\gamma^+(t)}\sigma^\kappa(t)}\left[\frac{\partial^s}{\partial z^s}\frac{\sigma(t-z+\beta+\kappa b-G_*)}{\sigma(t-z)}\right]_{z=0}\mathrm{d}t=0,$$

$$s=0,1,\cdots,-\kappa-1. \quad (4.87)$$

当这些条件满足时，问题(4.18)有唯一解

$$\Phi(z)=\frac{\mathrm{e}^{\alpha z+\gamma(z)}\sigma^\kappa(z)}{\sigma(\beta+\kappa b-G_*)\sigma^\kappa(z-b)}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}$$

$$\cdot\int_{L_0}\frac{\sigma^\kappa(t-b)g(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t+\gamma^+(t)}\sigma^\kappa(t)}\frac{\sigma(t-z+\beta+\kappa b-G_*)}{\sigma(t-z)}\mathrm{d}t. \quad (4.88)$$

(b) $G_*\equiv\beta+\kappa b$. 如前，又可化为 DR 问题进行讨论.

于是我们有

定理 4.4.6 对于开口光滑弧段的 MQR_0 问题(4.18)，设其指标为 κ. 如果 $G_*\equiv\beta+\kappa b$，则可化为 $\Phi(z)/\mathrm{e}^{\alpha z+\gamma(z)}$ 的 DR 问题；否则，当 $\kappa\geqslant0$ 时问题无条件可解，且一般解中含有 κ 个任意常数，当 $\kappa<0$ 时要满足 $-\kappa$ 个可解条件时才有唯一解.

最后对 $b=a+2\omega_1$ 的情况略作说明. 这时除平凡情况外，$\Phi^{\pm}(z)$ 的乘数必相同，$G(t)$ 是双周期的. 现在设

$$\frac{\log G(a)}{2\pi\mathrm{i}}=A+\mathrm{i}B,$$

$$\frac{\log G(a+2\omega_1)}{2\pi\mathrm{i}}=\kappa+A+\mathrm{i}B,\quad 0\leqslant A<1,$$

而 G_*，$\gamma(z)$ 仍如(4.19)，(4.20)，在 $z=a$ 处 $\mathrm{e}^{\gamma(z)}$ 仍有 $(z-a)^{\kappa}$ 的因子.

对于齐次问题($g=0$)，本段 Ⅱ 开始所论包括定理 4.4.5 完全成立，且(4.79) 中的 $\sigma^{\kappa}(z-b)$ 可改为 $\sigma^{\kappa}(z-a)$.

对于非齐次问题，仍可化为(4.82)，α,β 仍定义如前. 以下讨论均类似，且定理 4.4.6 这时也成立.

习　题

1. 将本段最后的讨论补充出来.
2. 本段中的矩阵之秩为 2 时的平凡情况指的是什么？

第五章　一般情况下的奇异积分方程

本章将利用上一章的结果讨论奇异积分方程，其积分曲线具有节点和系数具有间断点的情况.

5.1　特征方程及其相联方程

5.1.1　特征方程

本章中将把第三章讨论过的封闭曲线情况下奇异积分方程的解法推广到带节点的曲线情况. 本段首先考虑下面的**特征方程**:

$$\boldsymbol{K}^0\varphi \equiv a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t = f(t_0), \quad t_0 \in L, \tag{1.1}$$

这里 L 是带节点 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的分段光滑曲线(图 4-4), $a(t), b(t), f(t) \in H_0$ 于 L 上，即在 L 的每段光滑弧上 $\in H$，允许未知函数 $\varphi(t)$ 在各节点处可有不到一阶的奇异性，而在不含节点的任何弧段上 $\in H$，或者，$\varphi(t) \in H^*$ 于 L 上(参看 4.1.2 段). 注意，作为(1.1) 的解，$\varphi(t)$ 并不要求在各节点处满足此方程，在这些点处 $\varphi(t)$ 甚至可以无定义. 我们将只限于讨论正则型情况，即 $a(t) \pm b(t) \neq 0$ 于 L 上.

像在第三章中那样，方程(1.1) 可化为 Riemann 边值问题而求解. 令

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\mathrm{d}t, \quad z \overline{\in} L, \tag{1.2}$$

于是，利用 Plemelj 公式，仍可把(1.1) 化为

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}, \quad t \in L, \tag{1.3}$$

其中

$$G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}. \tag{1.4}$$

由于 $G(t), f(t)/[a(t)+b(t)]$ 也 $\in H_0$ 于 L 上，因此(1.3) 就成为上一章中

讨论过的那种 R 问题；且由(1.2)知 $\Phi(\infty)=0$，因此要在 R_{-1} 中求解. 按照 4.2.2 段中的讨论，可把节点 $\{c_j\}$ 分成普通节点和特异节点两类，而(1.3)可以考虑在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中求解，这里 $c_1,c_2,\cdots,c_q$ 是某些普通节点，即要求 $\Phi(z)$ 在这些普通节点附近保持有界，而在其他普通节点附近，仍允许有不到一阶的奇异性，而在各特异节点附近，$\Phi(z)$ 必然有界或几乎有界.

解出(1.3)后，方程(1.1)的解以

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t) \tag{1.5}$$

给出，因此 $\varphi(t)$ 在各节点附近有与 $\Phi(z)$ 相似的性质. 这样，我们也就把节点分类的名称以及解类 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 赋予方程(1.1). 下面我们就设(1.1)要求在 $h=h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中求解.

按照 4.2.2 段的论述，仍令 $\Gamma(z)$ 以第四章(2.4)式给出，并对每一节点 c，以第四章(2.19)式定义 $\gamma_c=\alpha_c+\mathrm{i}\beta_c$，再决定整数 λ_c 一如那里的方法，即：当 $c\in\{c_1,c_2,\cdots,c_q\}$ 时，使 $0<\alpha_c+\lambda_c<1$；当 c 为别的普通节点时，使 $-1<\alpha_c+\lambda_c<0$；当 c 为特异节点时，使 $\lambda_c=-\alpha_c$. 因此问题(1.3)的指标 κ 仍由第四章(2.20)给出，它也称为方程(1.1)在 h 类中的**指标**. 这时典则函数 $X(z)$ 由第四章(2.21)给出，其中 $\chi(z)=\mathrm{e}^{\Gamma(z)}\neq 0$. 于是，当 $\kappa\geqslant 0$ 时，R_{-1} 问题(1.3)在 h 类中的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{[a(t)+b(t)]X^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t+X(z)Q_{\kappa-1}(z), \tag{1.6}$$

其中 $Q_{\kappa-1}(z)$ 为 $\kappa-1$ 次任意多项式；而当 $\kappa<0$ 时，则当且仅当满足可解条件

$$\int_L\frac{t^kf(t)}{[a(t)+b(t)]X^+(t)}\mathrm{d}t=0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-1 \tag{1.7}$$

时，问题有(唯一)解(1.6)(当 $k<0$ 时，认为 $Q_k\equiv 0$；下同).

与第三章中类似，由于

$$\frac{X^-(t)}{X^+(t)}=\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)},$$

故可引进关于 h 类的**标准函数**

$$Z(t)=[a(t)+b(t)]X^+(t)=[a(t)-b(t)]X^-(t),\quad t\in L.$$

这样，由(1.5)，方程(1.1)当 $\kappa\geqslant 0$ 时有一般解

$$\begin{aligned}\varphi(t_0)=&\frac{1}{2}\frac{f(t_0)}{a(t_0)+b(t_0)}\left[1+\frac{a(t_0)+b(t_0)}{a(t_0)-b(t_0)}\right]+[X^+(t_0)-X^-(t_0)]\\&\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{[a(t)+b(t)]X^+(t)(t-t_0)}\mathrm{d}t\\&+[X^+(t_0)-X^-(t_0)]Q_{\kappa-1}(t_0)\end{aligned}$$

$$= \frac{a(t_0)f(t_0)}{a^2(t_0)-b^2(t_0)} - \frac{b(t_0)Z(t_0)}{a^2(t_0)-b^2(t_0)}\frac{1}{\pi i}$$

$$\cdot \int_L \frac{f(t)}{Z(t)(t-t_0)}dt + \frac{b(t_0)Z(t_0)}{a^2(t_0)-b^2(t_0)}P_{\kappa-1}(t_0),$$

其中 $P_{\kappa-1}(t_0) = -2Q_{\kappa-1}(t_0)$ 仍为 $\kappa-1$ 次任意多项式，或简写为

$$\varphi(t_0) = \boldsymbol{K}^* f + b^*(t_0)Z(t_0)P_{\kappa-1}(t_0), \qquad (1.8)$$

这里已令

$$\boldsymbol{K}^* f \equiv a^*(t_0)f(t_0) - \frac{b^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{f(t)}{Z(t)(t-t_0)}dt, \qquad (1.9)$$

而

$$a^*(t) = \frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)}, \quad b^*(t) = \frac{b(t)}{a^2(t)-b^2(t)}. \qquad (1.10)$$

当 $\kappa<0$ 时，可解条件(1.7) 现可写成

$$\int_L \frac{t^k f(t)}{Z(t)}dt = 0, \quad k = 0,1,\cdots,-\kappa-1. \qquad (1.11)$$

因此我们得到

定理5.1.1 特征方程(1.1) 在 $h = h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中求解时，若其相应的指标 $\kappa \geqslant 0$，则无条件可解，且一般解由(1.8) 给出；而若 $\kappa<0$，则当且仅当(1.11) 满足时，方程才有解，且有唯一解(1.8) (这时 $P_{\kappa-1}\equiv 0$).

推论5.1.1 齐次方程(1.1) ($f\equiv 0$) 在 h 类中求解时，若相应指标 $\kappa>0$，则它有 κ 个线性无关的解：

$$\{b^*(t)Z(t)t^k\}, \quad k = 0,1,\cdots,\kappa-1; \qquad (1.12)$$

而若 $\kappa \leqslant 0$，则只有零解.

注 若 $f(t)\in h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$，即在 $c_1,c_2,\cdots,c_q$ 附近，它保持有界，在其余普通节点附近有不到一阶奇异性，在特异节点附近几乎有界，而整个说来 $\in H^*$ 于 L 上，则以上结论完全成立. 因为这时，显然 $\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}$ 有同样性质，而又可证明这时由(1.9) 定义的 $\boldsymbol{K}^* f \in h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$. 为了说明最后这一点，只须说明

$$\psi(t_0) = \frac{Z(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{f(t)}{Z^+(t)(t-t_0)}dt \in h(c_1,c_2,\cdots,c_q) \qquad (*)$$

即可. 在 $c_1,c_2,\cdots,c_q$ 附近，$\psi(t_0)$ 是有界的，在别的普通节点附近，

$$Z(t_0) = (t_0-c)^{\alpha_c+\lambda_c}\chi(t_0), \quad \chi(t_0) \text{ 有界}, \ -1 < \alpha_c+\lambda_c < 0,$$

又设

$$f(t)=(t_0-c)^{\mu_c}f_c^*(t_0),\quad f_c^*(t_0)\text{ 有界},-1<\mu_c<0.$$

如果$\mu_c>\alpha_c+\lambda_c$，则(*)式中的积分在$t_0=c$附近有界，从而$\psi(t_0)=O(|t_0-c|^{\alpha_c+\lambda_c})$；如果$\mu_c=\alpha_c+\lambda_c$，则(*)式中积分有对数型奇异性，从而$\psi(t_0)=O(|t_0-c|^{\alpha_c+\lambda_c+\varepsilon})$ ($\varepsilon>0$可任意小)；如果$\mu_c<\alpha_c+\lambda_c$，则此积分为$O(|t_0-c|^{\mu_c-\alpha_c-\lambda_c})$，从而$\psi(t_0)=O(|t_0-c|^{\mu_c})$. 总之，$\psi(t_0)$不管怎样在$c$处总有不到一阶的奇异性. 若$c$为特异节点，则因$f(t_0)$在$c$附近几乎有界，显然$\psi(t_0)$也是如此. 整个$\psi(t_0)\in H^*$是明显的. 这就证实了我们的论断.

5.1.2 相联方程

与第三章中类似，我们也可考虑(1.1)的**相联方程**

$$K^{0\prime}\psi\equiv a(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{b(t)\psi(t)}{t-t_0}dt=g(t_0),\quad t_0\in L,\tag{1.13}$$

这里$g(t)\in H_0$，其余均同前. $K^{0\prime}$仍称为K^0的**相联算子**.

(1.13)也很容易求解. 令

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{b(t)\psi(t)}{t-z}dt,\quad z\overline{\in}L,\tag{1.14}$$

则由Plemelj公式，

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{b(t)\psi(t)}{t-t_0}dt=2\Psi^{\pm}(t_0)\mp b(t_0)\psi(t_0),$$

分别代入(1.13)，可得

$$\psi(t)=\frac{2\Psi^+(t)+g(t)}{a(t)+b(t)},\quad \psi(t)=\frac{2\Psi^-(t)+g(t)}{a(t)-b(t)}.\tag{1.15}$$

令此两式相等，消去$\psi(t)$，就把问题(1.13)化为R问题

$$\Psi^+(t)=\frac{1}{G(t)}\Psi^-(t)+\frac{b(t)g(t)}{a(t)-b(t)},\tag{1.16}$$

其中$G(t)$仍由(1.4)给出(并在R_{-1}中求解). 求出$\Psi(z)$后，(1.13)的解$\psi(t)$就可由(1.15)给出.

这些都与3.2.2段相同. 但现在也要对节点以及解进行分类. 由(1.16)可以看出，与3.2.3段中同样的理由，可以看到(1.1)与(1.13)有共同的节点$c_1,c_2,\cdots,c_n$，且普通节点与特异节点的分类完全一样. 因此在求解(1.13)时当然也要联系到某一解类. 设$c_1,c_2,\cdots,c_m$为所有普通节点，则$h'=h(c_{q+1},c_{q+2},\cdots,c_m)$称为$h=h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$的**相联类**. 若$\kappa$为(1.1)在$h$类中的指标，则易见$\kappa'=-\kappa$为(1.13)在$h'$类中的指标. 且若$X(z)$是(1.1)在$h$类中的典则函数，则$1/X(z)$就是(1.13)在$h'$类中的典则函数.

我们来说明方程(1.1)及其齐次相联方程$K^{0\prime}\psi=0$分别在类h及其相联类h'中求解时的联系. 对于$K^{0\prime}\psi=0$来说，相应的R_{-1}问题(1.15)也成为齐次的($g\equiv 0$). 因此由3.2.3段，当$\kappa'>0$或即$\kappa=-\kappa'<0$时，它在h'类中有一般解

$$\Psi(z)=\frac{P_{\kappa'-1}(z)}{X(z)}=\frac{P_{-\kappa-1}(z)}{X(z)},$$

代入(1.15)前一式(略去因子2)，得

$$\psi(t)=\frac{P_{-\kappa-1}(t)}{[a(t)+b(t)]X^{+}(t)}=\frac{P_{-\kappa-1}(t)}{Z(t)}; \tag{1.17}$$

而当$\kappa'\leqslant 0$即$\kappa=-\kappa'\geqslant 0$时，只有零解$\psi(t)=0$.

与(1.11)相比较，立得

定理5.1.2 特征方程$K^0\varphi=f$在h类中求解时，当且仅当f与相联齐次方程$K^{0\prime}\psi=0$在h'类中的一切解ψ正交，亦即$\int_L f\psi\,dt=0$时，才是可解的.

也容易看出，如果设$K^0\varphi=0$与$K^{0\prime}\psi=0$分别在h与h'类中各有l与l'个线性无关的解，则必$l-l'=\kappa$，因为$\kappa\geqslant 0$时$l=\kappa$而$l'=0$；$\kappa<0$时$l=0$而$l'=\kappa'=-\kappa$.

由此可见，对于方程(1.1)，Noether型定理仍成立. 以后我们还会看到，对于更一般的奇异积分方程，在相联类的意义下，Noether型定理也成立.

习 题

求证：方程(1.13)在某一类h'中可解的充要条件是g与$K^0\varphi=0$在h类中的一切解φ正交，即$\int_L g\varphi\,dt=0$.

5.1.3 一般Cauchy主值积分的反演

我们来利用5.1.1段中的结果讨论Cauchy主值积分

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt=f(t_0),\quad t_0\in L \tag{1.18}$$

的反演问题. 我们将只讨论一种特别重要的情况：L由n条互不相交的开口光滑弧段$L_j=\widehat{a_jb_j}$ ($j=1,2,\cdots,n$)构成，各L_j均已取定自a_j到b_j为其正向，且设$f(t)\in H$于L上. 与(1.1)相比较，现在$a(t)=0$, $b(t)=1$，因此可取

$$\gamma_{a_j} = \alpha_{a_j} + \mathrm{i}\beta_{a_j} = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\log(-1) = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_{b_j} = \frac{1}{2}.$$

所以所有端点 a_j, b_j 都是普通端点.

设我们要在 $h = h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中求解(1.18)，$c_1, c_2, \cdots, c_q$ 为某些端点，其中有 r 个属于$\{a_j\}$，$q-r$ 个属于$\{b_j\}$. 对于前者，应有 $\lambda_{c_j} = 1$，而对不在其中的 $n-r$ 个 a_j，应有 $\lambda_{a_j} = 0$. 对于属于$\{b_j\}$中的 $q-r$ 个 c_j，应有 $\lambda_{c_j} = 0$，而对其余 $n-(q-r)$ 个不是这些 c_j 的 b_j，应有 $\lambda_{b_j} = -1$. 因此，方程(1.18) 在 h 类中的指标

$$\kappa = -\sum_c \lambda_c = -r + (n-q+r) = n-q.$$

由于现在

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\log(-1)}{t-z}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\log\frac{b_j - z}{a_j - z},$$

因此

$$X(z) = \prod_c (z-c)^{\lambda_c}\mathrm{e}^{\Gamma(z)} = \prod_c (z-c)^{\lambda_c}\sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{n}(b_j - z)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j - z)}}.$$

按照上面 λ_c 取值的规律，最后可得(不计常数因子)

$$X(z) = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{1.19}$$

其中

$$R_1(z) = \prod_{j=1}^{q}(z-c_j), \quad R_2(z) = \prod_{j=q+1}^{2n}(z-c_j), \tag{1.20}$$

根式可任意取定一支(在沿 L 剖开的平面中). 因此，由(1.8)，可得

$$Z(t) = X^+(t) = \sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}, \tag{1.21}$$

其中根式可理解为沿 L 正侧所取的值. 于是在 h 类中(1.18) 反演时，若 $\kappa = n-q \geqslant 0$，则有

$$\varphi(t_0) = \sqrt{\frac{R_1(t_0)}{R_2(t_0)}}\,\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}\,\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{R_1(t_0)}{R_2(t_0)}}P_{n-q-1}(t_0); \tag{1.22}$$

而当 $\kappa = n-q < 0$ 时，当且仅当

$$\int_L \sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}\,t^j f(t)\mathrm{d}t = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, q-n-1 \tag{1.23}$$

时有唯一解(1.22) (这时 $P_{n-q-1} \equiv 0$).

特别重要的情况有以下几种：

1° 在所有端点处均允许解有可积奇异性，即在h_0类中求解，这时$\kappa=$
>0，故(1.18)经反演后可得

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{\sqrt{R(t_0)}}\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\sqrt{R(t)}f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t+\frac{P_{n-1}(t_0)}{\sqrt{R(t_0)}},\tag{1.24}$$

其中

$$R(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-a_j)(t-b_j),$$

且根式例如可如前理解.

2° 在各a_j处解有界，在各b_j处可允许有可积奇异性，即在$h(a_1,a_2,\cdots,a_n)$类中求解. 这时$\kappa=0$，(1.18)反演后有唯一解

$$\varphi(t_0)=\sqrt{\frac{R_a(t_0)}{R_b(t_0)}}\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\sqrt{\frac{R_b(t)}{R_a(t)}}\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\tag{1.25}$$

其中

$$R_a(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-a_j),\quad R_b(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-b_j),$$

根式仍可如前理解.

当然，在$h(b_1,b_2,\cdots,b_n)$类中求解时，只要将$R_a(t)$与$R_b(t)$的地位交换即可.

3° 在所有端点处解均有界，即在h_{2n}类中求解. 这时$\kappa=-n<0$. 故当且仅当满足可解条件

$$\int_L\frac{t^jf(t)}{\sqrt{R(t)}}\mathrm{d}t=0,\quad j=0,1,\cdots,n-1\tag{1.26}$$

时，(1.18)反演才可能，并有唯一解

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)}{\sqrt{R(t)}(t-t_0)}\mathrm{d}t.\tag{1.27}$$

习　题

1. 试讨论(1.18)的相联方程的解，并验证有关相联类中解的结论.

2. 试证在(1.22)中$\varphi(c_j)=0$，$j=1,2,\cdots,q$.

3. 试讨论L为整个实轴X时方程(1.1)的求解，并作出有关反演问题的讨论.

5.2 完全奇异积分方程

5.2.1 正则化问题

本节将考虑完全奇异积分方程

$$\begin{aligned} K\varphi &\equiv a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{b(t_0)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t+\int_L k(t_0,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= f(t_0),\quad t_0\in L \end{aligned} \tag{2.1}$$

的求解问题，其中 L 以及 a,b,f 均同5.1.1段，而 $k(t_0,t)$ 作为二元函数也 $\in H_0$. 下一方程称为(2.1)的**相联方程**

$$\begin{aligned} K'\psi &\equiv a(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{b(t)\psi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t+\int_L k(t,t_0)\psi(t)\mathrm{d}t \\ &= g(t_0),\quad t_0\in L. \end{aligned} \tag{2.2}$$

K,K' 也称为互为**相联算子**，它们也可写成

$$K\varphi = K^0\varphi+k\varphi,\quad K'\psi=K^{0\prime}\psi+k'\psi,$$

其中 $K^0,K^{0\prime}$ 意义同上节，而 k,k' 则为 Fredholm 算子.

我们永远假定 $a(t)\pm b(t)\neq 0$ 于 L 上，即只讨论**正则型**情况. 并设(2.1)在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中求解.

与第三章中相似，为了将(2.1)**正则化**，将它改写为

$$a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{b(t_0)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t = f(t_0)-\int_L k(t_0,t)\varphi(t)\mathrm{d}t, \tag{2.3}$$

或即

$$K^0\varphi = f(t_0)-k\varphi. \tag{2.3$'$}$$

暂时把上式中右边的 φ 当做是已知的. 注意，当 t_0,t_1 在 L 的同一光滑弧段(包括其端点)时，因为 $k(t_0,t)\in H^\nu$ $(0<\nu\leqslant 1)$，故若 $\varphi(t)\in h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$，则(对某个常数 $M>0$)

$$|(k\varphi)(t_0)-(k\varphi)(t_1)|\leqslant M\int_L|\varphi(t)||\mathrm{d}t|\cdot|t_0-t_1|^\nu,$$

式中右边的积分是收敛的，从而(2.3)右边的函数仍 $\in H_0$.

以后把 K^0 的关于 h 类的标准函数 $Z(t)$、指标 κ 等名称也给予 K. 因此，如果(2.1)在 h 类中有解，且若 $\kappa\geqslant 0$，则由(1.8)，φ 必满足

$$\varphi(t_0)=K^*(f-k\varphi)+b^*(t_0)Z(t_0)P_{\kappa-1}(t_0),$$

其中 $\boldsymbol{K}^*$ 由(1.9)给出，亦即

$$\varphi(t_0)+\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{k}\varphi=f^*(t_0), \tag{2.4}$$

其中已令

$$f^*(t_0)=\boldsymbol{K}^*f+b^*(t_0)Z(t_0)P_{\kappa-1}(t_0). \tag{2.5}$$

容易验证，$\boldsymbol{K}^*f\in h$，因此 $f^*(t_0)\in h$. 反过来，如果 $\varphi\in h$（对于某一 $P_{\kappa-1}$）满足(2.4)，则也必满足(2.3)，亦即，φ 为(2.1)在 h 类中的解. 这样，当 $\kappa\geq 0$ 时，(2.1)等价于积分方程(2.4)在 h 类中求解(对于任意给定的 $P_{\kappa-1}$).

若 $\kappa<0$，则由上节知，当且仅当

$$\int_L\frac{t^j\boldsymbol{k}\varphi}{Z(t)}\mathrm{d}t=\int_L\frac{t^jf(t)}{Z(t)}\mathrm{d}t,\quad j=0,1,\cdots,-\kappa-1 \tag{2.6}$$

才在 h 类中可解，且有唯一解

$$\varphi(t_0)=\boldsymbol{K}^*(f-\boldsymbol{k}\varphi),$$

亦即(2.4)，但其中 $P_{\kappa-1}\equiv 0$. 由于 $\boldsymbol{k}$ 为 Fredholm 算子，故

$$\int_L\frac{t^j}{Z(t)}\boldsymbol{k}\varphi\,\mathrm{d}t=\int_L\varphi(t)\boldsymbol{k}'\left(\frac{t^j}{Z(t)}\right)\mathrm{d}t,$$

从而(2.6)可改写为

$$\int_L\rho_j(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_L\frac{t^jf(t)}{Z(t)}\mathrm{d}t,\quad j=0,1,\cdots,-\kappa-1, \tag{2.6$'$}$$

其中

$$\rho_j(t)=\boldsymbol{k}'\left(\frac{t^j}{Z(t)}\right)=\int_L\frac{k(t_1,t)t_1^j}{Z(t_1)}\mathrm{d}t_1, \tag{2.7}$$

它是 H_0 类中的已知函数. 同上理由可知，当 $\kappa<0$ 时，方程(2.1)在 h 类中求解等价于在同一类中求解(2.4)（但(2.5)中的 $P_{\kappa-1}\equiv 0$），且要求这个解还要满足补充条件(2.6)或(2.6)$'$.

我们来说明，$\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{k}$ 是弱 Fredholm 算子. 这是因为，由(1.9)，

$$\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{k}\varphi\equiv a^*(t_0)(\boldsymbol{k}\varphi)(t_0)-\frac{b^*(t_0)Z(t_0)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{Z(t)(t-t_0)}\int_L k(t,t_1)\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1.$$

由于 Cauchy 主值积分与通常积分次序可以交换，故上式又可写成

$$\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{k}\varphi\equiv a^*(t_0)(\boldsymbol{k}\varphi)(t_0)-b^*(t_0)Z(t_0)\int_L k^*(t_0,t_1)\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1, \tag{2.8}$$

这里已令

$$k^*(t_0,t_1)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{k(t,t_1)}{Z(t)(t-t_0)}\mathrm{d}t, \tag{2.9}$$

它对 t_0 在节点附近至多有不到一阶的奇异性，因之是弱 Fredholm 核的.

其次，我们还应注意，方程(2.4)在 h 类中求解时，实际上可在 h_0 类(处

处有界)中求解. 因为，一方面$h\subset h_0$，另一方面，若$\varphi\in h_0$且满足(2.4)，则如前所述，$k\varphi\in H_0$，从而$\boldsymbol{K}^*k\varphi\in h$，又因$f^*(t)\in h$，于是得知$\varphi(t)\in h$.

这样，求解(2.4)时就可像通常那样求Fredholm方程在h_0类中的解，而不必再考虑h类了. 于是通常有关Fredholm方程的结果都可在这里应用.

对于方程(2.2)，用与上面类似的方法也可正则化为一个Fredholm积分方程求解.

5.2.2 正则化方程的讨论

本段中我们将对正则化后的方程(2.4)进行讨论，并说明Fredholm定理在适当方式的叙述下仍成立. 本段以及下段对Noether定理的证明基本采自[42].

首先注意，由(2.5)及其下面的说明，$f^*(t_0)\in h=h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$，且在特异节点$c_k$的邻域内，当$\gamma_k\neq 0$时是有界的，当$\gamma_k=0$时是几乎有界的，实际上具有$\log(t_0-c_k)$型的奇异性.

把与(2.4)相应的齐次方程写成

$$\varphi+\boldsymbol{K}^*k\varphi\equiv\varphi(t_0)+\int_L N(t_0,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0, \tag{2.10}$$

由(2.8)，这里

$$N(t_0,t)=a^*(t_0)k(t_0,t)-\frac{b^*(t_0)Z(t_0)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{k(t_1,t)}{Z(t_1)(t_1-t_0)}\mathrm{d}t_1. \tag{2.11}$$

与此同时，还要讨论(2.10)的相联方程

$$\psi+k'\boldsymbol{K}^{*\prime}\psi\equiv\psi(t_0)+\int_L N(t,t_0)\psi(t)\mathrm{d}t=0^{①}. \tag{2.12}$$

由(2.11)知，

$$N(t,t_0)=a^*(t)k(t,t_0)-\frac{b^*(t)Z(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{k(t_1,t_0)}{Z(t_1)(t_1-t)}\mathrm{d}t_1. \tag{2.13}$$

为要引用Fredholm定理，我们设法把(2.10)转化为有界核的情况. 由(1.8)以及$X^+(t)$的性质，可知

$$Z(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-c_j)^{\gamma_j}\cdot\zeta(t), \tag{2.14}$$

这里$\zeta(t)\in H_0$于L上，且$\neq 0$. 当$c_j\in\{c_1,c_2,\cdots,c_q\}$时$0<\mathrm{Re}\,\gamma_j<1$，当$c_j$为别的普通节点$c_{q+1},c_{q+2},\cdots,c_m$之一时$-1<\mathrm{Re}\,\gamma_j<0$，当$c_j$为特异节点时$\mathrm{Re}\,\gamma_j=0$. 以$c_{p+1},c_{p+2},\cdots,c_n$ $(p\geqslant m)$表示使$\gamma_j=0$的那些特异节点. 令

---

① $(\boldsymbol{K}^*k)'=k'\boldsymbol{K}^{*\prime}$可以直接验证.

$$T(t)=\prod_{j=q+1}^{m}(t-c_j)^{\gamma_j}\cdot\prod_{j=p+1}^{n}[\log(t-c_j)+d_j], \tag{2.15}$$

这里最后乘积中添加了一些适当的常数 d_j，使得 $\log(t-c_j)$（已有确定的分支值）与 d_j 之和在 L 上不取零值，以保证 $1/T(t)$ 在 L 上有界；这种 d_j 显然存在，因为当 $t\in L$ 时 $w=\log(t-c_j)$ 的像无非是 w 平面中向 ∞ 处延伸的某一(一般带节点的)分段光滑曲线，必要时只要将它作某个 d_j 的平移，使之不通过 $w=0$ 即可.

这样，如果引进新的未知函数

$$\varphi_0(t)=\frac{\varphi(t)}{T(t)}, \tag{2.16}$$

方程(2.10)将成为

$$\varphi_0(t_0)+\int_L N_0(t_0,t)\varphi_0(t)T(t)\mathrm{d}t=f_0^*(t_0), \tag{2.17}$$

其中

$$f_0^*(t_0)=\frac{f^*(t_0)}{T(t_0)}, \tag{2.18}$$

$$N_0(t_0,t)=\frac{N(t_0,t)}{T(t_0)}. \tag{2.19}$$

根据(2.11)以及 $Z(t)$ 的性质(2.14)，容易证明，$N_0(t_0,t)$ 是有界函数. 事实上还可证明当固定一个变量于非节点处时，对另一变量在普通节点附近 $\in H_0$，而在特异节点附近 $\in H_\varepsilon^*$，且一致地成立(证明从略).

再在(2.17)中进行换元. 设 c 为某一光滑弧段 L_j 上的一节点，在 L_j 上引进新的变元

$$\tau=\int_c^t T(t)\mathrm{d}t\quad(t\in L_j),$$

于是 $\mathrm{d}\tau=T(t)\mathrm{d}t$；把 L 的像记为 Λ，又记 $\varphi_0(t)$ 为 $\varphi_0(\tau)$，等等，则它成为

$$\varphi_0(\tau_0)+\int_\Lambda N_0(\tau_0,\tau)\varphi_0(\tau)\mathrm{d}\tau=f_0^*(\tau_0),\quad \tau_0\in\Lambda. \tag{2.20}$$

这是有界核的 Fredholm 方程，$f_0^*(\tau_0)$ 也是有界的.

注意，一般说来，L 的像 Λ 并不是一条(带节点的)分段光滑曲线，它可能自身相交以至无限多次. 甚至当 t 在 L 的某一光滑弧段上连续移动时，其像还可能在同一曲线上来回摆动. 这种复杂情况似乎增加了我们分析问题的困难. 为了克服这一点，我们可以进行如下：先取 L 的一光滑弧段 $L_1=\widehat{a_1b_1}$，当 t 自 a_1 沿 L_1 连续变到 b_1 时，在其像曲线上定义弧长参数 s，设 s 自 0 起变到 l_1；然后取 L 的第二个光滑弧段 $L_2=\widehat{a_2b_2}$，当 t 自 a_2 沿 L_2 连续变到 b_2 时，在其像曲线上定义弧长参数 s，要求 s 从 l_1 算起，设到 l_2 为止；如此继续下去，一直到最后一段光滑弧 L_n 为止，而 s 则到 l_n 为止. 最后便可得类似于(2.20)的积

分方程，但变元是 s, s_0，且都是从 0 变到 l_n，积分限也是如此. 它就确实是一 Fredholm 方程了.

方程(2.10) 在 h 类中求解，易于证明，等价于它在最广的解类 h_0 中求解，即允许在每一(变换后的) 节点附近可以有可积奇异性.

在以上的变换过程中，相联方程(2.12) 也就变成了(2.20) 的相联方程

$$\psi(\tau_0) + \int_\Lambda N_0(\tau, \tau_0)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau = 0. \qquad (2.20)'$$

也易证明，此方程在最广的解类中的解实际上是有界的.

把附录第 3 段中的论述应用于(2.20) 与(2.20)′，并再回到原来的变量 t_0, t 与曲线 L，则得

定理5.2.1 方程

$$\varphi(t_0) + \boldsymbol{K}^* k\varphi = f^*(t_0), \quad t_0 \in L \qquad (2.21)$$

(在 h_0 类中从而也就是在 h 类中) 可解的充要条件是

$$\int_L f^*(t)\omega_j(t)\mathrm{d}t = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, \nu, \qquad (2.22)$$

这里 $\{\omega_j(t)\}_1^\nu$ 是相联方程

$$\omega(t_0) + k'\boldsymbol{K}^{*\prime}\omega = 0 \qquad (2.23)$$

的线性无关(有界) 解的全解组.

用附录第 2 段中广义预解核的写法，回到原来的变量 t, t_0 时，我们得知：当可解条件(2.22) 满足时，方程(2.21) 在 h 类中的一般解可写成

$$\varphi(t_0) = \boldsymbol{\Gamma} f^* + \sum_{j=1}^{\nu} C_j \chi_j(t_0), \qquad (2.24)$$

其中 C_j 为任意常数，$\{\chi_j(t)\}_1^\nu$ 为相应于(2.21) 的齐次方程的全解组，而

$$\boldsymbol{\Gamma} f^* \equiv f^*(t_0) + \int_L \Gamma(t_0, t) f^*(t)\mathrm{d}t, \qquad (2.25)$$

其中 $\Gamma(t_0, t)$ 为广义预解核.

对于相联方程(2.12) (右边为任意函数 g)，也可作类似的讨论.

5.2.3 一般情况下的 Noether 定理

第三章中关于奇异积分方程的 Noether 定理，可推广到本节中考虑的一般方程(2.1). 具体说来，我们有

定理5.2.2 (Noether 定理)

Ⅰ. 齐次方程(2.1) ($f \equiv 0$) 在 $h = h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中有有限个线性无

关的解，设为 l 个.

Ⅱ. 方程(2.1)在 h 类中可解的充要条件为

$$\int_L f\psi_j \,\mathrm{d}t = 0, \quad j = 1,2,\cdots,l',$$

其中 $\{\psi_j\}_1^{l'}$ 为相联齐次方程(2.2)$(g \equiv 0)$ 在相联类 h' 中的线性无关全解组.

Ⅲ. 设(2.1)在 h 类中的指标为 κ，则 $l - l' = \kappa$.

此定理对于特征方程 $\boldsymbol{K}^0\varphi = f$ 来说已见其为真(参看 5.1 节). 现证它对一般的 $\boldsymbol{K}\varphi = f$ 也成立.

结论 Ⅰ 是显然的，因为 $\boldsymbol{K}\varphi = 0$ 正则化后的 Fredholm 方程只可能有有限个线性无关的解，而 $\boldsymbol{K}\varphi = 0$ 的解必为后者的解. 今证结论 Ⅱ 与 Ⅲ.

在证明之前先作一些预备性的说明. 设已如 5.2.1 段把方程(2.1)正则化为(2.4)，其中 $f^*(t_0)$ 由(2.5)给出，且当 $\kappa \geqslant 1$ 时

$$P_{\kappa-1}(t) = A_1 t^{\kappa-1} + A_2 t^{\kappa-2} + \cdots + A_\kappa \tag{2.26}$$

($\kappa \leqslant 0$ 时不存在 $P_{\kappa-1}$)，而 $\{A_k\}_1^\kappa$ 为任意常数. 当 $\kappa < 0$ 时，则还要满足可解条件(2.6)′.

先设 $\kappa \geqslant 0$. 这时方程(2.1)在 h 类中求解等价于求解(2.4)，而后者的可解条件为(2.22). 以 $f^*(t_0)$ 的表达式(2.5)代入(2.22)，并引进记号

$$\delta_j = \int_L \omega_j \boldsymbol{K}^* f \,\mathrm{d}t, \quad j = 1,2,\cdots,\nu, \tag{2.27}$$

则(2.22)可以写成

$$\sum_{k=1}^{\kappa} \gamma_{jk} A_k = \delta_j, \quad j = 1,2,\cdots,\nu, \tag{2.28}$$

其中 (γ_{jk}) 为一已知常数矩阵，与 $f(t)$ 无关.

易证对于一般的 $\boldsymbol{K}$ 来说(f, g 不是在同一节点处有可积奇异性)，成立着

$$\int_L f\boldsymbol{K}g \,\mathrm{d}t = \int_L g\boldsymbol{K}' f \,\mathrm{d}t,$$

故 δ_j 又可写成

$$\delta_j = \int_L f\boldsymbol{K}^{*\prime}\omega_j \,\mathrm{d}t = \int_L f\omega_j^* \,\mathrm{d}t, \tag{2.27$'$}$$

其中已令

$$\omega_j^*(t) = \boldsymbol{K}^{*\prime}\omega_j, \quad j = 1,2,\cdots,\nu. \tag{2.29}$$

它们是线性无关的，因为，由 $\omega_j + k'\boldsymbol{K}^{*\prime}\omega_j = 0$ 可推知 $\omega_j = -k'\omega_j^*$，故若 $\{\omega_j^*\}$ 线性相关，则 $\{\omega_j\}$ 也将如此，矛盾. 此外，从 $Z(t)$ 的表示式(2.14)以及算子 $\boldsymbol{K}^*$ 的定义可推知 $\omega_j^* \in h'$.

设矩阵(γ_{jk})的秩为ρ ($\rho\leqslant\nu$, $\rho\leqslant\kappa$)；必要时，交换δ_j以及(2.26)中各个A_k的顺序，可设其左上角的ρ阶行列式不等于0. 因此，方程组(2.28)的相容性条件为

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1\rho} & \delta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma_{\rho 1} & \cdots & \gamma_{\rho\rho} & \delta_\rho \\ \gamma_{\rho+j,1} & \cdots & \gamma_{\rho+j,\rho} & \delta_{\rho+j} \end{vmatrix} = 0, \quad j=1,2,\cdots,\nu-\rho, \tag{2.30}$$

或可写成

$$\delta_{\rho+j}+\sum_{k=1}^{\rho}a_{jk}\delta_k=0, \quad j=1,2,\cdots,\nu-\rho, \tag{2.30$'$}$$

其中(a_{jk})为与f无关的常数矩阵. 把δ_j的表达式(2.27)′代入上式，可知方程(2.4)的可解条件具有下述形式：

$$\int_L \lambda_j(t)f(t)\mathrm{d}t=0, \quad j=1,2,\cdots,\nu-\rho, \tag{2.31}$$

其中

$$\lambda_j(t)=\omega_{\rho+j}^*(t)+\sum_{k=1}^{\rho}a_{jk}\omega_k^*(t), \quad j=1,2,\cdots,\nu-\rho \tag{2.32}$$

为h'类中完全确定的、线性无关的函数.

设此可解条件已满足，则(2.4)可解；这时(2.30)也满足，可求出解$\{A_j\}_1^\rho$，且解中含$\{A_k\}_{\rho+1}^\nu$为任意常数. 再代入(2.28)，可得其一般解为

$$A_j=\sum_{k=1}^{\kappa-\rho}B_{jk}A_{\rho+k}+\sum_{k=1}^{\kappa}\Gamma_{jk}\delta_k, \quad j=1,2,\cdots,\rho, \tag{2.33}$$

其中(B_{jk}),(Γ_{jk})为已知常数矩阵，与$f(t)$无关. 将求得的$\{A_j\}_1^\rho$代入(2.4)的右边，则所得方程对于任何$A_{\rho+1},A_{\rho+2},\cdots,A_\kappa$是可解的. 由(2.24)，并利用(2.5),(2.27)，可得(2.4)的一般解为

$$\varphi(t_0)=\boldsymbol{\Gamma}^*\boldsymbol{K}^*f+C_1\chi_1(t_0)+C_2\chi_2(t_0)+\cdots+C_{\kappa+\nu-\rho}\chi_{\kappa+\nu-\rho}(t_0), \tag{2.34}$$

其中$\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_\nu$和$C_1,C_2,\cdots,C_\nu$与(2.24)中的全同，而为统一起见，已把$A_{\rho+1},A_{\rho+2},\cdots,A_\kappa$分别改写为$C_{\nu+1},C_{\nu+2},\cdots,C_{\kappa+\nu-\rho}$，而$\chi_{\nu+1},\chi_{\nu+2},\cdots,\chi_{\kappa+\nu-\rho}$为某些完全确定的函数，都与$f(t)$无关，且$\in h$类，并把与$f$有关的项已放入$\boldsymbol{\Gamma}^*\boldsymbol{K}^*f$中，这里

$$\boldsymbol{\Gamma}^*F\equiv F(t_0)+\int_L\Gamma^*(t_0,t)F(t)\mathrm{d}t, \tag{2.35}$$

其中$\Gamma^*(t_0,t)$只与$\Gamma(t_0,t)$相差一些确定的项.

特别，对齐次方程(2.1) ($f\equiv0$)，它等价于

$$\varphi(t_0)+\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{k}\varphi=b^*(t_0)Z(t_0)P_{\kappa-1}(t_0);\qquad(2.36)$$

这时所有 $\delta_j=0$，可解条件当然满足. 以(2.33)代入(2.36)右边，得

$$\varphi+\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{k}\varphi=C_{\nu+1}\sigma_{\nu+1}+C_{\nu+2}\sigma_{\nu+2}+\cdots+C_{\kappa+\nu-\rho}\sigma_{\kappa+\nu-\rho},\qquad(2.3\cdot)$$

其中 $\sigma_{\nu+1},\sigma_{\nu+2},\cdots,\sigma_{\kappa+\nu-\rho}$ 为一些确定的线性无关的函数.

由(2.34)，齐次方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的一般解具有下形：

$$\varphi(t_0)=C_1\chi_1(t_0)+C_2\chi_2(t_0)+\cdots+C_{\kappa+\nu-\rho}\chi_{\kappa+\nu-\rho}(t_0),\qquad(2.37)$$

这里所有 $\{C_j\}_1^{\kappa+\nu-\rho}$ 为任意常数. 这样，所有 $\{\chi_j\}_1^{\kappa+\nu-\rho}$ 为 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的特解，其中前 ν 个同时又是方程

$$\varphi+\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{k}\varphi=0$$

的线性无关解. 当 $j>\nu$ 时，$\chi_j(t)$ 又是方程

$$\varphi+\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{k}\varphi=\sigma_j\quad(\nu+1\leqslant j\leqslant\kappa+\nu-\rho)$$

的特解. 易证 $\{\chi_j\}_1^{\kappa+\nu-\rho}$ 线性无关. 因为，如果有某些 α_j 使

$$\varphi_0\equiv\sum_{j=1}^{\kappa+\nu-\rho}\alpha_j\chi_j=0,$$

则显然有

$$0=\varphi_0+\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{k}\varphi_0=\alpha_{\nu+1}\sigma_{\nu+1}+\alpha_{\nu+2}\sigma_{\nu+2}+\cdots+\alpha_{\kappa+\nu-\rho}\sigma_{\kappa+\nu-\rho}.$$

由于 $\{\sigma_j\}$ 线性无关，故

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu+2}=\cdots=\alpha_{\kappa+\nu-\rho}=0.$$

再由 $\{\chi_j\}_1^{\nu}$ 的线性无关性，可知

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_\nu=0.$$

所以，$\boldsymbol{K}\varphi=0$ 在 h 类中共有 $l=\kappa+\nu-\rho$ 个线性无关解.

现设 $\kappa<0$. 这时 $P_{\kappa-1}\equiv0$，而(2.4)的可解条件将归结为 $\delta_j=0\ (j=1,2,\cdots,\nu)$，亦即如下形式：

$$\int_L\lambda_j(t)f(t)\mathrm{d}t=0,\quad j=1,2,\cdots,\nu,\qquad(2.38)$$

其中 $\lambda_j\in h'$ 为完全确定的函数，且线性无关. 设(2.38)成立，故(2.4)在 h 类中可解. 但它的解一般还不是(2.1)在 h 类中的解. 因为要想这样，还要满足 $-\kappa$ 个条件(2.6)′. 把一般解(2.34)(注意现在 $C_{\nu+1}=C_{\nu+2}=\cdots=C_{\kappa+\nu-\rho}=0$)代入(2.6)′的左边，便得 $C_1,C_2,\cdots,C_\nu$ 的一个类似于(2.28)的 $-\kappa$ 个方程的线性组，其相容性条件仍可写成下形：

$$\int_L\lambda_j(t)f(t)\mathrm{d}t=0,\quad j=\nu+1,\nu+2,\cdots,\nu+\sigma\qquad(2.39)$$

$(\sigma\leqslant-\kappa)$，其中 $\lambda_j(t)$ 也 $\in h'$. (2.38),(2.39)合在一起就是方程(1.1)在 h 类中可解的充要条件.

现在我们来证明定理中的结论 Ⅱ. 对于任何 $\varphi \in h$, $\psi \in h'$, 已知

$$\int_L \psi \boldsymbol{K}\varphi \, \mathrm{d}t = \int_L \varphi \boldsymbol{K}'\psi \, \mathrm{d}t. \tag{2.40}$$

由此式立即可见, $\boldsymbol{K}\varphi = f$ 可解的必要条件为

$$\int_L f\psi_j \, \mathrm{d}t = 0, \quad j = 1,2,\cdots,l', \tag{2.41}$$

其中 $\{\psi_j\}_1^{l'}$ 为 $\boldsymbol{K}'\psi = 0$ 在 h' 类中的全解组. 现要证明条件(2.41)也是充分的.

前已看到, $\boldsymbol{K}\varphi = f$ 在 h 类中可解的充要条件为(2.38),(2.39), 即

$$\int_L \lambda_j(t) f(t) \mathrm{d}t = 0, \quad j = 1,2,\cdots,m, \tag{2.42}$$

其中 m 为某个正整数, 且 $\lambda_j \in h'$. 今设(2.41)已满足, 若能由此推知(2.42)也成立, 便可得知 $\boldsymbol{K}\varphi = f$ 是可解的.

任取 $g(t) \in H$, 且 $g(c_j) = 0$ $(j = 1,2,\cdots,n)$. 因此 $\boldsymbol{K}g \in H_0$. 方程 $\boldsymbol{K}\varphi = \boldsymbol{K}g$ 在 H 类中从而在 h 类中不言而喻可解, 因此必然

$$0 = \int_L \lambda_j \boldsymbol{K}g \, \mathrm{d}t = \int_L g\boldsymbol{K}'\lambda_j \, \mathrm{d}t, \quad j = 1,2,\cdots,m.$$

由 $g(t)$ 的任意性可知 $\boldsymbol{K}'\lambda_j = 0$, 即 $\lambda_j \in h'$ 是 $\boldsymbol{K}'\psi = 0$ 的解. 因此每个 λ_j 为 $\{\psi_k\}_1^{l'}$ 的线性组合. 这样, 由(2.41)便可推知(2.42). 结论 Ⅱ 得证.

最后来证明定理的结论 Ⅲ. 先设 $\kappa \geqslant 0$. 这时方程(2.1)在 h 类中可解的条件是(2.31). 另一方面, 如上已证, (2.41)也是其可解的充要条件. 亦即, 如果 $f(t)$ 适合(2.31), 则必适合(2.41), 反之亦然. 由下面的引理5.2.1, 就可知道 $\{\lambda_j\}_1^{\nu-\rho}$ 或 $\{\psi_k\}_1^{l'}$ 中的每一元是另一组函数的线性组合. 于是必然

$$l' = \nu - \rho.$$

但由(2.37)$'$, $\boldsymbol{K}\varphi = 0$ 在 h 类中共有 $l = \kappa + \nu - \rho$ 个线性无关的解. 因此得知 $l - l' = \kappa$.

再设 $\kappa < 0$. 由于本段和上段中对于算子 $\boldsymbol{K}$ 的讨论, 也完全适用于 $\boldsymbol{K}'$, 因此, 交换 $\boldsymbol{K}$ 与 $\boldsymbol{K}'$ 的地位(同时也交换 h 类与 h' 类的地位), 并注意到 $\boldsymbol{K}'$ 在 h' 类中的指标 $\kappa' = -\kappa$, 故也可得 $l' - l = \kappa'$, 亦即 $l - l' = \kappa$. 结论 Ⅲ 得证.

□

以上证明中用到了下一引理:

引理 5.2.1 设 $\{\varphi_j\}_1^n$ 为 L 上一组 $\in h_0$ 的线性无关函数, 又 $\omega \in h_0$ 是这样一函数, 使对于 L 上的任一函数 $f \in H_0$ 若成立

$$(\varphi_j, f) = \int_L \varphi_j f \, \mathrm{d}t = 0, \quad j = 1,2,\cdots,n,$$

就能推出 $(\omega, f) = 0$, 则 ω 必为 $\{\varphi_j\}_1^n$ 的线性组合.

为了证明这个引理，我们需要将它进行改造.

考虑 L 上的函数类 H_ν^* $(0<\nu<1)$，亦即在 L 的每一光滑弧段上 $\in H_\nu^*$. 定义其中任意二函数 φ,ψ 的内积

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_L\varphi\bar{\psi}\rho(t)\mathrm{d}s,$$

其中

$$\rho(t)=\prod_k|t-c_k|^\nu,$$

这里 $\{c_k\}$ 是 L 上的所有节点，这种内积显然是收敛的.

我们来证明下面改造的引理：

引理 5.2.2 设 $\{\varphi_j\}_1^n$ 是 $\in H_\nu^*$ 的线性无关组，又 $\omega\in H_\nu^*$ 是这样一函数，使对于 L 上的任一函数 $f\in H_\nu^*$ 若成立

$$\langle\varphi_j,f\rangle=0,\quad j=1,2,\cdots,n$$

就能推出 $\langle\omega,f\rangle=0$，则 ω 必为 $\{\varphi_j\}_1^n$ 的线性组合.

证 不妨先把 $\{\varphi_j\}_1^n$ 正规正交化，亦即，使得 $\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle=\delta_{jk}$ (Kronecker 记号). 记 $c_j=\langle\omega,\varphi_j\rangle$，并令

$$\omega_0=\omega-\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j.$$

易证：

$$\begin{aligned}\langle\omega_0,\omega_0\rangle&=\langle\omega,\omega\rangle-\sum_{j=1}^n c_j\langle\varphi_j,\omega\rangle-\sum_{j=1}^n\bar{c}_j\langle\omega,\varphi_j\rangle+\sum_{j=1}^n|c_j|^2\\&=\langle\omega,\omega\rangle-\sum_{j=1}^n|c_j|^2.\end{aligned}\tag{*}$$

另一方面，对每一 j，

$$\langle\varphi_j,\omega_0\rangle=\langle\varphi_j,\omega-\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k\rangle=\bar{c}_j-\bar{c}_j=0.$$

由引理假设条件可推知 $\langle\omega,\omega_0\rangle=0$，即

$$0=\langle\omega,\omega_0\rangle=\langle\omega,\omega-\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k\rangle=\langle\omega,\omega\rangle-\sum_{j=1}^n|c_j|^2.$$

与 (*) 式比较，可知

$$\langle\omega_0,\omega_0\rangle=\int_L|\omega_0|^2\rho(t)\mathrm{d}s=0.$$

由于 $\rho(t)\geqslant 0$ 且仅在节点处为 0，故知 $\omega_0=0$，即 $\omega=\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j$. □

利用引理 5.2.2 就可证明引理 5.2.1. 由于 $\{\varphi_j\}_1^n$ 与 ω 均 $\in h_0$，故若取 ν 稍大于这些函数在诸节点处的最高奇异阶数(但仍 $\nu<1$)，则它们均 $\in H_\nu^*$. 设对任何 $f\in H_0$，由 $(\varphi_j,f)=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 可推出 $(\omega,f)=0$. 记

$$f_0(t) = \frac{\overline{f(t)}\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}s}}{\rho(t)},$$

则 $f_0 \in H_\nu^*$. 由于

$$\langle \varphi_j, f_0 \rangle = \int_L \varphi_j \overline{f}_0 \rho(t) \mathrm{d}s = \int_L \varphi_j f \mathrm{d}t = (\varphi_j, f),$$

同理

$$\langle \omega, f_0 \rangle = (\omega, f),$$

故从 $\langle \varphi_j, f_0 \rangle = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 能推出 $\langle \omega, f_0 \rangle = 0$. 因此由引理 5.2.2 知 ω 为 $\{\varphi_j\}_1^n$ 的线性组合. 引理 5.2.1 得证.

习　题

设 L 是一条光滑封闭曲线，$f(t) \in H_0$ 于 L 上，于是其间断点也可看成节点. 试对这种情况叙述 Noether 定理，并说明用本段的结果可与 3.3.2 段中的结果统一起来.

5.3　一般带周期核的奇异积分方程

3.1　曲线带节点的 Hilbert 核奇异积分方程

我们这里将把 3.4.1 段中讨论过的方程推广到积分曲线 L 带有节点的情

设 $L = \sum_{j=1}^{p} L_j$ 由 p 条光滑弧段 L_j 组成，已取定正向，所有 L_j 位于同一周

带域 S: $|\mathrm{Re}\, z| < \frac{1}{2} a\pi$ 内 $(a > 0)$. 设函数 $A(t), B(t), f(t) \in H_0$ 于 L 上，

$A^2 - B^2 \neq 0$. 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为 L 上的全部节点(包括各 L_j 的端点以及 A,

的间断点). 事实上，我们还可允许 L 到达 S 的边界上，但这时 c 与 $c + a$

$c - a\pi$ 要看成同一点. 我们要求解方程

$$A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi \mathrm{i}} \int_L \varphi(t) \cot \frac{t - t_0}{a}\, \mathrm{d}t = f(t_0), \quad t_0 \in L. \qquad (3.1)$$

可按通常办法区分普通节点与特异节点，并确定要求(3.1) 在 $h =$

$c_2, \cdots, c_q)$ 类中求解. 对于 h 类，也有相应的指标 κ. 对于 $\gamma_c = \alpha_c + \mathrm{i}\beta_c$,

号均同 5.1 节.

时方程(3.1) 在 h 类中的典则函数可取为

$$X(z) = \Pi(z) \mathrm{e}^{\Gamma(z)}, \qquad (3.2)$$

$$\Pi(z) = \prod_{j=1}^{n}\left(\tan\frac{z}{a} - \tan\frac{c_j}{a}\right)^{\lambda_j}, \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{2a\pi i}\int_L \log G(t)\cdot\cot\frac{t-z}{a}\,dt, \\ G(t) &= \frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

且对数在各 L_j 上已取定分支. 这里已把 λ_{c_j} 简记为 λ_j.

如 3.4.1 段定义 $G_\infty = \dfrac{X(-\infty i)}{X(+\infty i)}$, 则可计算得

$$G_\infty = \prod_{j=1}^{n}\left\{\frac{\tan\frac{c_j}{a}+i}{\tan\frac{c_j}{a}-i}\right\}^{\lambda_j}\exp\left\{-\frac{1}{a\pi}\int_L \log G(t)\,dt\right\}$$

$$= (-1)^{\kappa}e^{-i\nu} = e^{-i\mu\pi}, \tag{3.5}$$

其中已令

$$\nu = \frac{1}{a\pi i}\int_L \log G(t)\,dt + \frac{2}{a}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j c_j,\quad \mu = \frac{\nu}{\pi} - \kappa. \tag{3.6}$$

以后的讨论完全与 3.4.1 段相同, 甚至那里的结果也全成立, 所不同的只是: 现在 $X(z)$ 要由(3.2) ~ (3.4) 给出, μ,ν 由(3.6) 给出, 且解指的是 $h = h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 中的解.

在一般文献中, 例如[50], 只讨论了 L 为实轴上区间 $\left(-\frac{1}{2}a\pi, \frac{1}{2}a\pi\right)$ 内的某些线段的情况.

有一个特殊情况值得注意: $L_j = \widehat{a_j b_j}$ 是连接 S 左右边界上二合同点的光滑弧段

$$b_j = a_j + a\pi,\quad \mathrm{Re}\,a_j = -\frac{1}{2}a\pi\ (j = 1, 2, \cdots, p),$$

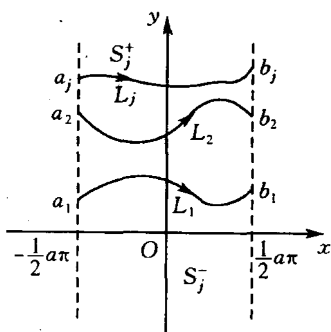


图 5-1

且设各 L_j 间彼此互不相交. 为简单起见, 设 L_j 在 a_j, b_j 处的切线平行, 且已取定自 a_j 至 b_j 为正向(图 5-1); 又设 $A(t), B(t), f(t) \in H$ 于 L 上, 且它们分别在 a_j, b_j 处的值相等.

不妨设所有 L_j 都在坐标原点 O 的上方. 带形域 S 被 L_j 分割成两部分, 上半部分记为 S_j^+, 下半部分记为 S_j^-.

这一情况虽是开口曲线情况的一特

例，但它本质上却与3.4.1段中讨论过的情况更为相似. 因为，经 $w=\tan\frac{z}{a}$ 作保形映射后，L_j 在 w 平面上的像 Γ_j 是包围 $w=\mathrm{i}$ 的光滑封闭曲线. 现在所不同的是：$z=-\infty\mathrm{i}$ 属于所有 S_j^-，$z=+\infty\mathrm{i}$ 属于所有 S_j^+. 只要注意到这一点，解法的其余部分就与那里全相同了.

习　题

试将方程(3.1)的求解结果演算出来，并区别一般情况和本段末讲的特殊情况.

5.3.2　一般 Hilbert 核积分的反演

本段讨论 Hilbert 核奇异积分的反演问题. 它虽属于前段的一种特殊情况，却因其特别重要故专门讨论. 为简单起见，将设 $L=\sum_{j=1}^{p}L_j$ 由位于周期带 S 内的 p 条互不相交的开口光滑弧段 $L_j=\widehat{a_jb_j}$ 组成①. 以 $c_1,c_2,\cdots,c_{2p}$ 表示诸端点 a_j,b_j（以任何次序排列均可）.

今考虑下列积分的反演问题：

$$\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\varphi(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t=f(t_0),\quad t_0\in L,\tag{3.7}$$

其中 $f(t)\in H$ 于 L 上. 反演时，我们要求 $\varphi(t)\in h=h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$，这里 $0\leqslant q\leqslant 2p$.

不用上段方法，我们宁可将它化为上一章中讨论过的 PR 边值问题来处理. 令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_L\varphi(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t,\tag{3.8}$$

则(3.7)可化为

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=f(t),\quad t\in L,\tag{3.9}$$

还要求满足补充条件

$$\Phi(+\infty\mathrm{i})=-\Phi(-\infty\mathrm{i}).\tag{3.10}$$

现在 $G(t)=-1$，故

$$\alpha_j=\alpha_{c_j}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & \text{当 } c_j\in\{a_1,a_2,\cdots,a_p\};\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & \text{当 } c_j\in\{b_1,b_2,\cdots,b_p\}.\end{cases}$$

---

① 实际上，只要 L 经平移 $a\pi$ 后所得 L' 不与 L 相交即可.

因此所有端点为普通端点. 当$0\leqslant j\leqslant q$时，应取整数λ_j使$0<\alpha_j+\lambda_j<1$；当$q+1\leqslant j\leqslant 2p$时，应取$\lambda_j$使$-1<\alpha_j+\lambda_j<0$. 设$\{c_1,c_2,\cdots,c_q\}$中有$r$个点在$\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$中，$q-r$个在$\{b_1,b_2,\cdots,b_p\}$中. 于是，对于$a_1,a_2,\cdots,a_p$，其中共有$r$个$\lambda_j=1$，其余的$\lambda_j=0$；对于$b_1,b_2,\cdots,b_p$，其中共有$p-q+r$个$\lambda_j=-1$，其余的$\lambda_j=0$. 因此，(3.7) 在$h$类中的指标

$$\kappa=-\sum_{j=1}^{2p}\lambda_j=p-q. \tag{3.11}$$

再令

$$R_1(z)=\prod_{j=1}^{q}\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{c_j}{a}\right),\quad R_2(z)=\prod_{j=q+1}^{2p}\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{c_j}{a}\right),$$

$$R(z)=R_1(z)R_2(z)=\prod_{j=1}^{p}\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{a_j}{a}\right)\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{b_j}{a}\right),$$

则易证

$$X(z)=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{3.12}$$

其中根式可以理解为沿L剖开的平面上的任何全纯分支，例如，

$$\lim_{z\to\pm\frac{1}{2}a\pi}\tan^{p-q}\frac{z}{a}\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}=1$$

(我们已假定$\pm\frac{1}{2}a\pi$不在L上). 今后我们恒记

$$X^+(t)=\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}},\quad t\in L,$$

而$X^-(t)=-X^+(t)$. 现在

$$G_\infty=\frac{X(-\infty\mathrm{i})}{X(+\infty\mathrm{i})}=(-1)^\kappa\exp\left\{-\frac{2\mathrm{i}}{a}\sum_{j=1}^{2p}\lambda_jc_j-\frac{1}{a\pi}\int_L\log G(t)\,\mathrm{d}t\right\}$$

$$=(-1)^{p-q}\exp\left\{-\frac{2\mathrm{i}}{a}\sum_{j=1}^{2p}\lambda_jc_j-\frac{\mathrm{i}}{a}\sum_{j=1}^{p}(b_j-a_j)\right\}.$$

此式可按下面方法化简：对于某一$c_j\in\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$，若$0\leqslant j\leqslant q$，于是$\lambda_j=1$，则上面$\{\cdots\}$中经合并后，$c_j$的系数将为$-\mathrm{i}/a$；若$q+1\leqslant j\leqslant 2p$，则$\lambda_j=0$，故$c_j$的系数为$\mathrm{i}/a$. 对于某一$c_j\in\{b_1,b_2,\cdots,b_p\}$，若$0\leqslant j\leqslant q$，则$\lambda_j=0$，于是$c_j$的系数为$-\mathrm{i}/a$；若$q+1\leqslant j\leqslant 2p$，则$\lambda_j=-1$，于是$c_j$的系数为$\mathrm{i}/a$. 因此$G_\infty$可改写为

$$G_\infty=\mathrm{e}^{-\gamma\pi\mathrm{i}}, \tag{3.13}$$

其中γ为某一(复) 常数：

$$\gamma = \gamma(c_1, c_2, \cdots, c_q) = \frac{1}{a\pi}\Big(\sum_{j=1}^{q} c_j - \sum_{j=q+1}^{2p} c_j\Big) + (p-q). \tag{3.14}$$

以下分几种情况来讨论.

1° $\kappa = p - q > 0$. 这时问题(3.9) 在 h 类中的一般解为

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2a\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}X(z)P_{p-q}\left(\tan\frac{z}{a}\right), \tag{3.15}$$

其中 P_{p-q} 为 $p-q$ 次任意多项式，为要满足(3.10)，注意到

$$\left.\begin{aligned}\Phi(+\infty\mathrm{i}) &= \frac{X(+\infty\mathrm{i})}{2a\pi}\int_L \frac{f(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}X(+\infty\mathrm{i})P_{p-q}(\mathrm{i}),\\ \Phi(-\infty\mathrm{i}) &= -\frac{X(-\infty\mathrm{i})}{2a\pi}\int_L \frac{f(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}X(-\infty\mathrm{i})P_{p-q}(-\mathrm{i}),\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

则 P_{p-q} 的系数应满足条件

$$P_{p-q}(\mathrm{i}) + G_\infty P_{p-q}(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}(G_\infty - 1)f_*, \tag{3.17}$$

其中 G_∞ 以(3.13) 给出，而

$$f_* = f_*(c_1, c_2, \cdots, c_q) = \frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L \sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)\mathrm{d}t. \tag{3.18}$$

当(3.17) 满足时，反演问题(3.7) 在 h 类中的一般解为

$$\begin{aligned}\varphi(t_0) = {}& \frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{R_1(t_0)}{R_2(t_0)}}\int_L \sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t\\ &+\sqrt{\frac{R_1(t_0)}{R_2(t_0)}}P_{p-q}\left(\tan\frac{t_0}{a}\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

由(3.13) 式，可将(3.17) 改写如下：设

$$P_{p-q}(w) = C_0 + C_1 w + \cdots + C_{p-q}w^{p-q}.$$

(3.17) 成为

$$\cos\frac{\gamma\pi}{2}(C_0 - C_2 + C_4 - \cdots) - \sin\frac{\gamma\pi}{2}(C_1 - C_3 + C_5 - \cdots) = f_*\sin\frac{\gamma\pi}{2}, \tag{3.17$'$}$$

其中 $C_0, C_1, \cdots, C_{p-q}$ 中的某 $p-q$ 个可以任意，而剩下的一个由它们唯一确定.

注意到反演问题不因坐标轴平移而改变其可解性及其解的形式，因此一般解(3.19) 与条件(3.17) 也应与坐标轴的选取无关. 这从它们外表形式看不出来. 下面我们将把它们改写为另外的形式，使这一事实显示出来.

为此，我们记

$$\Pi_1(z) = \prod_{j=1}^{q}\sin\frac{z-c_j}{a}, \quad \Pi_2(z) = \prod_{j=q+1}^{2p}\sin\frac{z-c_j}{a},$$

$$\Pi(z)=\Pi_1(z)\Pi_2(z)=\prod_{j=1}^{p}\sin\frac{z-a_j}{a}\sin\frac{z-b_j}{a}.$$

不计一个非零常数因子，可将典则函数改写为

$$X_0(z)=\cos^{p-q}\frac{z}{a}\sqrt{\frac{\Pi_1(z)}{\Pi_2(z)}},$$

其中根号可任取一支，并记

$$X_0^+(t)=\cos^{p-q}\frac{t}{a}\sqrt{\frac{\Pi_1(t)}{\Pi_2(t)}}.$$

这时 G_∞ 仍由(3.13)给出. 这样，我们可把(3.15)改写为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{\Pi_1(z)}{\Pi_2(z)}}\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}}f(t)\left(\frac{\cos\frac{z}{a}}{\cos\frac{t}{a}}\right)^{p-q}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Pi_1(z)}{\Pi_2(z)}}Q_{p-q}\left(\cos\frac{z}{a},\sin\frac{z}{a}\right),$$

其中 $Q_{p-q}(u,v)$ 是 u,v 的 $p-q$ 次任意齐次多项式. 为了简化上式，注意，

$$\left(\frac{\cos\frac{z}{a}}{\cos\frac{t}{a}}\right)^{p-q}=\left(\cos\frac{t-z}{a}+\sin\frac{t-z}{a}\tan\frac{t}{a}\right)^{p-q}$$

$$=\cos^{p-q}\frac{t-z}{a}+\cdots,$$

其中右端未写出部分为 $\cos\frac{t-z}{a}$ 与 $\sin\frac{t-z}{a}\tan\frac{t}{a}$ 的 $p-q$ 次齐次多项式. 再把后者化为 $\cos\frac{z}{a}$ 与 $\sin\frac{z}{a}$ 的 $p-q$ 次齐次多项式(以 t/a 的三角函数为系数)，代入上式的积分中，经合并后，上式可改写为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{\Pi_1(z)}{\Pi_2(z)}}\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}}f(t)\cos^{p-q}\frac{t-z}{a}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Pi_1(z)}{\Pi_2(z)}}Q_{p-q}\left(\cos\frac{z-z_0}{a},\sin\frac{z-z_0}{a}\right),\qquad(3.15)'$$

这里我们引进了一个任意固定点的位标 z_0，为的是使 $\frac{z-z_0}{a}$ 的形式不受坐标平移的影响(当然，如果要求形式简单些，不妨令 $z_0=0$).

现在还要求出

$$Q_{p-q}(u,v)=C_0u^{p-q}+C_1u^{p-q-1}v+\cdots+C_{p-q}v^{p-q}$$

的系数间的约束关系，使补充条件(3.10)成立. 容易算出

$$\Phi(+\infty \mathrm{i}) = \frac{X_0(+\infty \mathrm{i})}{2a\pi}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\frac{t}{a}} \mathrm{d}t + \frac{1}{2}X_0(+\infty \mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\frac{z_0}{a}} Q_{p-q}(1,\mathrm{i}),$$

$$\Phi(-\infty \mathrm{i}) = -\frac{X_0(-\infty \mathrm{i})}{2a\pi}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\frac{t}{a}} \mathrm{d}t + \frac{1}{2}X_0(-\infty \mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\frac{z_0}{a}} Q_{p-q}(1,-\mathrm{i}).$$

于是条件(3.10)成为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\frac{z_0}{a}} Q_{p-q}(1,\mathrm{i}) + G_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\frac{z_0}{a}} Q_{p-q}(1,-\mathrm{i}) = \frac{G_\infty}{a\pi}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\frac{t}{a}} \mathrm{d}t - \frac{1}{a\pi}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\frac{t}{a}} \mathrm{d}t,$$

或即

$$\cos\left[(p-q)\frac{z_0}{a}+\frac{\gamma\pi}{2}\right](C_0-C_2+C_4-\cdots) - \sin\left[(p-q)\frac{z_0}{a}+\frac{\gamma\pi}{2}\right](C_1-C_3+C_5-\cdots) = -\frac{1}{a\pi \mathrm{i}}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t)\cos\left[(p-q)\frac{t}{a}+\frac{\gamma\pi}{2}\right]\mathrm{d}t. \tag{3.20}$$

为了得到 $\varphi(t_0)$ 的表达式，注意(3.15)′中积分号下的核函数

$$\cos^{p-q}\frac{t-z}{a}\cot\frac{t-z}{a} = \frac{a}{t-z}+\cdots,$$

右端未写出部分当 z 趋于 L 上的点时已无奇异性，故由 Plemelj 公式，得

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{a\pi \mathrm{i}}\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t)\cos^{p-q}\frac{t-t_0}{a}\cot\frac{t-t_0}{a}\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}} Q_{p-q}\left(\cos\frac{t_0-z_0}{a},\sin\frac{t_0-z_0}{a}\right). \tag{3.21}$$

此式以及(3.20)都不受坐标平移的影响. 故得

定理5.3.1 当 $\kappa = p-q > 0$ 时，反演问题(3.7)在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中的一般解以(3.21)给出，其中 Q_{p-q} 为 $p-q$ 次齐次多项式，其系数满足条件(3.20)，故一般解中实际上只含 $p-q$ 个独立的任意常数.

2° $\kappa = p-q = 0$，即 $q = p$. 这时 $\Phi(z)$ 仍以(3.15)给出，但 $P_0 = C_0$ 为一常数. 这时(3.17)′成为

$$C_0 \cos \frac{\gamma\pi}{2} = f_* \sin \frac{\gamma\pi}{2}. \tag{3.22}$$

由此可见，如果 γ 不是奇(实)数，则应取

$$C_0 = f_* \tan \frac{\gamma\pi}{2},$$

于是原反演问题(3.7)在 h 类中有唯一解

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{a\pi i}\sqrt{\frac{R_1(t_0)}{R_2(t_0)}}\int_L \sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}} f(t) \cot \frac{t-t_0}{a}\, dt + f_* \tan \frac{\gamma\pi}{2}\sqrt{\frac{R_1(t_0)}{R_2(t_0)}}. \tag{3.23}$$

现设 γ 是一奇数，由(3.22)，如果这时 $f_* \neq 0$，则原问题无解；如果 $f_* = 0$，则 C_0 可任意，而反演问题有一般解

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{a\pi i}\sqrt{\frac{R_1(t_0)}{R_2(t_0)}}\int_L \sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}} f(t) \cot \frac{t-t_0}{a}\, dt + C\sqrt{\frac{R_1(t_0)}{R_2(t_0)}}. \tag{3.24}$$

或者，改写为与坐标平移无关的形式，则可得：如果 γ 不是奇数(γ 在坐标平移下不变)，则问题有唯一解

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{a\pi i}\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t) \cot \frac{t-t_0}{a}\, dt + f'_* \tan \frac{\gamma\pi}{2}\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}}, \tag{3.25}$$

其中

$$f'_* = \frac{1}{a\pi i}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t)\, dt. \tag{3.26}$$

如果 γ 是奇数，而若 $f'_* \neq 0$，则问题无解；而若 $f'_* = 0$，则问题有一般解

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{a\pi i}\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t) \cot \frac{t-t_0}{a}\, dt + C\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}}, \tag{3.27}$$

其中 C 为任意常数.

于是我们有

定理 5.3.2 当 $q = p$ 时，如果 γ 不是奇数，则反演问题(3.7)在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中有唯一解(3.25)或即(3.23)；如果 γ 是奇数，而 f'_*(或 f_*) $= 0$，则它有一般解(3.27)或即(3.24)，而若 f'_*(或 f_*) $\neq 0$，则问题无解.

此外还可注意，如果考虑的是 $h(a_1,a_2,\cdots,a_p)$ 类，这时

$$\gamma=\frac{1}{a\pi}\sum_{j=1}^{p}(a_j-b_j);$$

而对于其相联类 $h'=h(b_1,b_2,\cdots,b_p)$，则其相应的

$$\gamma'=\frac{1}{a\pi}\sum_{j=1}^{p}(b_j-a_j)=-\gamma.$$

因此 γ,γ' 同时为奇数或否. 这一点特别值得注意. 对于任意二相联类也有类似情况.

3° $\kappa=p-q<0$. 这时问题(3.9) 当且仅当

$$\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)\frac{\sin^{j-1}\frac{t}{a}}{\cos^{j+1}\frac{t}{a}}\mathrm{d}t=0,\quad j=1,2,\cdots,q-p+1 \tag{3.28}$$

成立时(当 $p-q=-1$ 时此条件消失)在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中可解，且其唯一解为(参看 4.4.2 段)

$$\Phi(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)\left(\cot\frac{t-z}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t.$$

这时补充条件(3.10) 容易看出为

$$\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)\left[(1+G_\infty)\tan\frac{t}{a}+\mathrm{i}(1-G_\infty)\right]\mathrm{d}t=0.$$

利用(3.13) 式，不难把上式改写为

$$\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)\frac{\sin\left(\frac{t}{a}-\frac{\gamma\pi}{2}\right)}{\cos\frac{t}{a}}\mathrm{d}t=0. \tag{3.29}$$

当条件(3.28),(3.29) 满足时，原反演问题在 h 类中有唯一解

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{R_1(t_0)}{R_2(t_0)}}\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)\left(\cot\frac{t-t_0}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t.$$

条件(3.28),(3.29) 还可改写如下：首先，根据 $R_1(t),R_2(t)$ 的意义，它们可分别改写为

$$\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}}f(t)\sin^{q-p-j-2}\frac{t}{a}\cos^j\frac{t}{a}\,\mathrm{d}t=0,$$

$$j=0,1,\cdots,q-p-2, \tag{3.28$'$}$$

$$\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}}f(t)\cos^{q-p-1}\frac{t}{a}\sin\left(\frac{t}{a}-\frac{\gamma\pi}{2}\right)\mathrm{d}t=0.$$

把后一式中的 $\cos^{q-p-1}\dfrac{t}{a}$ 移一个因子与后面的相乘，改为加法，并利用(3.28)′化简，然后再移一个因子到后面，同样处理，这样逐步做下去，最后便可把后面这条件改写为

$$\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t)\sin\left[(q-p)\frac{t}{a}-\frac{\gamma\pi}{2}\right]\mathrm{d}t=0. \tag{3.29)'$$

但 $q-p=1$ 时，必须认为(3.28)′消失.

注意，条件(3.28)′还可改写为

$$\left.\begin{aligned}&\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t)\cos^j\frac{t}{a}\,\mathrm{d}t=0,\\ &\qquad\qquad j=q-p-2,q-p-4,\cdots,\ j\geqslant 0;\\ &\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t_0)}{\Pi_1(t_0)}} f(t)\cos^j\frac{t}{a}\sin\frac{t}{a}\,\mathrm{d}t=0,\\ &\qquad\qquad j=q-p-3,q-p-5,\cdots,\ j\geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{3.28)''$$

这时，唯一解可改写为

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t)\left[\frac{\cos\frac{t}{a}}{\cos\frac{t_0}{a}}\right]^{q-p}\left(\cot\frac{t-t_0}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t. \tag{3.30}$$

注意

$$\left[\frac{\cos\frac{t}{a}}{\cos\frac{t_0}{a}}\right]^2\left(\cot\frac{t-t_0}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)=\frac{\cos\frac{t}{a}}{\cos\frac{t_0}{a}\sin\frac{t-t_0}{a}}=\cot\frac{t-t_0}{a}-\tan\frac{t_0}{a},$$

因此，如果 $q-p>1$，则利用条件(3.28)″，可把 $\varphi(t_0)$ 的表达式改写为

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t)\left[\frac{\cos\frac{t}{a}}{\cos\frac{t_0}{a}}\right]^{q-p-2}\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t.$$

如果 $q-p>3$，则在上式右边积分号下把 $\cot\dfrac{t-t_0}{a}$ 改为添加一项 $\tan\dfrac{t}{a}$，这由(3.28)″并不使 $\varphi(t_0)$ 受到影响，然后再如上处理. 如此继续做下去，最后可知：当 $q-p$ 为偶数时，可得

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}}\int_L \sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}} f(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t; \tag{3.30)'$$

当 $q-p$ 为奇数时，可得

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi i}\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}}\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}}f(t)\,\frac{\cos\frac{t}{a}}{\cos\frac{t_0}{a}}\cot\frac{t-t_0}{a}\,dt.$$

但

$$\frac{\cos\frac{t}{a}}{\cos\frac{t_0}{a}}\cot\frac{t-t_0}{a}=\cos\frac{t-t_0}{a}\cot\frac{t-t_0}{a}-\cos\frac{t-t_0}{a}\tan\frac{t_0}{a},$$

再利用(3.28)″，最后可得：当 $q-p$ 为奇数时，

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi i}\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}}\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}}f(t)\cos\frac{t-t_0}{a}\cot\frac{t-t_0}{a}\,dt.\quad(3.30)''$$

(3.30)′与(3.30)″的形式已不受坐标平移影响；同样，条件(3.28)′或(3.28)″以及(3.29)′也不受这种影响. 总之，我们有

定理5.3.3 当 $\kappa=p-q<0$ 时，原反演问题(3.7)在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中当且仅当 $q-p$ 个条件(3.28)′或(3.28)″以及(3.29)′(或者，条件(3.28)与(3.29))同时成立时(当 $p-q=-1$ 时没有前一条件)可解，且有唯一解(3.30)，也可写成(3.30)′或(3.30)″，随 $p-q$ 为偶数或奇数而定.

注 可以证明，(3.30)″中积分号下因子 $\cos\frac{t-t_0}{a}\cot\frac{t-t_0}{a}$ 还可改为 $\csc\frac{t-t_0}{a}$.

还可注意，当 $p-q<0$ 时，如果原问题在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中可解，则这个解还可写成

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi i}\sqrt{\frac{R_1^*(t_0)}{R_2^*(t_0)}}\int_L\sqrt{\frac{R_2^*(t)}{R_1^*(t)}}f(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,dt\quad(3.31)$$

或

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi i}\sqrt{\frac{\Pi_1^*(t_0)}{\Pi_2^*(t_0)}}\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2^*(t)}{\Pi_1^*(t)}}f(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,dt,\quad(3.31)'$$

其中

$$R_1^*(t)=\prod_{j=1}^{p}\left(\tan\frac{t}{a}-\tan\frac{c_j^*}{a}\right),$$

$$R_2^*(t)=\prod_{j=p+1}^{2p}\left(\tan\frac{t}{a}-\tan\frac{c_j^*}{a}\right),$$

$$\Pi_1^*(t)=\prod_{j=1}^{p}\sin\frac{t-c_j^*}{a},\quad \Pi_2^*(t)=\prod_{j=p+1}^{2p}\sin\frac{t-c_j^*}{a},$$

这里$\{c_j^*\}_1^p$是$\{c_j\}_1^q$中的任意p个端点，而$\{c_j^*\}_{p+1}^{2p}$为其余的端点，且根式任意地取定一支. 这是因为，问题既在$h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$中可解(且解必唯一)，当然也在$h(c_1^*,c_2^*,\cdots,c_p^*)$中可解，而(3.31)或(3.31)$'$由定理5.3.2知确是问题在后一类中的解，且由(3.24)或(3.27)$'$知，它同时还是$h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$中的唯一解.

如果在(3.31)(或(3.31)$'$)中，逐步把$R_2^*(t)$(或$\Pi_2^*(t)$)中的因子一一移入$R_1^*(t)$(或$\Pi_1^*(t)$)中，并利用可解性条件，便可获得(3.30)(或(3.30)$'$)与(3.30)$''$).

与5.1.1段中的注相似，本段所述，对于$f\in h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$也完全适用.

5.3.3 实轴上的Hilbert核积分的反演

本段考虑在应用中特别常见的特例：积分曲线在实轴上时Hilbert核积分的反演.

设$L=\sum_{j=1}^{p}L_j$由实轴上p条无公共点的线段$L_j=\overline{a_jb_j}$组成，L_j在L_{j+1}的左边(即$a_{j+1}>b_j$)，且它们位于同一周期区间内：

$$|x|<\frac{1}{2}a\pi,\quad x\in L,$$

又取定其正向与x轴的正向相同. 我们考虑下一反演问题：

$$\frac{1}{a\pi}\int_L\varphi(x)\cot\frac{x-x_0}{a}\,\mathrm{d}x=f(x_0),\quad x_0\in L,\tag{3.32}$$

其中$f(x)\in H$，而要求$\varphi\in h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$. 当然，如上段末指出的，当$f\in h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$时，以下所论也都成立.

注意(3.32)与(3.7)相比较，左边少了一个因子$1/\mathrm{i}$. 这样，我们不妨设$f(x)$与$\varphi(x)$都是实函数.

这时，我们把(3.12)中$X(z)$改写如下较为方便：

$$X(z)=\frac{R_1(z)}{\sqrt{R(z)}},\tag{3.33}$$

并不妨设$\sqrt{R(z)}$已在沿L剖开的周期带中取定一支，使

$$X^+(x)=\frac{\varepsilon(x)R_1(x)}{\mathrm{i}\sqrt{|R(x)|}},\quad x\in L,\tag{3.34}$$

其中$\varepsilon(x)=(-1)^k$，当$x\in L_k$ $(k=1,2,\cdots,p)$.

我们来说明(3.34)式. 记住

$$R(z)=\prod_{j=1}^{p}\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{a_j}{a}\right)\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{b_j}{a}\right).$$

令 $\zeta=\tan\frac{z}{a}$，则 $L_j=\overline{a_jb_j}$ 变成 ζ 平面中实 ξ 轴上的区间

$$\Lambda_j=\overline{\alpha_j\beta_j},\quad \alpha_j=\tan\frac{a_j}{a},\ \beta_j=\tan\frac{b_j}{a},$$

且 $\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_p$ 自左至右排列，z 的上半平面映射到 ζ 的上半平面. 在沿 L 剖开的 z 平面上 $\sqrt{R(z)}$ 取定一分支就相当于沿 Λ 剖开的 ζ 平面上 $\sqrt{P(\zeta)}$ 取定一分支，这里

$$\Lambda=\sum_{j=1}^{p}\Lambda_j,\quad P(\zeta)\ (=R(z))=\prod_{j=1}^{p}(\zeta-\alpha_j)(\zeta-\beta_j).$$

设这一支取的是：当 $\zeta\to+\infty$ 时，$\arg(\zeta-\alpha_j),\arg(\zeta-\beta_j)$ 均 $\to 0$，因此当 ζ 从上半平面趋于 ξ 轴上某点 $\xi\in\Lambda_k$ 时，若 $j<k$ 则 $\arg(\zeta-\alpha_j)(\zeta-\beta_j)\to 0$，若 $j=k$ 则 $\arg(\zeta-\alpha_k)\cdot(\zeta-\beta_k)\to\pi$，若 $j>k$ 则 $\arg(\zeta-\alpha_j)(\zeta-\beta_j)\to 2\pi$，因此这时 $\arg P(\zeta)\to\pi+2(p-k)\pi$，从而 $\sqrt{P(\zeta)}$ 的辐角趋于 $\frac{\pi}{2}+(p-k)\pi$. 亦即，

$$\lim_{\substack{\zeta\to\xi\\ \operatorname{Im}\zeta>0}}\sqrt{P(\zeta)}=\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-k)\pi}\sqrt{|P(\xi)|}=\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\pi}\varepsilon(\xi)\sqrt{|P(\xi)|},\quad 当\ \xi\in\Lambda_k,$$

其中 $\varepsilon(\xi)=(-1)^k$ 当 $\xi\in\Lambda_k$，回到 z 平面，就有

$$\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im}z>0}}\sqrt{R(z)}=\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\pi}\varepsilon(x)\sqrt{|R(x)|},\quad 当\ x\in L_k.$$

但 $X(z)$ 可相差一非零常数因子，因此 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\pi}$ 可删去，由此即得(3.34)式.

于是由上段结果可知：

1° 当 $p-q>0$ 时，反演问题(3.32)在 $h=h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中的一般解为

$$\varphi(x_0)=-\frac{\varepsilon(x_0)R_1(x_0)}{a\pi\sqrt{|R(x_0)|}}\int_L\frac{\varepsilon(x)\sqrt{|R(x)|}}{R_1(x)}f(x)\cot\frac{x-x_0}{a}\,\mathrm{d}x$$
$$+\frac{\varepsilon(x_0)R_1(x_0)}{\sqrt{|R(x_0)|}}P_{p-q}\left(\tan\frac{x_0}{a}\right),\tag{3.35}$$

其中 P_{p-q} 为 $p-q$ 次实系数多项式，满足类似于(3.17)的条件

$$P_{p-q}(\mathrm{i})+G_\infty P_{p-q}(-\mathrm{i})=-\mathrm{i}(G_\infty-1)f_0^*,\tag{3.36}$$

其中 f_0^* 为一已知实数：

$$f_0^*=\frac{1}{a\pi}\int_L\frac{\varepsilon(x)\sqrt{|R(x)|}}{R_1(x)}f(x)\,\mathrm{d}x.\tag{3.37}$$

条件(3.36)还可按 $p-q$ 为偶数或奇数的不同改写如下：设

$$P_{p-q}(w)=A_0+A_1w+\cdots+A_{p-q}w^{p-q}\quad(A_j\ 为实数),$$

则(3.36)成为

$$-\cos\frac{\gamma\pi}{2}(A_0-A_2+A_4-\cdots)+\sin\frac{\gamma\pi}{2}(A_1-A_3+A_5-\cdots)=f_0^*\sin\frac{\gamma\pi}{2}. \tag{3.36$'$}$$

注意，在现在的情况下，γ 是一实数.

也可把解以及 P_{p-q} 的系数间条件写成与坐标平移无关的形式. 取

$$X_0(z)=\frac{\Pi_1(z)}{\sqrt{\Pi(z)}}\cos^{p-q}\frac{z}{a}, \tag{3.33$'$}$$

并取定这样一支，使得

$$X_0^+(x)=\frac{\varepsilon(x)\Pi_1(x)}{\mathrm{i}\sqrt{|\Pi(x)|}}\cos^{p-q}\frac{x}{a},\quad x\in L. \tag{3.34$'$}$$

故由(3.21)，上述一般解可改写为

$$\begin{aligned}\varphi(x_0)=&-\frac{\varepsilon(x_0)\Pi_1(x_0)}{a\pi\sqrt{|\Pi(x_0)|}}\int_L\frac{\varepsilon(x)\sqrt{|\Pi(x)|}}{\Pi_1(x)}f(x)\cos^{p-q}\frac{x-x_0}{a}\cot\frac{x-x_0}{a}\,\mathrm{d}x\\&+\frac{\varepsilon(x_0)\Pi_1(x_0)}{\sqrt{|\Pi(x_0)|}}Q_{p-q}\left(\cos\frac{x_0-x^*}{a},\sin\frac{x_0-x^*}{a}\right),\end{aligned} \tag{3.35$'$}$$

其中 x^* 为任何实数，而

$$Q_{p-q}(u,v)=A_0u^{p-q}+A_1u^{p-q-1}v+\cdots+A_{p-q}v^{p-q}$$

的实系数要满足下列条件：

$$\begin{aligned}&-\cos\left[\frac{\gamma\pi}{2}+(p-q)\frac{x^*}{a}\right](A_0-A_2+A_4-\cdots)\\&+\sin\left[\frac{\gamma\pi}{2}+(p-q)\frac{x^*}{a}\right](A_1-A_3+A_5-\cdots)\\&=\frac{1}{a\pi}\int_L\frac{\varepsilon(x)\sqrt{|\Pi(x)|}}{\Pi_1(x)}f(x)\sin\left[\frac{\gamma\pi}{2}+(p-q)\frac{x}{a}\right]\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.38}$$

2° 当 $q=p$ 时，若 γ 不是奇数，则原反演问题有唯一解

$$\begin{aligned}\varphi(x_0)=&-\frac{\varepsilon(x_0)R_1(x_0)}{a\pi\sqrt{|R(x_0)|}}\int_L\frac{\varepsilon(x)\sqrt{|R(x)|}}{R_1(x)}f(x)\cot\frac{x-x_0}{a}\,\mathrm{d}x\\&-f_0^*\tan\frac{\gamma\pi}{2}\frac{\varepsilon(x_0)R_1(x_0)}{\sqrt{|R(x_0)|}},\end{aligned} \tag{3.39}$$

或者写成

$$\begin{aligned}\varphi(x_0)=&-\frac{\varepsilon(x_0)\Pi_1(x_0)}{a\pi\sqrt{|\Pi(x_0)|}}\int_L\frac{\varepsilon(x)\sqrt{|\Pi(x)|}}{\Pi_1(x)}f(x)\cot\frac{x-x_0}{a}\,\mathrm{d}x\\&-\tilde{f}_0^*\tan\frac{\gamma\pi}{2}\frac{\varepsilon(x_0)\Pi_1(x_0)}{\sqrt{|\Pi(x_0)|}},\end{aligned} \tag{3.39$'$}$$

其中

$$\widetilde{f}_0^* = \frac{1}{a\pi}\int_L \frac{\varepsilon(x)\sqrt{|\Pi(x)|}}{\Pi_1(x)} f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.37$'$}$$

若 γ 为一奇数，而 $f_0^* \neq 0$ 或即 $\widetilde{f}_0^* \neq 0$，则原反演问题无解；而若 $f_0^* = 0$ 或即 $\widetilde{f}_0^* = 0$，则有一般解

$$\varphi(x_0) = -\frac{\varepsilon(x_0)R_1(x_0)}{a\pi\sqrt{|R(x_0)|}}\int_L \frac{\varepsilon(x)\sqrt{|R(x)|}}{R_1(x)} f(x)\cot\frac{x-x_0}{a}\,\mathrm{d}x + \frac{A\varepsilon(x_0)R_1(x_0)}{\sqrt{|R(x_0)|}}, \tag{3.40}$$

或即

$$\varphi(x_0) = -\frac{\varepsilon(x_0)\Pi_1(x_0)}{a\pi\sqrt{|\Pi(x_0)|}}\int_L \frac{\varepsilon(x)\sqrt{|\Pi(x)|}}{\Pi_1(x)} f(x)\cot\frac{x-x_0}{a}\,\mathrm{d}x + \frac{A\varepsilon(x_0)\Pi_1(x_0)}{\sqrt{|\Pi(x_0)|}}, \tag{3.40$'$}$$

其中 A 为任意实常数.

特别，如果是在 $h(a_1,a_2,\cdots,a_p)$ 类或其相联类 $h' = h(b_1,b_2,\cdots,b_p)$ 中求解，上段中已见，相应地，$\gamma' = -\gamma$，且不会是奇数($0<\gamma<1$)，故知在这两类中反演问题都有唯一解. 在任何$h(c_1,c_2,\cdots,c_p)$ 类中求解时也有相同的结论.

3° 当 $p-q<0$ 时，当且仅当条件

$$\int_L \frac{\varepsilon(x)\sqrt{|\Pi(x)|}}{\Pi_1(x)} f(x)\sin^{q-p-2-j}\frac{x}{a}\cos^j\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = 0, \quad j = 0,1,\cdots,q-p-2, \tag{3.41}$$

$$\int_L \frac{\varepsilon(x)\sqrt{|\Pi(x)|}}{\Pi_1(x)} f(x)\sin\left[(q-p)\frac{x}{a} - \frac{\pi}{2}(\gamma+q-p)\right]\mathrm{d}x = 0 \tag{3.42}$$

成立时($p-q=-1$ 时条件(3.41) 消失)，原反演问题有唯一解

$$\varphi(x_0) = -\frac{\varepsilon(x_0)R_1(x_0)}{a\pi\sqrt{|R(x_0)|}} \cdot \int_L \frac{\varepsilon(x)\sqrt{|R(x)|}}{R_1(x)} f(x)\left(\cot\frac{x-x_0}{a} + \tan\frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x, \tag{3.43}$$

或者写成：当 $p-q$ 为偶数时，

$$\varphi(x_0) = -\frac{\varepsilon(x_0)\Pi_1(x_0)}{a\pi\sqrt{|\Pi(x_0)|}}\int_L \frac{\varepsilon(x)\sqrt{|\Pi(x)|}}{\Pi_1(x)} f(x)\cot\frac{x-x_0}{a}\,\mathrm{d}x; \tag{3.43$'$}$$

当 $q-p$ 为奇数时，

$$\varphi(x_0) = -\frac{\varepsilon(x_0)\Pi_1(x_0)}{a\pi\sqrt{|\Pi(x_0)|}} \cdot \int_L \frac{\varepsilon(x)\sqrt{|\Pi(x)|}}{\Pi_1(x)} f(x)\cos\frac{x-x_0}{a}\cot\frac{x-x_0}{a}\,\mathrm{d}x. \quad (3.43)''$$

这时解还可写成(3.31) 或(3.31)′ 的形式，这里从略.

5.3.4 修改的反演问题

现设 L 及其他记号均同 5.3.2 段. 前已看到，当 $q>p$ 时，反演问题(3.7) 在 $h=h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中一般无解. 当 $q=p$ 时，如果 γ 不是奇数，则这一反演问题有唯一解，而若 γ 是奇数，则问题无解. 在问题无解的情况下，我们可以来求解所谓**修改的反演问题**. 下面分几种情况讨论.

1° 设 $q=p$. 于是设 γ 是一奇数. 我们要在 $h=h(c_1,c_2,\cdots,c_p)$ 中求解

$$\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L \varphi(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t = f(t_0)+C_0,\quad t_0\in L, \tag{3.44}$$

其中 $f(t)\in H_0$ (或 $h(c_1,c_2,\cdots,c_p)$)，而 C_0 为一待定常数.

首先注意，这时

$$\Pi_1(z)=\prod_{j=1}^{p}\sin\frac{z-c_j}{a},\quad \Pi_2(z)=\prod_{j=p+1}^{2p}\sin\frac{z-c_j}{a}.$$

容易算出，

$$X_0(+\infty\mathrm{i}) = \sqrt{\frac{\Pi_1(z)}{\Pi_2(z)}}\Bigg|_{z\to+\infty\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\gamma\pi\mathrm{i}} \tag{3.45}$$

(根式已适当选取分支)，随之

$$X_0(-\infty\mathrm{i}) = G_\infty X_0(+\infty\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma\pi\mathrm{i}}. \tag{3.46}$$

现 γ 是一奇数，由定理 5.3.2 知，(3.44) 在 h 类中可解的充要条件为

$$\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}}[f(t)+C_0]\mathrm{d}t = 0,$$

亦即

$$f_*' + \frac{C_0}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}}\mathrm{d}t = 0, \tag{3.47}$$

其中 f_*' 由(3.26) 给出.

我们来计算上式中的积分

$$I = \frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}}\mathrm{d}t.$$

为此，对每一L_j $(j=1,2,\cdots,p)$ 用一充分与它接近的光滑封闭曲线 Λ_j 把它包围起来，并使各Λ_j 彼此不相交；再作周期带中两条长为 $a\pi$ 的水平直线段 Λ_+，Λ_-，使 $\Lambda=\sum_{j=1}^{p}\Lambda_j$ 夹在它们中间(图 5-2). 注意到 I 中被积函数是以$a\pi$为周期的函数，易见

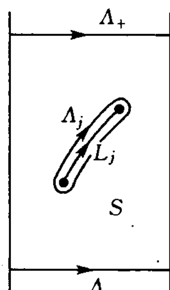


图 5-2

$$I=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{\Lambda}\sqrt{\frac{\Pi_2(\zeta)}{\Pi_1(\zeta)}}\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\left(\int_{\Lambda_+}-\int_{\Lambda_-}\right).$$

令 $\Lambda_{\pm}\to\pm\infty\mathrm{i}$，利用(3.45)，(3.46) 式，便得

$$I=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{X_0(+\infty\mathrm{i})}-\frac{1}{X_0(-\infty\mathrm{i})}\right]=-\sin\frac{\gamma\pi}{2}.$$

因 γ 为奇数，$\sin\frac{\gamma\pi}{2}\neq0$，故由(3.47) 知，

$$C_0=\frac{f'_*}{\sin\frac{\gamma\pi}{2}}.\tag{3.48}$$

若 $f'_*=0$，则 $C_0=0$，这就回到了以前讨论过的情况. 在一般情形下，问题(3.44)，由(3.27)，其一般解为

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}}\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}}[f(t)+C_0]\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t$$

$$+C\sqrt{\frac{\Pi_1(t_0)}{\Pi_2(t_0)}},\tag{3.49}$$

其中 C 为任意常数. 为了简化此式，应算出

$$J_0(t_0)=\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\sqrt{\frac{\Pi_2(t)}{\Pi_1(t)}}\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t,\quad t_0\in L,\tag{3.50}$$

由后面的计算(参看 p. 393 中的底注)，可知它是一常数. 因此经合并后，(3.49) 仍可化为(3.27) 的形式.

于是我们得到

定理 5.3.4 当 $q=p$ 时，若 γ 是一奇数，当且仅当(3.44) 中的 C_0 取成(3.48) 时，问题(3.44) 在 h 类中可以反演，且一般解以(3.27) 给出.

2° 设 $q>p$. 这时我们考虑下式在 h 类中的反演：

$$\frac{1}{a\pi i}\int_L \varphi(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,dt = f(t_0)+P\left(\tan\frac{t_0}{a}\right),\quad t_0\in L,\qquad (3.51)$$

其中 $f(t)$ 如前，而 $P(\zeta)$ 为一待定系数的 $q-p-1$ 次多项式.

我们先证明，如果问题(3.51) 可解，则 $P(\zeta)$ 必唯一，且解 $\varphi(t)$ 也唯一. 为此只须证明，如果

$$\frac{1}{a\pi i}\int_L \varphi(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,dt = P\left(\tan\frac{t_0}{a}\right),\quad t_0\in L\qquad (3.52)$$

可解，则必 $P\equiv 0$，且 $\varphi(t)=0$.

今设(3.52) 在 h 类中有解，则由(3.31) 知，这个解可写成

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi i}\sqrt{\frac{R_1^*(t_0)}{R_2^*(t_0)}}\int_L\sqrt{\frac{R_2^*(t)}{R_1^*(t)}}P\left(\tan\frac{t}{a}\right)\cot\frac{t-t_0}{a}\,dt,$$
$$t_0\in L.\qquad (3.53)$$

如果令

$$J(t_0)=\frac{1}{a\pi i}\int_L\sqrt{\frac{R_2^*(t)}{R_1^*(t)}}P\left(\tan\frac{t}{a}\right)\cot\frac{t-t_0}{a}\,dt,\quad t_0\in L,$$

$$\Omega(z)=\frac{1}{a\pi i}\int_L\sqrt{\frac{R_2^*(t)}{R_1^*(t)}}P\left(\tan\frac{t}{a}\right)\cot\frac{t-z}{a}\,dt,\quad z\overline{\in} L,$$

则有

$$J(t_0)=\frac{1}{2}[\Omega^+(t_0)+\Omega^-(t_0)].$$

于是，为了算出 $J(t_0)$，只要能算出 $\Omega(z)$. 在周期带 S 中任意固定 $z\overline{\in} L$. 仍取 Λ_j 与 $\Lambda_\pm$ 如图 5-2，但要求各 Λ_j 都不把 z 包含在其所围的内域中. 这样，易知

$$\Omega(z)=\frac{1}{2a\pi i}\int_\Lambda\sqrt{\frac{R_2^*(t)}{R_1^*(t)}}P\left(\tan\frac{t}{a}\right)\cot\frac{t-z}{a}\,dt,\quad \Lambda=\sum_{j=1}^{p}\Lambda_j.$$

为了求出它来，只要令 $\zeta=\tan\dfrac{t}{a}$ 把它变到 ζ 平面上的积分. 设这时 Λ 变为 Γ，$w=\tan\dfrac{z}{a}$，$R_j^*(t)$ 变为 $Q_j(\zeta)$ $(j=1,2)$，于是

$$\Omega(z)\equiv\Omega_0(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\sqrt{\frac{Q_2(\zeta)}{Q_1(\zeta)}}P(\zeta)\,\frac{1+\zeta w}{1+\zeta^2}\,\frac{d\zeta}{\zeta-w},$$

且积分是沿 Γ 的顺时针向进行的. 利用留数定理，容易算得

$$\Omega_0(w)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q_2(i)}{Q_1(i)}}P(i)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q_2(-i)}{Q_1(-i)}}P(-i)$$
$$+\sqrt{\frac{Q_2(w)}{Q_1(w)}}P(w)+P_*(w),$$

其中 $P_*(w)$ 为 w 的某个 $q-p-1$ 次多项式，其系数为 $P(w)$ 的系数的线性

齐次式. 如果令

$$X^*(z)=\sqrt{\frac{R_1^*(z)}{R_2^*(z)}},$$

回到 z 平面，则得

$$\Omega(z)=-\frac{1}{2}\left[\frac{P(\mathrm{i})}{X^*(+\infty\mathrm{i})}+\frac{P(-\mathrm{i})}{X^*(-\infty\mathrm{i})}\right]+\frac{P\left(\tan\frac{z}{a}\right)}{X^*(z)}+P_*\left(\tan\frac{z}{a}\right),$$

因此，

$$J(t_0)=-\frac{1}{2}\left[\frac{P(\mathrm{i})}{X^*(+\infty\mathrm{i})}+\frac{P(-\mathrm{i})}{X^*(-\infty\mathrm{i})}\right]+P_*\left(\tan\frac{t_0}{a}\right),\qquad(3.54)$$

亦即，$J(t_0)$ 是 $\tan\frac{t_0}{a}$ 的某个 $q-p-1$ 次多项式①.

由(3.53)，

$$\varphi(t_0)=J(t_0)\sqrt{\frac{R_1^*(t_0)}{R_2^*(t_0)}},$$

且已知 $\varphi(t_0)\in h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$，而$\sqrt{R_1^*(t_0)/R_2^*(t_0)}$ 只在 $c_1,c_2,\cdots,c_q$ 中某 $q-p$ 个点处无界，故知 $J(t_0)$ 在这些点处必为 0，这些点又不彼此周期合同，因此，作为 $q-p-1$ 次多项式，必有 $J(t_0)=0$. 于是 $\varphi(t_0)=0$. 由(3.52)，又知 $P\equiv 0$. 故问题(3.51) 解的唯一性得证.

现证问题(3.51) 在 h 类中解的存在性. 由 5.3.2 段中 3° 知，此问题可解的充要条件是

$$\left.\begin{aligned}&\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}\left[f(t)+P\left(\tan\frac{t}{a}\right)\right]\frac{\sin^{j-1}\frac{t}{a}}{\cos^{j+1}\frac{t}{a}}\,\mathrm{d}t=0,\\&\qquad\qquad j=1,2,\cdots,q-p-1,\\&\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}\left[f(t)+P\left(\tan\frac{t}{a}\right)\right]\frac{\sin\left[\frac{t}{a}-\frac{\pi}{2}(\gamma+q-p)\right]}{\cos\frac{t}{a}}\,\mathrm{d}t=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3.55)$$

(3.55) 是多项式 $P(\zeta)$ 的系数 $C_0,C_1,\cdots,C_{q-p-1}$ 的一个线方程组. 当

---

① 当 $q=p$ 时，$P_*\equiv 0$. 于是

$$J(t_0)=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{X^*(+\infty\mathrm{i})}+\frac{1}{X^*(-\infty\mathrm{i})}\right].$$

注意，(3.50) 中定义的 $J_0(t_0)$ 只与 $J(t_0)$ 相差一常数因子(当 $c_j^*=c_j$, $j=1,2,\cdots,p$).

$f(t)\equiv 0$时亦即此线方程组的自由项为0时，由前所证，它只有零解，故此方程组的系数行列式不为0，从而对任何$f(t)$必有唯一解.

当$P(\zeta)$取定满足(3.55)后，问题(3.51)的唯一解由(3.30)为

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi \mathrm{i}}\sqrt{\frac{R_1(t_0)}{R_2(t_0)}}$$
$$\cdot\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}\left[f(t)+P\left(\tan\frac{t}{a}\right)\right]\left(\cot\frac{t-t_0}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t.$$

为了简化此式，应算出

$$\frac{1}{a\pi \mathrm{i}}\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}P\left(\tan\frac{t}{a}\right)\left(\cot\frac{t-t_0}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t.$$

这可与前面计算$J(t_0)$的方法类似地进行，但要注意，当$t\to\frac{1}{2}a\pi$时，$\sqrt{R_2(t)/R_1(t)}$与$\cot^{q-p}\frac{t}{a}$为同阶无穷小，因而容易算出它为一常数. 因此，(3.51)的解可写为

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{a\pi \mathrm{i}}\sqrt{\frac{R_1(t_0)}{R_2(t_0)}}\left[\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)\left(\cot\frac{t-t_0}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t+C\right],\tag{3.56}$$

其中C为一待定常数.

为要决定$P\left(\tan\frac{t}{a}\right)$与$C$，令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\int_L\varphi(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t,\tag{3.57}$$

这里$\varphi(t)$由(3.56)给出，但其中C待定，且设它已是(3.51)的解. 于是

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=f(t_0)+P\left(\tan\frac{t_0}{a}\right).\tag{3.58}$$

再令

$$\Psi(z)=\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}\left[\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)\left(\cot\frac{t-z}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t+C\right],\tag{3.59}$$

于是易证

$$\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0)=\varphi(t_0),$$

从而

$$\Phi(z)=\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\int_\Lambda\Psi(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{\Lambda}\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L}\sqrt{\frac{R_2(t_1)}{R_1(t_1)}}f(t_1)\left(\cot\frac{t_1-t}{a}+\tan\frac{t_1}{a}\right)\mathrm{d}t_1\right]$$

$$+\frac{C}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{\Lambda}\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L}\sqrt{\frac{R_2(t_1)}{R_1(t_1)}}f(t_1)\mathrm{d}t_1$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{\Lambda}\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\left(\cot\frac{t_1-t}{a}+\tan\frac{t_1}{a}\right)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t\right]$$

$$+\frac{C}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{\Lambda}\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t. \tag{3.60}$$

先计算右边第一项中的里层积分：

$$\rho(z,t_1) = \frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{\Lambda}\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\left(\cot\frac{t_1-t}{a}+\tan\frac{t_1}{a}\right)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t.$$

仍令

$$w=\tan\frac{z}{a},\quad \zeta=\tan\frac{t}{a},\quad \zeta_1=\tan\frac{t_1}{a}.$$

设 Λ 的像为 Γ，Γ 也以顺时针向为正向，它围住 L 的像. 利用留数定理，可得

$$\rho(z,t_1)\equiv\rho_0(w,\zeta_1)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\sqrt{\frac{Q_1(\zeta)}{Q_2(\zeta)}}\,\frac{1+\zeta_1^2}{\zeta_1-\zeta}\,\frac{1+\zeta w}{1+\zeta^2}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-w}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q_1(\mathrm{i})}{Q_2(\mathrm{i})}}(\zeta_1+\mathrm{i})-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q_1(-\mathrm{i})}{Q_2(-\mathrm{i})}}(\zeta_1-\mathrm{i})$$

$$+\sqrt{\frac{Q_1(w)}{Q_2(w)}}\,\frac{1+\zeta_1^2}{\zeta_1-w}-Q(w,\zeta_1),$$

其中 $Q(w,\zeta_1)$ 是与被积函数在 $\zeta=\infty$ 处的留数有关的函数. 由于 $\rho_0(\infty,\zeta_1)$ 易见为 ζ_1 的多项式，故 $Q(w,\zeta_1)$ 与

$$\sqrt{\frac{Q_1(w)}{Q_2(w)}}\,\frac{1+\zeta_1^2}{\zeta_1-w}$$

的主部只差一个 ζ_1 的多项式，而这个主部易见为 w 的 $q-p-1$ 次多项式，以 ζ_1 的多项式为系数，故 $Q(w,\zeta_1)$ 也有类似性质. 于是可以写

$$\rho_0(w,\zeta_1)=\sqrt{\frac{Q_1(w)}{Q_2(w)}}\,\frac{1+\zeta_1^2}{\zeta_1-w}-Q^*(w,\zeta_1),$$

其中 $Q^*(w,\zeta_1)$ 是一完全确定的 $q-p-1$ 次的 w 的多项式，以 ζ_1 的多项式为

系数，回到 z 平面，故有

$$\rho(z,t_1)=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}\left(\cot\frac{t_1-z}{a}+\tan\frac{t_1}{a}\right)-Q^*\left(\tan\frac{z}{a},\tan\frac{t_1}{a}\right). \quad (3.61)$$

另一方面，用类似方法，可以算出

$$\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_L\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}-Q_*\left(\tan\frac{z}{a}\right), \quad (3.62)$$

其中 $Q_*(w)$ 为 $q-p$ 次多项式，其最高项系数为 1. 把(3.61) 与(3.62) 代入(3.60) 中，便得

$$\begin{aligned}\Phi(z)=&\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)\left(\cot\frac{t-z}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t\\&-\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)Q^*\left(\tan\frac{z}{a},\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t\\&+C\left[\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}-Q_*\left(\tan\frac{z}{a}\right)\right].\end{aligned} \quad (3.63)$$

由此便可算得

$$\begin{aligned}\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=&f(t_0)-\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)Q^*\left(\tan\frac{t_0}{a},\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t\\&-2CQ_*\left(\tan\frac{t_0}{a}\right).\end{aligned} \quad (3.64)$$

与(3.58) 相比较，可知应取 $C=0$ 以及

$$P\left(\tan\frac{t_0}{a}\right)=-\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\sqrt{\frac{R_2(t)}{R_1(t)}}f(t)Q^*\left(\tan\frac{t_0}{a},\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t. \quad (3.65)$$

这样，问题(3.51) 的唯一解仍以(3.30) 给出.

于是我们得到

定理 5.3.5 当 $q>p$ 时，修改的反演问题(3.51) 在 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类中有唯一解(3.30)，但这时 $P\left(\tan\frac{t_0}{a}\right)$ 以(3.65) 给出，其中 $Q^*(u,v)$ 为某一确定的多项式，对 u 来说次数为 $q-p-1$.

3° 特别，如果 $q=2p$，则修改的反演问题除(3.51) 外，还可有另一种提法：

$$\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\varphi(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t=f(t_0)+C_j,\quad t_0\in L_j,\ j=1,2,\cdots,p, \quad (3.66)$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_p$ 为待定常数.

这一问题在唯一地适当选取常数C_j $(j=1,2,\cdots,p)$ 后，在 h_{2p} 类中有解，且有唯一解 $\varphi(t)$. 今只略述其证明方法.

先证解的唯一性，即当 $f=0$ 时，求证必须取所有 $C_j=0$ 时才可解，且 $\varphi(t)=0$. 令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_L\varphi(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t,$$

于是，

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=C_j,\quad t_0\in L_j,\ j=1,2,\cdots,p;$$

且 $\Phi(z)$ 以 $a\pi$ 为周期，分区全纯. 因此，

$$\Psi_j(z)=\sqrt{\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{a_j}{a}\right)\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{b_j}{a}\right)}\left[\Phi(z)-\frac{1}{2}C_j\right]$$

也以 $a\pi$ 为周期，在 L_j 附近全纯. 令 $w=\tan\dfrac{z}{a}$ 变到 w 平面，用[42]，§88 中的办法，就可证得 $C_j=0$，$\Phi(z)=0$.

对任意 $f(t_0)$，解的存在性可用唯一性推出，其方法同 2°.

最后指出，王小林与著者在[25],[26]中曾对含 $\csc\dfrac{t-t_0}{a}$ 核的奇异积分的反演以及特征方程的求解作过讨论，且 L 还可带有节点. 不言而喻，本节的讨论也可对这种 L 进行.

习　题

1. 设 L 为由 0 到 $\frac{1}{2}a\pi$ 的直线段. 试讨论反演问题(3.7)和修改的反演问题(3.44).

2. 在本节中令 $a\to+\infty$，可得有关 Cauchy 主值积分的反演结果. 试验证之.

3. 试讨论

$$\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_L\varphi(t)\left(\cot\frac{t-t_0}{a}+\tan\frac{t_0}{a}\right)\mathrm{d}t=f(t_0),\quad t_0\in L$$

的反演问题.

4. 试讨论 L 为图 5-1 中的曲线情况下的 Hilbert 核积分的反演问题.

5.3.5 开口弧段上带 ζ 函数核的奇异积分方程

本段将考虑带有 ζ 函数核的奇异积分方程的求解问题. 为简单起见，设 $L_0=\widehat{ab}$ 为基本胞腔内的一开口光滑弧段(记号及名称见 3.4.2 段). 仍设

$O \overline{\in} L_0$. S 为全平面除去 L_0 及其周期合同曲线后所得的区域.

为了后面的需要，先证下一引理.

引理 5.3.1 设 $\Phi(z)$ 在 S 内双周期解析，在基本胞腔内只在 $z=0$ 处可能有单极点，且 $\Phi^{\pm}(t) \in H^*$，因而 $\Phi(z)$ 在 $z=a,b$ 附近可以有不到一阶的奇异性，则

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}[\Phi^+(\tau)-\Phi^-(\tau)][\zeta(\tau-t)+\zeta(t)]\mathrm{d}\tau$$

$$=\Phi^+(t)+\Phi^-(t)-\frac{2\eta_1}{\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{2\eta_2}{\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$t \in L_0, \qquad (3.67)$$

其中 γ_1 为基本胞腔边界上 $\omega_1-\omega_2$ 到 $\omega_1+\omega_2$ 的线段，γ_2 为 $-\omega_1+\omega_2$ 到 $\omega_1+\omega_2$ 的线段.

证 把基本胞腔的整个边界记为 Γ_0，并取定反时针向为其正向. 设 $t \in L_0$，并限定 $z \in S_0$. 令

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}[\Phi^+(\tau)-\Phi^-(\tau)][\zeta(\tau-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}\tau,$$

$$z \overline{\in} L_0,\ z \neq 0,$$

则(3.67)左边就是 $\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)$. 另一方面，有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left(\int_{L_0^+}+\int_{L_0^-}+\int_{\Gamma_0}\right)\Phi(\tau)[\zeta(\tau-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}\tau=\Phi(z),$$

$$z \in S_0,\ z \neq 0;$$

于是，这时

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\Phi(\tau)[\zeta(\tau-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}\tau.$$

利用 $\Phi(\tau)$ 的双周期性，容易证明

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau=0,$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\Phi(\tau)[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)]\mathrm{d}\tau=0.$$

因此上式可改写为

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\Phi(\tau)\zeta(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad z \in S_0.$$

于是

$$\Psi^+(t)+\Psi^-(t)=\Phi^+(t)+\Phi^-(t)-\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\Phi(\tau)\zeta(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

亦即

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}[\Phi^+(\tau)-\Phi^-(\tau)][\zeta(\tau-t)+\zeta(t)]\mathrm{d}\tau$$
$$=\Phi^+(t)+\Phi^-(t)-\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\Phi(\tau)\zeta(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{3.68}$$

再利用 $\zeta(z)$ 的性质:

$$\zeta(\tau+2\omega_j)=\zeta(\tau)+2\eta_j,\quad j=1,2,$$

立即可得(3.67). □

推论 5.3.1 设 $\Phi(z)$ 同上，则

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}[\Phi^+(\tau)-\Phi^-(\tau)][\zeta(\tau-t)+\zeta(t)]\mathrm{d}\tau,$$

当且仅当

$$\int_{\Gamma_0}\Phi(\tau)\zeta(\tau)\mathrm{d}\tau=0 \tag{3.69}$$

或即

$$\eta_1\int_{\gamma_1}\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau=\eta_2\int_{\gamma_2}\Phi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.70}$$

满足时成立.

注意，上面引理及其推论中，如果 $\Phi(z)$ 在基本胞腔中无极点，则(3.67)与(3.68)左边可改写为

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}[\Phi^+(\tau)-\Phi^-(\tau)]\zeta(\tau-t)\mathrm{d}\tau.$$

下面我们要应用上述结果，求解下列两种类型的奇异积分方程.

1° 求解方程

$$A(t)\varphi(t)+\frac{B(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\varphi(\tau)[\zeta(\tau-t)+\zeta(t)]\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L_0, \tag{3.71}$$

其中 $A,B,f\in H$，且 $A\pm B\neq 0$. 为确定起见，设我们在 h_0 类中求解，即允许 $\varphi(t)$ 在 a,b 处可以有不到一阶的奇异性.

像通常那样，令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\varphi(\tau)[\zeta(\tau-z)+\zeta(z)]\mathrm{d}\tau,\quad z\in L, \tag{3.72}$$

则(3.71)成为在 DR_1(即在 $z=0$ 处可以有一阶极点)中求

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L, \tag{3.73}$$

在 h_0 类中的解，其中

$$G(t)=\frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)},\quad g(t)=\frac{f(t)}{A(t)+B(t)},$$

且对它们已作了 L 上的双周期延拓.

如果(3.71)有解，则由(3.72)定义的 $\Phi(z)$ 必为 DR_1 问题(3.73)在 h_0 类中的解. 反之，如果 $\Phi(z)$ 是这样的解，则由下式求出的

$$\varphi(t)=\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t) \tag{3.74}$$

要想是(3.73)在 h_0 类中的解，须且只须

$$A(t)[\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)]+\frac{B(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}[\Phi^{+}(\tau)-\Phi^{-}(\tau)][\zeta(\tau-t)+\zeta(t)]\mathrm{d}\tau$$
$$=f(t),\quad t\in L_0.$$

而由推论 5.3.1，这又等价于(3.69)或(3.70)成立. 因此，我们得到

定理 5.3.6 *方程(3.71)在 h_0 类中求解等价于 DR_1 问题(3.71)在 h_0 类中求解，并要求满足附加条件(3.69)或即(3.70)；当这附加条件满足时，解由(3.74)给出.*

当 $L_0=\widehat{ab}$ 而 $b=a+2\omega_1$ 时，也可类似地进行讨论. 容易验证，这时引理5.3.1及其推论5.3.1仍成立，故其求解方法与上面的全同，定理5.3.6也成立(但须要求 $\Phi^{\pm}(t)$ 从而 $\Phi(z)$ 在 $z=a$ 处有界). 不过有一特殊情况应该注意：如果例如

$$a=-\omega_1-\omega_2,\quad b=\omega_1-\omega_2,$$

则条件(3.67)与(3.70)里的 $\int_{\gamma_2}\Phi(t)\mathrm{d}t$ 中的 $\Phi(t)$ 要理解为 $\Phi^{-}(t)$，而在应用(3.69)时，$\int_{\Gamma_0}\Phi(t)\zeta(t)\mathrm{d}t$ 中的 $\Phi(t)$ 不论 t 在 L_0 或 γ_1 上，都应理解为 $\Phi^{-}(t)$.

2° 求解方程

$$A(t)\varphi(t)+\frac{B(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\varphi(\tau)\zeta(\tau-t)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L_0, \tag{3.75}$$

其中 A,B,f 的条件同前，求解的类也同前. 它可改写为

$$A(t)\varphi(t)+\frac{B(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\varphi(\tau)[\zeta(\tau-t)+\zeta(t)]\mathrm{d}\tau$$
$$=f(t)+\lambda B(t)\zeta(t),\quad t\in L_0, \tag{3.76}$$

其中

$$\lambda=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{3.77}$$

显然，如果 $\varphi(t)$ 是(3.75)的解，则由(3.77)求出 λ 后，$\varphi(t)$ 必为(3.76)的解. 反之，如果(3.76)可解，其中 λ 待定(解中当然含有 λ)，而若又能选取 λ 使满足(3.77)，便可求得(3.75)的解；或者，如果(3.76)要满足一定的可

解条件才可解(这时 λ 很可能已确定)，则(3.77)也是一个可解条件.

总之我们有

定理 5.3.7 方程(3.75)等价于方程(3.76)以及附加条件(3.77).

当 $b=a+2\omega_1$ 时关于方程(3.75)的定理 5.3.7 仍成立.

本段所论可推广到 L_0 由若干段开口光滑弧构成的情况，甚至带有节点的情况.

习　题

1. 试把(3.75)化为双准周期的 QR 问题求解.
2. 对于 $b=a+2\omega_1$ 的情况，详细讨论方程(3.71)与(3.75)的求解问题.

5.4 方程具有一阶奇异性解的情况

5.4.1 Fredholm 方程情况

以前讨论积分方程时，总限定解在 H^* 类中，即在某些点处允许解有不到一阶的奇异性；同时对方程右边的自由项，也往往作同样的限制. 本节将讨论当自由项及解都可以在某些点具一阶奇异性时的情况. 这是著者曾在[21]中所研究的.

设 L 是一条光滑封闭曲线(当 L 由有限条互不相交的这种曲线组成时，结果完全类似). 设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 L 上 n 个不同的点，并记

$$\rho(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-c_k). \tag{4.1}$$

定义 L 上的函数类 $H_1^*=H_1^*(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 如下：称 $f(t)\in H_1^*$ 当它可表示成

$$f(t)=\frac{f^*(t)}{\rho(t)},\quad f^*(t)\in H. \tag{4.2}$$

我们一般假定 $f^*(c_k)\neq 0$，否则 $f(t)$ 在 c_k 处就只有至多不到一阶的奇异性，从而可把 c_k 排斥于 H_1^* 的奇点之外.

本段先考虑 Fredholm 积分方程

$$k_\lambda\varphi\equiv\varphi(t_0)-\lambda\int_L k(t_0,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(t_0),\quad t_0\in L, \tag{4.3}$$

其中 λ 为一参数，而 $k(t_0,t) \in H^*$，即

$$k(t_0,t) = \frac{k^*(t_0,t)}{|t-t_0|^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1,\ k^*(t_0,t) \in H. \tag{4.4}$$

又设已知函数 $f(t)$ 与未知函数 $\varphi(t)$ 均 $\in H_1^*$. 注意，称 $\varphi(t_0)$ 是(4.3)的解，当然并不要求 $t_0 = c_k\ (k=1,2,\cdots,n)$.

与(4.2)类似，令

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{\rho(t)}, \quad \varphi^*(t) \in H, \tag{4.5}$$

则方程(4.3)成为

$$\varphi^*(t_0) - \lambda\rho(t_0)\int_L k(t_0,t)\frac{\varphi^*(t)}{\rho(t)}\mathrm{d}t = f^*(t_0), \quad t_0 \in L. \tag{4.6}$$

由于 $k(t_0,t)\varphi^*(t) \in H^*$，故

$$\int_L k(t_0,t)\frac{\varphi^*(t)}{\rho(t)}\mathrm{d}t \in H^*.$$

因而它在 $t_0 = c_k$ 处就只有不到一阶的奇异性，这只要把 $1/\rho(t)$ 分项分式后便可立即看出. 这样，如果(4.3)有解，从(4.6)可知，则必

$$\varphi^*(c_k) = f^*(c_k), \quad k = 1,2,\cdots,n. \tag{4.7}$$

今作代换

$$\omega(t) = \varphi(t) - f(t), \tag{4.8}$$

故 $\omega(t) \in H^*$，而方程(4.3)便可写成

$$\boldsymbol{k}_\lambda\omega \equiv \omega(t_0) - \lambda\int_L k(t_0,t)\omega(t)\mathrm{d}t = \lambda h(t_0), \tag{4.9}$$

其中

$$h(t_0) = \int_L k(t_0,t)f(t)\mathrm{d}t. \tag{4.10}$$

根据与前面相同的理由，可知 $h(t) \in H^*$. 这样，问题就变成对 Fredholm方程(4.9)在 H^* 类中求解；且这一转化是等价的：得出(4.9)的解 $\omega(t)$ 后，由(4.8)便可得出(4.3)在 H_1^* 类中的解，这时条件(4.7)无疑成立.

对于齐次方程 $\boldsymbol{k}_\lambda\varphi = 0$，由(4.7)很明显，它在 H_1^* 类中的解必属于 H^* 类，从而亦必属于 H 类. 因此对于齐次方程而言，问题完全回到了通常的情况，有关 Fredholm 的定理以及 λ 为特征值的定义也和通常一样.

如果 λ 不是特征值，则(4.9)有唯一解，从而(4.3)也有唯一解. 今设 λ 是特征值. 这时，(4.9)可解的充要条件是(因 $\lambda \neq 0$)

$$\int_L h(t)\chi_j(t)\mathrm{d}t = 0, \quad j = 1,2,\cdots,\nu, \tag{4.11}$$

其中 $\{\chi_j\}_1^\nu$ 是相联方程 $\boldsymbol{k}'_\lambda\chi = 0$ 的线性无关完全解组(如前述，它们都 $\in H$).

将(4.10)代入(4.11)，便得

$$\int_L \chi_j(t)\mathrm{d}t\int_L k(t,t_1)f(t_1)\mathrm{d}t_1 = 0. \tag{4.12}$$

由于 $k'_\lambda\chi_j = 0$，经交换积分次序，(4.12) 可改写为

$$\int_L f(t)\chi_j(t)\mathrm{d}t = 0,\quad j = 1,2,\cdots,\nu. \tag{4.13}$$

于是我们有

定理 5.4.1 Fredholm 方程 $k_\lambda\varphi = f\ (f\in H_1^*)$ 在 H_1^* 类中可解的充要条件是 f 与 $k'_\lambda\chi = 0$ 的所有解正交.

我们还可用预解核给出方程(4.3)的解的表达式. 根据 Fredholm 方程的一般理论，设算子 k_λ 的预解核为 $\gamma(t_0,t,\lambda)$，则当 λ 不是特征值时，方程(4.9)的唯一解为

$$\omega(t_0) = \lambda h(t_0) + \lambda^2\int_L \gamma(t_0,t,\lambda)h(t)\mathrm{d}t. \tag{4.14}$$

以(4.10)代入，利用预解核的熟知性质(参看附录，或详见[48]，§5)，可得

$$\begin{aligned}\lambda\int_L &\gamma(t_0,t,\lambda)\mathrm{d}t\int_L k(t,t_1)f(t_1)\mathrm{d}t_1\\ &= \lambda\int_L f(t_1)\mathrm{d}t_1\int_L \gamma(t_0,t,\lambda)k(t,t_1)\mathrm{d}t\\ &= \int_L [\gamma(t_0,t_1,\lambda) - k(t_0,t_1)]f(t_1)\mathrm{d}t_1.\end{aligned}$$

再回到 $\varphi(t)$，最后可得

$$\varphi(t_0) = f(t_0) + \lambda\int_L \gamma(t_0,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t. \tag{4.15}$$

这表明，方程(4.3)在 H_1^* 类中解的表达式与经典公式完全一样，其中积分当然是主值积分.

5.4.2 Cauchy 核奇异方程情况

现在再来考虑奇异积分方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}\varphi &\equiv a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t + \int_L k(t_0,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\\ &= f(t_0),\quad t_0\in L,\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $a,b\in H$，$k\in H^*$，$a\pm b\neq 0$，但 $f\in H_1^*$，未知函数也 $\in H_1^*$. 此外，我们还设

$$a(c_k)\neq 0,\quad k = 1,2,\cdots,n. \tag{4.16}$$

在(2.1)中，当然 $t_0\neq c_k$. 记 f^*,φ^* 如前.

由于在 $t_0 \neq c_k$ 的邻域中,

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t \in H^*, \quad \int_L k(t_0,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \in H^*,$$

故若 $\varphi(t)$ 是(2.1) 的解,则必有

$$a(c_k)\varphi^*(c_k) = f^*(c_k), \quad k=1,2,\cdots,n. \tag{4.17}$$

现在不能作代换 $\omega(t)=a(t)\varphi(t)-f(t)$,因为 $a(t)$ 可能在 L 上有零点.为克服这一困难,作 $n-1$ 次插值多项式 $T(t)$,使

$$T(c_k) = \frac{f^*(c_k)}{a(c_k)}, \quad k=1,2,\cdots,n, \tag{4.18}$$

并令

$$\omega(t) = \varphi(t) - \frac{T(t)}{\rho(t)}, \tag{4.19}$$

于是可知 $\omega(t) \in H^*$. 把它代入(2.1) 中,则后者成为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}\omega &\equiv a(t_0)\omega(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\omega(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t + \int_L k(t_0,t)\omega(t)\mathrm{d}t \\ &= F(t_0), \quad t_0 \in L,\end{aligned} \tag{4.20}$$

其中

$$F(t_0) = f(t_0) - \frac{a(t_0)T(t_0)}{\rho(t_0)} - h(t_0), \tag{4.21}$$

这里

$$h(t_0) = \int_L k(t_0,t)\,\frac{T(t)}{\rho(t)}\mathrm{d}t. \tag{4.22}$$

在以上的计算中,已注意到

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{T(t)}{\rho(t)}\,\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0} = 0, \quad t_0 \neq c_k,$$

这只要把 $T(t)/\rho(t)$ 进行分项分式便易算出;且易见 $F(t) \in H^*$.

对齐次方程 $\boldsymbol{K}\varphi = 0$ 来说,易见 $\varphi(t) \in H^*$, $F(t) \in H^*$,从而又可知道也 $\in H$,因此有关齐次方程的 Noether 定理这里也不可能推广.

对于非齐次方程(2.1),现已转化为等价的方程(4.20),其中 $F(t_0) \in H^*$. 于是它可解的充要条件为

$$\int_L F(t)\chi_j(t)\mathrm{d}t = 0, \quad j=1,2,\cdots,l', \tag{4.23}$$

其中 $\{\chi_j\}_1^{l'}$ 是相联方程 $\boldsymbol{K}'\chi = 0$ (在 H 类中) 的线性无关的完全解组①.

---

① 把 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 当做系数的间断点,它们都是特异节点,因此 Noether 定理对(4.20) 成立.

以(4.21)代入上式，得

$$\int_L f(t)\chi_j(t)\mathrm{d}t=\int_L a(t)\frac{T(t)}{\rho(t)}\chi_j(t)\mathrm{d}t+\int_L h(t)\chi_j(t)\mathrm{d}t,$$

再以(4.22)代入，交换积分次序，则又有

$$\begin{aligned}\int_L f(t)\chi_j(t)\mathrm{d}t&=\int_L\frac{T(t)}{\rho(t)}\mathrm{d}t\left[a(t)\chi_j(t)+\int_L k(t_1,t)\chi_j(t_1)\mathrm{d}t_1\right]\\&=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{T(t)}{\rho(t)}\mathrm{d}t\int_L\frac{b(t_1)\chi_j(t_1)}{t_1-t}\mathrm{d}t_1.\end{aligned}$$

注意

$$\frac{T(t)}{\rho(t)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{T(c_k)}{\rho'(c_k)(t-c_k)},\tag{4.24}$$

以此代入前式，并用 Poincaré-Bertrand 积分交换次序公式，上式成为

$$\begin{aligned}\int_L f(t)\chi_j(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\frac{T(c_k)}{\rho'(c_k)}\Big[&\pi\mathrm{i}b(c_k)\chi_j(c_k)\\&+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L b(t_1)\chi_j(t_1)\mathrm{d}t_1\int_L\frac{\mathrm{d}t}{(t-c_k)(t_1-t)}\Big].\end{aligned}$$

此式中右边里层的积分显然等于 0，又注意(4.17)式，于是可解条件(4.23)最后可写成

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L f(t)\chi_j(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^*(c_k)b(c_k)\chi_j(c_k)}{a(c_k)\rho'(c_k)},\quad j=1,2,\cdots,l'.\tag{4.25}$$

这样，便得**推广的 Noether 定理**：

定理 5.4.2 方程(2.1)在所设条件下在 H_1^* 类中可解的充要条件是(4.25)成立. 其中 $\{\chi_j\}_1^{l'}$ 是 $\boldsymbol{K}'\chi=0$ 的线性无关完全解组.

显然，如果 $f^*(c_k)=0\ (k=1,2,\cdots,n)$，这就回到了 H^* 类中的原来的 Noether 定理.

5.4.3 特征方程及其相联方程的解

对于特征方程

$$\boldsymbol{K}^0\varphi\equiv a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{b(t_0)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t=f(t_0),\quad t_0\in L\tag{1.1}$$

来说，其解也可写成积分形式. 由于这时(4.20)成为

$$\boldsymbol{K}^0\omega=f(t_0)-\frac{a(t_0)T(t_0)}{\rho(t_0)},\tag{4.26}$$

故其一般解为

$$\omega(t_0)=\boldsymbol{K}^* f-\boldsymbol{K}^*\left(\frac{a(t)T(t)}{\rho(t)}\right)+b^*(t_0)Z(t_0)P_{\kappa-1}(t_0), \quad (4.27)$$

其中 $\boldsymbol{K}^*$ 由(1.9)给出，$a^*(t_0)$ 与 $b^*(t_0)$ 由(1.10)给出，κ 为方程的指标(在第三章中的意义下)；而当 $\kappa<0$ 时，认为以下要讲的可解条件已满足.

把 $\boldsymbol{K}^*\left(\frac{a(t)T(t)}{\rho(t)}\right)$ 详细写出，并用(4.19)回到 $\varphi(t_0)$，则(4.27)成为

$$\varphi(t_0)=\boldsymbol{K}^* f-b^*(t_0)Z(t_0)\left[\frac{b(t_0)T(t_0)}{Z(t_0)\rho(t_0)}-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{a(t)T(t)}{Z(t)\rho(t)}\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}-P_{\kappa-1}(t_0)\right], \quad (4.28)$$

这便是特征方程(1.1)在 $H_1^*(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 类中的一般解.

为了把这个一般解写成更简洁的形式，先证下一引理.

引理 5.4.1 如果把 $1/X(z)$ 在 $z=\infty$ 处的主部记为 $H_\kappa(z)$ (它是 κ 次多项式；$\kappa<0$ 时为零)，则我们有

$$\left.\begin{aligned}\frac{a(t_0)}{Z(t_0)}-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{b(t)\mathrm{d}t}{Z(t)(t-t_0)}&=H_\kappa(t_0),\\-\frac{b(t_0)}{Z(t_0)}+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{a(t)\mathrm{d}t}{Z(t)(t-t_0)}&=H_\kappa(t_0);\end{aligned}\right\} \quad (4.29)$$

此外，以下公式也成立：

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{a(t)\mathrm{d}t}{Z(t)(t-z)}&=\pm\frac{1}{X(z)}+H_\kappa(z), \quad z\in S^\pm;\\\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{b(t)\mathrm{d}t}{Z(t)(t-z)}&=\frac{1}{X(z)}-H_\kappa(z), \quad z\overline{\in}L,\end{aligned}\right\} \quad (4.30)$$

其中 $S^\pm$ 分别为 L 所围的内、外域.

证 记起

$$\begin{aligned}Z(t_0)&=[a(t_0)+b(t_0)]X^+(t_0)\\&=[a(t_0)-b(t_0)]X^-(t_0),\\X(z)&=O(|z|^{-\kappa}) \quad (z\to\infty),\end{aligned}$$

则我们有

$$\begin{aligned}&\frac{a(t_0)}{Z(t_0)}-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{b(t)\mathrm{d}t}{Z(t)(t-t_0)}\\&=\frac{1}{X^+(t_0)}-\frac{b(t_0)}{Z(t_0)}-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{b(t)\mathrm{d}t}{Z(t)(t-t_0)}\end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{z \to t_0 \\ z \in S^+}} \left[\frac{1}{X(z)} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(t) dt}{Z(t)(t-z)} \right]$$

$$= \frac{1}{X^-(t_0)} + \frac{b(t_0)}{Z(t_0)} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(t) dt}{Z(t)(t-t_0)}$$

$$= \lim_{\substack{z \to t_0 \\ z \in S^-}} \left[\frac{1}{X(z)} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(t) dt}{Z(t)(t-z)} \right].$$

由此可见，上式左边是全平面中某全纯函数的边值；而由 $X(z)$ 在 $z=\infty$ 处的性态，知它是某 κ 次多项式 $H_\kappa(z)$. 于是，(4.29) 中第一式成立. 而且再由上式还可看出

$$\frac{1}{X(z)} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(t) dt}{Z(t)(t-z)} = H_\kappa(z). \tag{4.31}$$

由此立即可知，$H_\kappa(z)$ 确为 $1/X(z)$ 在 $z=\infty$ 处的主部.

(4.29) 中第二式可由第一式反演得来. 但也可如下处理：

$$-\frac{b(t_0)}{Z(t_0)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{a(t) dt}{Z(t)(t-t_0)}$$

$$= -\frac{1}{X^+(t_0)} + \frac{a(t_0)}{Z(t_0)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{a(t) dt}{Z(t)(t-t_0)}$$

$$= \lim_{\substack{z \to t_0 \\ z \in S^+}} \left[-\frac{1}{X(z)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{a(t) dt}{Z(t)(t-z)} \right]$$

$$= \frac{1}{X^-(t_0)} - \frac{a(t_0)}{Z(t_0)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{a(t) dt}{Z(t)(t-t_0)}$$

$$= \lim_{\substack{z \to t_0 \\ z \in S^-}} \left[\frac{1}{X(z)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{a(t) dt}{Z(t)(t-z)} \right].$$

根据与前面相仿的理由，就可得(4.29) 中的第二式，而且

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{X(z)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{a(t) dt}{Z(t)(t-z)} &= H_\kappa(z), \quad z \in S^+; \\ \frac{1}{X(z)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{a(t) dt}{Z(t)(t-z)} &= H_\kappa(z), \quad z \in S^-; \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

从后一式也可看出 $H_\kappa(z)$ 是 $1/X(z)$ 在 $z=\infty$ 处的主部.

(4.31),(4.32) 即(4.30) 式. □

现在我们回过来化简(4.28) 式. 当 $\kappa < 0$ 时仍认为可解条件已满足. 用(4.24) 代入(4.28) 右边的最后积分中，得

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{a(t) T(t) dt}{Z(t) \rho(t) (t-t_0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T(c_k)}{\rho'(c_k)} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{a(t) dt}{Z(t)(t-t_0)(t-c_k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{T(c_k)}{\rho'(c_k)(t_0-c_k)} \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{a(t)}{Z(t)}\left(\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-c_k}\right)dt.$$

利用(4.29)的第二式代入，再次注意到(4.24)，可得

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{a(t)T(t)}{Z(t)\rho(t)(t-t_0)}dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{T(c_k)}{\rho'(c_k)(t_0-c_k)}\left[\frac{b(t_0)}{Z(t_0)}-\frac{b(c_k)}{Z(c_k)}+H_\kappa(t_0)-H_\kappa(c_k)\right]$$

$$= \frac{b(t_0)T(t_0)}{Z(t_0)\rho(t_0)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{b(c_k)T(c_k)}{Z(c_k)\rho'(c_k)(t_0-c_k)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{T(c_k)}{\rho'(c_k)} \frac{H_\kappa(t_0)-H_\kappa(c_k)}{t_0-c_k}.$$

上式中最后一项显然是$\kappa-1$次多项式($\kappa<1$时为0)，所以把上式代入(4.28)时，此项可并入$P_{\kappa-1}(t_0)$中. 此外，再注意到(4.18)，最后便得方程(1.1)在$H_1^*(c_1,c_2,\cdots,c_n)$类中的一般解为

$$\varphi(t_0) = \mathbf{K}^* f - b^*(t_0)Z(t_0)$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{b(c_k)f^*(c_k)}{a(c_k)Z(c_k)\rho'(c_k)(t_0-c_k)} - P_{\kappa-1}(t_0)\right]. \quad (4.33)$$

现在来看$\kappa<0$时的可解条件. 由于$\mathbf{K}^{0\prime}\chi=0$的线性无关完全解组为

$$\frac{1}{Z(t_0)}, \frac{t_0}{Z(t_0)}, \cdots, \frac{t_0^{-\kappa-1}}{Z(t_0)},$$

故可解条件(4.25)现在成为

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)t^j}{Z(t)}dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{b(c_k)f^*(c_k)c_k^j}{a(c_k)Z(c_k)\rho'(c_k)}, \quad j=0,1,\cdots,-\kappa-1. \quad (4.34)$$

最后我们来看相联方程

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi \equiv a(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(t)\psi(t)}{t-t_0}dt = g(t_0), \quad t_0\in L \quad (1.13)$$

在$H_1^*(c_1,c_2,\cdots,c_n)$类中的解，其中

$$g(t_0) = \frac{g^*(t_0)}{\rho(t_0)} \in H_1^*.$$

这时不能类似地应用上述方法. 在(1.13)中两边同乘以$b(t_0)$，并令

$$\theta(t) = b(t)\psi(t), \quad (4.35)$$

则(1.13)成为$\theta(t)$的特征方程

$$a(t_0)\theta(t_0) - \frac{b(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\theta(t)}{t-t_0}dt = b(t_0)g(t_0), \quad t_0\in L. \quad (4.36)$$

其左边与方程(1.1)所不同的，只是$b(t_0)$改为了$-b(t_0)$，故其指标$\kappa'=-\kappa$，

且其典则函数为 $1/X(z)$. 故标准函数 $Z(t)$ 现在要相应地改为

$$\frac{a^2(t)-b^2(t)}{Z(t)}=\frac{a(t)-b(t)}{X^+(t)}=\frac{a(t)+b(t)}{X^-(t)}.$$

于是根据(4.33)式，(4.36)的一般解为(设可解条件已满足)

$$\theta(t_0)=\boldsymbol{K}^*(bg)-\frac{b(t_0)}{Z(t_0)}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{b^{*2}(c_k)Z(c_k)g^*(c_k)}{a^*(c_k)\rho'(c_k)(t_0-c_k)}-P_{-\kappa-1}(t_0)\right]. \tag{4.37}$$

根据 $\boldsymbol{K}^*$ 的定义，回到 $\psi(t_0)$，便得

$$\psi(t_0)=\boldsymbol{K}^{*\prime}g-\frac{1}{Z(t_0)}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{b^{*2}(c_k)Z(c_k)g^*(c_k)}{a^*(c_k)\rho'(c_k)(t_0-c_k)}-P_{-\kappa-1}(t_0)\right], \tag{4.38}$$

其中 $\boldsymbol{K}^{*\prime}$ 是 $\boldsymbol{K}^*$ 的相联算子. 这便是方程(1.13)在 $H_1^*(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 类中的一般解.

在以上的推理中，已假定了 $b(t)\neq 0$ 于 L 上. 但通过直接验证，可以证明即使 $b(t)$ 在 L 上有零点，(4.38)也确实是(1.13)的解(虽然不能说明是其一般解).

当 $\kappa'<0$ 即 $\kappa>0$ 时，由(4.25)易见(1.13)的可解条件为

$$\frac{1}{\pi i}\int_L g(t)b^*(t)Z(t)t^j\,\mathrm{d}t=-\sum_{k=1}^{n}\frac{g^*(c_k)b^{*2}(c_k)Z(c_k)c_k^j}{a^*(c_k)\rho'(c_k)},$$

$$j=0,1,\cdots,-\kappa'-1. \tag{4.39}$$

注意$\dfrac{b^{*2}}{a^*}=a^*-\dfrac{1}{a}$，所以(4.38)，(4.39)还可相应化简.

注 如果和经典情况一样，把方程(1.1)化为 Riemann 边值问题(注意，当核密度在 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 处具有一阶奇异性而 $\in H_1^*$ 时，Plemelj 公式仍成立)，也可求得(1.1)的一般解有下形：

$$\varphi(t_0)=\boldsymbol{K}^*f-b^*(t_0)Z(t_0)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{t_0-c_k}+P_{\kappa-1}(t_0)\right], \tag{4.40}$$

其中 $P_{\kappa-1}$ 仍为 $\kappa-1$ 次任意多项式，而 $\{C_j\}_1^n$ 是一组待定常数. 把(4.40)直接代入(1.1)，经过比较繁的计算，也可得到(4.33)式. 根据类似的理由，可以证实(4.38)确实是(1.13)的在 H_1^* 类中的一般解.

以上假定了条件(4.16)成立. 当它不成立时，[69]中有详细讨论，这里从略.

习　题

把本段附注中的论断加以证实.

第六章　函数组的边值问题与奇异积分方程组

本章将把第二、三章中有关基本边值问题和奇异积分方程推广到函数组的边值问题和方程组的情况，并给出在某些解析条件下方程组的有效解法.

6.1　函数组的 Riemann 边值问题

6.1.1　一些记号与名称

首先讨论 n 个函数组的边值问题. 为简单起见，设 L 为复平面中的一条光滑封闭曲线，并已取定反时针向为其正向，它围的内域记为 D^+，外域记为 D^-，并设 $O \in D^+$.

我们将讨论 n 个函数 $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \cdots, \varphi_n(z)$ 的有序集合，把它记成一个列向量，称为**函数向量**：

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \varphi_2(z) \\ \vdots \\ \varphi_n(z) \end{pmatrix} = (\varphi_1(z), \varphi_2(z), \cdots, \varphi_n(z))^{\mathrm{T}}$$

$$= (\varphi_1(z), \varphi_2(z), \cdots, \varphi_n(z))'$$

(这里上角 T 或撇号表示转置)，而称各 $\varphi_j(z)$ 为 $\varphi(z)$ 的**分量**. $\varphi(z)$ 的各个分量所共有的性质也称为函数向量 $\varphi(z)$ 的性质. 例如，若所有 $\varphi_j(z)$ 都是某区域中的全纯函数，则称 $\varphi(z)$ 为该区域中的**全纯向量**；若所有 $\varphi_j(z)$ 为某集合上 $\in H$ 的函数，则称 $\varphi(z)$ 在该集合上 $\in H$，等等. 因此，对于 $D^{\pm}$ 而言，我们得到 $\Phi(z)$ 为**分区全纯向量**的确定意义. 又如，设 $\varphi(z)$ 在 D^- 中全纯，且

$$\varphi(z) = \gamma(z) + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad (z \to \infty),$$

其中 $\gamma(z)=(P_1(z),P_2(z),\cdots,P_n(z))'$ 为一多项式向量，则称 $\gamma(z)$ 为 $\varphi(z)$ 在无穷远处的主部. 又若 $\varphi_j(z)$ 在 ∞ 处的阶数为 k_j，则称 $k=\max\limits_j k_j$ 为 $\varphi(z)$ 在无穷远处的阶①. 因此，$k>0$ 表明 $\varphi(z)$ 的各分量在 ∞ 处至多有 k 阶极点而至少有一个分量确有 k 阶极点.

不过要注意，正如我们说一个 k 次任意多项式实际上可能其次数低于 k 一样，我们有时也说在 ∞ 处有 k 阶的向量实际上指的是阶数不超过 k，这从上下文中可以弄清楚.

设 $\varphi(t)\in H$ 为 L 上的一向量，则

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-z}\mathrm{d}t,\quad z\overline{\in}L \tag{1.1}$$

(右端意义自明)，是一分区全纯向量，且 Plemelj 公式成立：

$$\Phi^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau,\quad t\in L. \tag{1.2}$$

如果 $\Phi(z)$ 是 D^+ 内的全纯向量，且有边值 $\Phi^+(t)$，则由 Cauchy 定理，易见

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\Phi^+(t)}{t-z}\mathrm{d}t,\quad z\in D^+, \tag{1.3}$$

$$0=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\Phi^+(t)}{t-z}\mathrm{d}t,\quad z\in D^- \tag{1.4}$$

(左边 0 代表零向量). 如果 $\Phi^+(t)\in H$，由(1.4)还有

$$0=-\frac{1}{2}\Phi^+(t_0)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\Phi^+(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L. \tag{1.5}$$

反过来，如果有一向量 $\omega(t)\in H$ 于 L 上，能使

$$0=-\frac{1}{2}\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\omega(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t\in L \tag{1.6}$$

成立，则 $\omega(t)$ 必定是 D^+ 内的某全纯向量 $\Omega(z)$ 的边值. 这只要令

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\omega(t)}{t-z}\mathrm{d}t,\quad z\in D^+$$

就可立即明白，因为这时

$$\Omega^+(t_0)=\frac{1}{2}\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\omega(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,$$

与(1.6)相减，就有 $\Omega^+(t_0)=\omega(t_0)$.

类似地，如果 $\Phi(z)$ 是 D^- 中的全纯向量，在 L 上有边值 $\Phi^-(t)$，且在 ∞ 处有有限阶，其主部为多项式向量 $\gamma(z)$ (见(1.2)式)，则由 Cauchy 定理，

---

① 如果某个 $\varphi_j(z)\equiv 0$，就认为它是 $-\infty$ 阶的. 如果所有 $\varphi_j(z)\equiv 0$，从而 $\varphi(z)\equiv 0$，则称 $\varphi(z)$ 在 ∞ 处有 $-\infty$ 阶.

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(t)}{t-z}dt, \quad z \in D^+, \tag{1.7}$$

$$-\Phi(z) + \gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(t)}{t-z}dt, \quad z \in D^-. \tag{1.8}$$

如果$\Phi^-(t) \in H$，则(1.7) 等价于

$$\frac{1}{2}\Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t}d\tau = \gamma(t), \quad t \in L; \tag{1.9}$$

反过来，如果有一向量 $\omega(t) \in H$，能使

$$\frac{1}{2}\omega(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}d\tau = \gamma(t), \quad t \in L, \tag{1.10}$$

其中 $\gamma(t)$ 为一多项式向量，则 $\omega(t)$ 必定是 D^- 中某全纯向量$\Omega(z)$ 的边值：$\Omega^-(t) = \omega(t)$，且 $\Omega(z)$ 在 ∞ 处的主部为 $\gamma(z)$.

最后我们指出，最简单的跳跃问题

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \quad t \in L, \tag{1.11}$$

其中 $\varphi(t)$ 为 L 上 $\in H$ 的已知向量，而 $\Phi(z)$ 为未知的分区全纯向量(在 ∞ 处有有限阶)，其一般解显然为

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}dt + \gamma(z), \quad z \overline{\in} L, \tag{1.12}$$

其中 $\gamma(z)$ 为任意多项式向量. 特别，如果要求 $\Phi(\infty) = 0$ (零向量)，则应取 $\gamma(z) = 0$. 这些都可与单个函数情况同样地证明.

今后还将经常运用矩阵记号及其运算规则，这些我们认为读者都已熟悉.

6.1.2 齐次 R 问题化为 Fredholm 方程

本段考虑分区全纯向量的齐次 Riemann 问题或简称**齐次 R 问题**

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L, \tag{1.13}$$

其中 $G(t) = (G_{jk}(t))$ 为 L 上的已给 $n \times n$ 矩阵，(其所有元) $\in H$，而 $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots, \Phi_n(z))'$ 为未知分区全纯向量(在 ∞ 处当然是有限阶的)，其边值在 L 上也 $\in H$. 实际上(1.13) 是 n 个未知分区全纯函数 $\Phi_j(z)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 的边值问题

$$\Phi_j^+(t) = \sum_{k=1}^{n} G_{jk}(t)\Phi_k^-(t), \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

以后我们不再写出这种形式. 我们将只讨论**正则型情况**，即恒设 $\det G(t) \neq 0$ 于 L 上.

我们将采用[35] 中的方法，把问题(1.13) 化为 Fredholm 方程(组) 来求解.

引进新的未知函数向量 $\rho(t)$ $(t\in L)$，使

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_L\dfrac{G(t)\rho(t)}{t-z}\mathrm{d}t, & \text{当 } z\in D^+ \text{ 时；}\\ -\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_L\dfrac{\rho(t)}{t-z}\mathrm{d}t+\gamma(z), & \text{当 } z\in D^- \text{ 时，}\end{cases}\tag{1.14}$$

其中 $\gamma(z)$ 为一多项式向量，是 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处的主部. 问题(1.13) 的解 $\Phi(z)$（如果有的话）一定可以写成(1.14) 的形式. 因为，如果 $\Phi(z)$ 是(1.13) 的解，则易验证，以 $\rho(t)=\Phi^-(t)$ 代入(1.14)，由(1.3) 与(1.8)，立刻便得出 $\Phi(z)$.

在(1.14) 中令 $z\to t\in L$ 取边值，代入(1.13)，便得 $\rho(t)$ 应满足的(向量)方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}\rho&\equiv\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\rho(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{G^{-1}(t)G(\tau)-E}{\tau-t}\rho(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\gamma(t),\quad t\in L,\end{aligned}\tag{1.15}$$

这里 $G^{-1}(t)$ 是 $G(t)$ 的逆矩阵，E 是 $n\times n$ 的单位矩阵. $\boldsymbol{K}$ 是一个**奇异积分算子**，它把 H 类中的 n 维向量变到同一类中的向量. 易见，如果对某多项式向量 $\gamma(t)$，方程(1.15) 有解 $\rho(t)$，则把它代入(1.14) 便得(1.13) 的一个解. 这样，齐次 R 问题(1.13) 就等价于方程(1.15).

用

$$\boldsymbol{S}\omega\equiv\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\omega(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L,\tag{1.16}$$

表示 Cauchy 主值积分的算子，因为 L 是封闭曲线，由 Cauchy 主值积分的反演公式(1.4.3 段)，$\boldsymbol{S}^2=\boldsymbol{I}$ 为恒等算子. 将 $\boldsymbol{S}$ 作用于(1.15) 两边，得

$$\boldsymbol{SK}\rho\equiv\rho(t_0)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\,\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{G^{-1}(t)G(\tau)-E}{\tau-t}\rho(\tau)\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{S}\gamma.$$

利用 Poincaré-Bertrand 换序公式，注意到

$$G^{-1}(t_0)G(t_0)-E=O\quad(\text{零矩阵}),$$

且 $\boldsymbol{S}\gamma=\gamma(t_0)$（由推广的留数定理立即可知），上面方程成为

$$\boldsymbol{SK}\rho\equiv\rho(t_0)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L k(t_0,t)\rho(t)\mathrm{d}t=\gamma(t_0),\quad t_0\in L,\tag{1.17}$$

其中

$$\begin{aligned}k(t_0,t)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{G^{-1}(t_1)G(t)-E}{(t-t_1)(t_1-t_0)}\mathrm{d}t_1\\&=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{G^{-1}(t_1)-G^{-1}(t)}{t_1-t}\,\frac{\mathrm{d}t_1}{t_1-t_0}\cdot G(t).\end{aligned}$$

由于 $G^{-1}(t)\in H$，故

$$\frac{G^{-1}(t_1)-G^{-1}(t)}{t_1-t}\in H^*,$$

因此 $k(t_0,t)\in H^*$，亦即(1.17)是一弱 Fredholm 方程(组).

(1.17)的相联方程是

$$\boldsymbol{K}'\boldsymbol{S}'\nu\equiv\nu(t_0)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L k'(t,t_0)\nu(t)\mathrm{d}t=0,\quad t_0\in L,\tag{1.18}$$

其中 $k'(t,t_0)$ 是矩阵 $k(t,t_0)$ 的转置矩阵：

$$k'(t,t_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{G'(t)G'^{-1}(t_1)-E}{(t-t_1)(t_1-t_0)}\mathrm{d}t_1.\tag{1.19}$$

根据Fredholm方程(组)的一般理论(参看附录1中注2)，方程(1.17)当且仅当

$$\int_L\nu'(t)\gamma(t)\mathrm{d}t=0\tag{1.20}$$

成立时可解，这里 $\nu(t)$ 是(1.18)的任何解(列向量). 这种线性无关的解只有有限个，而 $\gamma(t)$ 作为任何多项式向量，可以有无穷多种选取方法，从而适当选取 $\gamma(t)$（且有无穷多种选法），方程(1.17)从而(1.15)恒可解，且有无穷多个解. 以每一个这种解代入(1.14)，便得问题(1.13)的一个解.

因此，我们有

定理6.1.1 R问题(1.13)，如果只要求 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处有有限阶数，而对阶数大小不加限制，则恒可解，且有无穷多组线性无关解.

6.1.3 齐次 R 问题的典则解组

为了弄清楚齐次R问题(1.13)的一般解，有必要先对其解的性质作一些了解，并作出所谓典则解组.

首先，如果 $\Phi^1(z),\Phi^2(z),\cdots,\Phi^m(z)$ 是(1.13)的 m 个解(向量)，当然指的是 ∞ 处为有限阶者(下同)，则

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{m}P_j(z)\Phi^j(z)$$

也是一个解，其中 $P_1(z),P_2(z),\cdots,P_m(z)$ 为 m 个任意多项式(次数也任意).

其次，我们有下面的引理：

引理6.1.1 齐次R问题(1.13)的任何非零解 $\Phi(z)$ 在无穷远处的阶数不可能低于某一(非正)常数 $r=-k$，这里 k 是 Fredholm 方程(组) $\boldsymbol{SK}\rho=0$ 的线性无关解的个数.

证 用反证法，设(1.13)有一非零解 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处的阶数小于 $-k$，于是

$$\Phi(z),\ z\Phi(z),\ \cdots,\ z^k\Phi(z)$$

就是(1.13)的一组在 $z=\infty$ 处取零(向量)值的解. 这样一来，由(1.14)知，

$$\Phi^-(t),\ t\Phi^-(t),\ \cdots,\ t^k\Phi^-(t)$$

就都是 $\boldsymbol{SK}\rho=0$ 的解. 但因 $\Phi^-(t)\neq 0$ 于 L 上，故它们是线性无关的，与所设矛盾. □

再次，我们注意到，如果 $\Phi(z)$ 是(1.13)的一个解，而在某点 $c\,\overline{\in}\,L$ 处，$\Phi(c)=0$，亦即 $\Phi_j(c)=0\ (j=1,2,\cdots,n)$. 因此在 c 附近全纯的函数 $\Phi_j(z)$ 以 $z=c$ 为零点，从而 $\Psi_j(z)=\dfrac{\Phi_j(z)}{z-c}$ 仍以 c 为正则点. 所以 $\Psi(z)=(\Psi_1(z),\Psi_2(z),\cdots,\Psi_n(z))'$ 也是(1.13)的一个解. 现在要把这一结论推广到 $c\in L$ 的情况. 亦即，要证明

引理 6.1.2 如果 $\Phi(z)$ 是(1.13)的一个解，c 为 L 上的某一点，且 $\Phi^+(c)=0$ (从而 $\Phi^-(c)=0$)，则 $\Psi(z)=\dfrac{\Phi(z)}{z-c}$ 在 L 上包括 c 点在内存在正、负侧的边值，且仍是(1.13)的解.

证 因 $\Phi^{\pm}(t)\in H$ 于 L 上，故 $\Psi^{\pm}(t)\in H^*$ 于 L 上，以 c 为可能的奇点，且显然 $\Psi(z)$ 仍为(1.13)的解，但 $t=c$ 可能要除外. 因此，对于某个确定的多项式向量 $\gamma(z)$，以 $\rho(t)=\Psi^-(t)$ 代入(1.14)，将得出 $\Psi(z)$. 从而可知 $\Psi^-(t)$ 满足方程(1.15)，因此也满足(1.17)，但 $t_0\neq c$. 由于 $k(t_0,t)\in H^*$，经过仔细的分析，就可知道 $\Psi^-(t_0)\in H$. 再由(1.13)就知道 $\Psi^+(t_0)$ 也 $\in H$. □

我们就来论证上面证明中用到的结论 $\Psi^-(t_0)\in H$，亦即要证 $\Psi^-(t_0)$ 在 $t_0=c$ 附近无奇异性. 设若不然，则可写(已取定 $(t_0-c)^\alpha$ 的任一分支)

$$\Psi^-(t_0)=\frac{\psi(t_0)}{(t_0-c)^\alpha},\quad 0<\alpha<1,$$

其中 $\psi(t)\in H_0$ 于 L 上，且 $\psi(c\pm 0)$ (表示 t 沿着 L 上两边趋于 c 时的单侧极限) 不同时为 0. 又因 $k(t_0,t)\in H^*$，故可写

$$k(t_0,t)=\frac{k^*(t_0,t)}{(t-t_0)^\nu},\quad 0\leqslant\nu<1,\ k^*(t_0,t)\in H.$$

由于 $\Psi^-(t_0)$ 当 $t_0\neq c$ 时满足(1.17)，即

$$\frac{\psi(t_0)}{(t_0-c)^\alpha}+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{k^*(t_0,t)\psi(t)}{(t-c)^\alpha(t-t_0)^\nu}\mathrm{d}t=\gamma(t_0),\quad t_0\neq c,$$

其中 $\gamma(t_0)$ 为某多项式. 此即

$$\psi(t_0)+\frac{(t_0-c)^\alpha}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\omega(t_0,t)}{(t-c)^\alpha(t-t_0)}\mathrm{d}t=(t_0-c)^\alpha\gamma(t_0),\quad t_0\neq c, \qquad (*)$$

这里已记

$$\omega(t_0,t)=k^*(t_0,t)\psi(t)(t-t_0)^{1-\gamma}\in H_0.$$

在 L 上另取一点 d，以 c,d 为端点把 L 拆成两段弧 L_1,L_2，记

$$\Omega_j(t_0)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_j}\frac{\omega(t_0,t)}{(t-c)^\alpha(t-t_0)}\mathrm{d}t,\quad j=1,2.$$

这里 $\omega(t_0,t)$ 已在 $L_j\times L_j$ 上 $\in H$. 为确定起见，我们暂设 $t_0\in L_1$. 将$\Omega_1(t_0)$ 改写为

$$\begin{aligned}\Omega_1(t_0)&=\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_1}\frac{\omega(t_0,t)-\omega(t_0,c)}{(t-c)^\alpha(t-t_0)}\mathrm{d}t+\frac{\omega(t_0,c)}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_1}\frac{\mathrm{d}t}{(t-c)^\alpha(t-t_0)}\\&=I_1(t_0)+I_2(t_0),\quad t_0\neq c,\ \in L_1.\end{aligned}$$

由 4.1.4 段中的讨论，表示 $I_2(t_0)$ 中的积分在 $t_0=c$ 附近可能有 α 阶的奇异性，但因 $\omega(c,c)=0$，故 $I_2(t_0)$ 在 $t_0=c$ 附近有不到 α 阶的奇异性. 再考虑$I_1(t_0)$，设 $\omega(t_0,t)\in H^\mu$，故可写

$$\frac{\omega(t_0,t)-\omega(t_0,c)}{(t-c)^\alpha}=\frac{\omega_1(t_0,t)}{(t-c)^{\alpha-\mu}},\quad \omega_1(t_0,t)\in H.$$

又，那里的结果对于 Cauchy 主值积分的核密度中含有参数 t_0 时完全同样成立①，所以 $I_1(t_0)$ 在 $t_0=c$ 附近或者没有奇异性(当$\alpha<\mu$时)，或者有对数奇异性(当 $\alpha=\mu$时)，或者有 $\alpha-\mu$ 阶奇异性(当 $\alpha>\mu$时). 这样，$\Omega_1(t_0)$ 当 $t_0\in L_1$ 时在 $t_0=c$ 附近有至多不到 α阶的奇异性. 当$t_0\in L_2$ 时，用类似的讨论也可知道$\Omega_2(t_0)$有类似性质. 这样，在($*$)式中，令 $t_0\to c$ 时，左端第二项的极限为 0，而右端的极限显然为 0，从而当 $t_0\to c$ 时 $\psi(t_0)\to 0$，亦即 $\psi(c\pm 0)=0$，这与所设矛盾. 这就证明了我们的论断.

在单个函数的 R 问题中，关键是要把 $G(t)$ 用典则解分解为

$$G(t)=\frac{X^+(t)}{X^-(t)}.$$

在现在的情况下，为了得出类似的结论，就要作出相应的 $X(z)$，但这时它应是一个 $n\times n$ 矩阵，使得 $G(t)=X^+(t)[X^-(t)]^{-1}$，亦即要求

$$X^+(t)=G(t)X^-(t), \qquad (1.21)$$

当然还应要求满足某些附加条件. 为此我们就要设法先求出(1.13) 的 n 个线性无关的解组 $\Phi^1(z),\Phi^2(z),\cdots,\Phi^n(z)$，其中

$$\Phi^k(z)=(\Phi_1^k(z),\Phi_2^k(z),\cdots,\Phi_n^k(z))'\quad (k=1,2,\cdots,n).$$

为使它们线性无关，只须要求

$$\det(\Phi_j^k(z))=\begin{vmatrix}\Phi_1^1(z)&\Phi_1^2(z)&\cdots&\Phi_1^n(z)\\\Phi_2^1(z)&\Phi_2^2(z)&\cdots&\Phi_2^n(z)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\Phi_n^1(z)&\Phi_n^2(z)&\cdots&\Phi_n^n(z)\end{vmatrix}\neq 0; \qquad (1.22)$$

---

① 参看[42]，§22，命题 Ⅵ.

矩阵$(\Phi_j^k(z))$可称为问题(1.13)的**解矩阵**，因为它的每一列都是(1.13)的解，从而它本身满足

$$(\Phi_j^{k+}(t)) = G(t)(\Phi_j^{k-}(t)),$$

或记成

$$(\Phi_j^k(t))^+ = G(t)(\Phi_j^k(t))^-.$$

这样的n个解是存在的(见定理6.1.1).

满足条件(1.22)的解矩阵$(\Phi_j^k(z))$称为(1.13)的**基本解矩阵**，而构成它的n个解组(即它的n个列向量)称为**基本解组**. 我们可用下面方法来构造一个基本解组. 取(1.17)中的$\gamma(z)$为一特殊的多项式向量：

$$\gamma^k(z) = (0,\cdots,0,\gamma_k^k(z),0,\cdots,0)',$$

它除第k个分量为一多项式$\gamma_k^k(z)$外，其余的都是零. 然后根据可解条件(1.20)，可以确定出$\gamma_k^k(z)$的系数不全为零(如果它的次数取得足够高，这一定可以办到)，使之成立. 求出$\gamma_k^k(z)$后，便可求解(1.17)而得到$\rho^k(t)$，最后由(1.14)便可求出$\Phi^k(z)$. 令k依次取值$1,2,\cdots,n$，便得到n个解$\Phi^1(z)$，$\Phi^2(z),\cdots,\Phi^n(z)$. 因为$\Phi^k(z)$在$z=\infty$处的主部为$\gamma^k(z)$，因此$\det(\Phi_j^k(z))$在$z=\infty$处的主部为

$$\prod_{k=1}^n \gamma_k^k(z) \not\equiv 0,$$

从而它本身也$\not\equiv 0$，亦即$\{\Phi^k(z)\}_1^n$确已构成一基本解组.

基本解矩阵$(\Phi_j^k(z))$不能充当典则解矩阵，因为一般说来它并不在任何点处是满秩的. 我们要设法从一个基本解矩阵$(\Phi_j^k(z))$出发，作出另一解矩阵，它在z平面中任何有限远点处都是满秩的；这里的点也包括L上的点在内，这时矩阵满秩当然指的是其正、负边值的矩阵满秩. 这种解矩阵称为**正规解矩阵**. 下面来说明怎样从一个基本解矩阵来作出正规解矩阵.

设$(\Phi_j^k(z))$为一基本解矩阵. 若它已在任何有限远处满秩，则它已是正规解矩阵. 现设它在某点$z=c\ (\neq\infty)$处降秩，即$\det(\Phi_j^k(c))=0$. 因此向量组$\Phi^1(c),\Phi^2(c),\cdots,\Phi^n(c)$是线性相关的，从而存在一组不全为零的常数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得

$$\alpha_1\Phi^1(c)+\alpha_2\Phi^2(c)+\cdots+\alpha_n\Phi^n(c)=0.$$

注意

$$\Phi(z)=\alpha_1\Phi^1(z)+\alpha_2\Phi^2(z)+\cdots+\alpha_n\Phi^n(z)$$

也是(1.13)的一个解，且$\Phi(c)=0$. 如果$c\,\overline{\in}\,L$，则$\Phi(z)$以$z=c$为零点，故$\Psi(z)=\dfrac{\Phi(z)}{z-c}$仍分区全纯，也是(1.13)的解. 我们不妨把使得$\alpha_k\neq 0$的那些

k 所对应的 $\Phi^k(z)$ 中在 $z=\infty$ 处阶数最高者放在最前面成为 $\Phi^1(z)$（若不止一个则可任取其中之一），而把 $\Psi(z)$ 代替 $\Phi^1(z)$，成为一个新的解组 $\Psi(z)$，$\Phi^2(z),\cdots,\Phi^n(z)$. 因为

$$\begin{vmatrix} \Psi_1(z) & \Phi_1^2(z) & \cdots & \Phi_1^n(z) \\ \Psi_2(z) & \Phi_2^2(z) & \cdots & \Phi_2^n(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_n(z) & \Phi_n^2(z) & \cdots & \Phi_n^n(z) \end{vmatrix} = \frac{\alpha_1}{z-c}\det(\Phi_j^k(z)) \neq 0,$$

所以它们仍是一基本解组. 这个基本解组中的一个解在无穷远点的阶数比原来的要低 1，而其余的解的阶数不变.

如果 $c\in L$，则利用引理 6.1.2，完全可以进行类似的处理而得到同样的效果.

如果所得的新的基本解组在任何有限远点处满秩，则它已是正规解组. 否则，又可按上述方法处理而得到更新的一个基本解组，其中某个解在 ∞ 处的阶数又降低 1，而其余的没有改变. 如此继续下去，由引理 6.1.1 可知，这种做法只须做有限次，就能使最后得到的基本解组成为正规解组.

虽然正规解组在有限远点处到处满秩，但还不能充当典则解组，因为它在 ∞ 点处的性状未加任何限制. 而对于典则解组来说，必须对此有所限制，正如单个函数时情况一样，典则解在 ∞ 处有其特点.

现设 $\Psi^1(z),\Psi^2(z),\cdots,\Psi^n(z)$ 为(1.13) 的一正规解组，设其各个解在 ∞ 处的阶数分别为 $-\kappa_1,-\kappa_2,\cdots,-\kappa_n$. 因此 $z^{\kappa_k}\Psi^k(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内为全纯向量(且不恒为 0). 记

$$\Delta_0(z)=\det(z^{\kappa_k}\Psi_j^k(z)),$$

亦即 $\det(\Psi_j^k(z))=z^{-\kappa}\Delta_0(z)$，这里已令

$$\kappa=\kappa_1+\kappa_2+\cdots+\kappa_n. \tag{1.23}$$

显然 $\Delta_0(z)$ 为 $z=\infty$ 的邻域内的全纯函数，且以 ∞ 点为常点，即 $\Delta_0(\infty)$ 有限.

虽然 $\Delta_0(\infty)$ 中每一列向量都不是零向量，但一般说来它们是否线性无关亦即 $\Delta_0(\infty)$ 是否不等于零不得而知. 如果它们线性相关即 $\Delta_0(\infty)=0$，则对我们以后的论证来说极为不利. 因此我们希望 $\Delta_0(\infty)\neq 0$，这正是对典则解组在 ∞ 处所要加的限制. 我们给出

定义 6.1.1 设 $X^1(z),X^2(z),\cdots,X^n(z)$ 构成(1.13) 的一个正规解组，它们在 ∞ 处的阶数分别为 $-\kappa_1,-\kappa_2,\cdots,-\kappa_n$. 如果 $z^{\kappa_1}X_1(z),z^{\kappa_2}X_2(z),\cdots,z^{\kappa_n}X_n(z)$ 当 $z=\infty$ 时线性无关，亦即，如果记

$$\Delta_0(z)=\det(z^{\kappa_k}X_j^k(z)), \tag{1.24}$$

有 $\Delta_0(\infty) \neq 0$，则称 $X^1(z), X^2(z), \cdots, X^n(z)$ 为(1.13)或 $G(t)$ 的一个**典则解组**，而矩阵 $X(z) = (X_j^k(z))$ 称为它的一个**典则解矩阵**，或简称**典则矩阵**.

我们现在来说明，怎样从一正规解组 $\Psi^1(z), \Psi^2(z), \cdots, \Psi^n(z)$ 出发，来作出典则解组，从而就证明了典则解组或典则解矩阵的存在性.

如果对于这个正规解组，相应的 $\Delta_0(\infty) \neq 0$，则它已是典则解组. 今设 $\Delta_0(\infty) = 0$. 由于 $\Psi^k(z)$ 在 $z = \infty$ 处的阶数为 $-\kappa_k$，故

$$\Psi_j^k(z) = z^{-\kappa_k}\left[c_j^k + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right] \quad (z \to \infty),$$

并且

$$\det(c_j^k) = 0.$$

因此向量组 $c^k = (c_1^k, c_2^k, \cdots, c_n^k)'$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 线性相关. 故存在不全为零的常数 β_k，使 $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k c^k = 0$. 对于那些相应于 $\beta_k \neq 0$ 的 k，把对应的 $\Psi^k(z)$ 中在 $z = \infty$ 处阶数最高者放在最前面(如果不止一个则任取其一)成为 $\Psi^1(z)$，而用

$$\Psi^*(z) = \beta_1 \Psi^1(z) + \beta_2 z^{\kappa_2 - \kappa_1} \Psi^2(z) + \cdots + \beta_n z^{\kappa_n - \kappa_1} \Psi^n(z)$$

取代 $\Psi^1(z)$，并不妨设 $\beta_1 = 1$. 注意，对于使 $\beta_k \neq 0$ 的那些 k，有 $\kappa_k - \kappa_1 \geqslant 0$，故 $\Psi^*(z)$ 仍为(1.13)的一个分区全纯解. 由于

$$\begin{vmatrix} \Psi_1^*(z) & \Psi_1^2(z) & \cdots & \Psi_1^n(z) \\ \Psi_2^*(z) & \Psi_2^2(z) & \cdots & \Psi_2^n(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_n^*(z) & \Psi_n^2(z) & \cdots & \Psi_n^n(z) \end{vmatrix} = \det(\Psi_j^k(z))$$

在任何有限远点 z 处 $\neq 0$，故 $\Psi^*(z), \Psi^2(z), \cdots, \Psi^n(z)$ 仍为正规解组. 又

$$\lim_{z \to \infty} z^{\kappa_1} \Psi_j^*(z) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k c_j^k = 0,$$

故解向量 $\Psi^*(z)$ 在 ∞ 处的阶数比 $\Psi^1(z)$ 的阶数至少低 1. 这样，我们得到一个新的正规解组，其中有一个解在 ∞ 处的阶数比原来的某个解的阶数至少低 1，而其余的阶数都不变，且解矩阵的行列式之值不变.

如果对于这个新的正规解组，相应的 $\Delta_0(\infty) \neq 0$，则它已是典则解组. 否则，又可按上述方法进行. 再由引理 6.1.1，可知这种步骤只能进行有限多次，最后必可得出典则解组 $X^1(z), X^2(z), \cdots, X^n(z)$.

顺便看到，典则解矩阵 $X(z)$ 的行列式和原来的正规解矩阵的行列式相等，为同一分区全纯函数；或至多差一符号，但适当交换一个解组的次序可使它们完全相等.

最后我们指出典则解组的一些性质. 设 $X^k(z)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 为一典则解组，$X(z)=(X_j^k(z))$ 为它们构成的典则解矩阵，则由前述可知，对于任何有限的 z，

$$\Delta(z)=\det X(z)\neq 0;$$

且若 $-\kappa_k$ 为 $X^k(z)$ 在 ∞ 处的阶数，则对于(1.24)定义的 $\Delta_0(z)$，有

$$\Delta_0(z)=z^{\kappa}\Delta(z)\quad 或即\ \Delta(z)=\det X(z)=z^{-\kappa}\Delta_0(z),\qquad(1.25)$$

其中 κ 由(1.23)给出. 此即表明，典则解矩阵 $X(z)$ 的行列式 $\Delta(z)$ 在 ∞ 处的阶数 $-\kappa$ 等于各个解 $X^k(z)$ 在 ∞ 处的阶数 $-\kappa_k$ 的和.

典则解组还有一个重要性质. 仍设 $X^1(z),X^2(z),\cdots,X^n(z)$ 为一典则解组. 任取一组多项式 $P_1(z),P_2(z),\cdots,P_n(z)$，其次数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$. 则

$$\chi(z)=P_1(z)X^1(z)+P_2(z)X^2(z)+\cdots+P_n(z)X^n(z)\qquad(1.26)$$

也是(1.13)的一个解，其右边各项在 $z=\infty$ 处的阶数依次为 $m_1-\kappa_1,m_2-\kappa_2,\cdots,m_n-\kappa_n$. 所以 $\chi(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶数不会超过

$$\nu=\max_k\{m_k-\kappa_k\}.\qquad(1.27)$$

但实际上这个阶数也不会低于 ν. 因为，(1.26)可改写为

$$\begin{pmatrix}\chi_1(z)\\ \chi_2(z)\\ \vdots\\ \chi_n(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1^1(z) & X_1^2(z) & \cdots & X_1^n(z)\\ X_2^1(z) & X_2^2(z) & \cdots & X_2^n(z)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ X_n^1(z) & X_n^2(z) & \cdots & X_n^n(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1(z)\\ P_2(z)\\ \vdots\\ P_n(z)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}z^{\kappa_1}X_1^1(z) & z^{\kappa_2}X_1^2(z) & \cdots & z^{\kappa_n}X_1^n(z)\\ z^{\kappa_1}X_2^1(z) & z^{\kappa_2}X_2^2(z) & \cdots & z^{\kappa_n}X_2^n(z)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ z^{\kappa_1}X_n^1(z) & z^{\kappa_2}X_n^2(z) & \cdots & z^{\kappa_n}X_n^n(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^{-\kappa_1}P_1(z)\\ z^{-\kappa_2}P_2(z)\\ \vdots\\ z^{-\kappa_n}P_n(z)\end{pmatrix},$$

把此式右边的系数矩阵记成 $Y(z)$，则 $\Delta_0(z)=\det Y(z)$ 在 $z=\infty$ 处 $\neq 0$，故在 ∞ 点附近满秩. 因此，在 $z=\infty$ 附近有

$$\begin{pmatrix}z^{-\kappa_1}P_1(z)\\ z^{-\kappa_2}P_2(z)\\ \vdots\\ z^{-\kappa_n}P_n(z)\end{pmatrix}=Y^{-1}(z)\begin{pmatrix}\chi_1(z)\\ \chi_2(z)\\ \vdots\\ \chi_n(z)\end{pmatrix}.$$

如果 $\chi(z)$ 在 ∞ 处的阶数低于 ν，因

$$\det Y^{-1}(\infty)=\frac{1}{\Delta_0(\infty)}\neq 0,$$

则上式右边的向量也将如此，而左边向量的阶数明明是 ν，矛盾. 所以 $\chi(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶数确实等于 ν.

于是我们有

引理6.1.3 若 $X^1(z),X^2(z),\cdots,X^n(z)$ 是(1.13)的一个典则解组，$P_1(z)$，$P_2(z),\cdots,P_n(z)$ 是一组多项式，则由(1.26)给出的向量 $\chi(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶数由(1.27)给出，其中 $-\kappa_1,-\kappa_2,\cdots,-\kappa_n$ 分别为 $X^1(z)$，$X^2(z),\cdots,X^n(z)$ 的阶数，$m_1,m_2,\cdots,m_n$ 分别为 $P_1(z),P_2(z),\cdots$，$P_n(z)$ 的次数(已设 $P_k(z)$ 不同时为零).

典则解组的这个性质还可这样来理解：其线性组合(1.26)（以多项式为系数）中各项在 ∞ 处的最高阶数不会相互抵消. 这个性质非常重要，以后会经常用到.

特别，我们还有下面的

推论6.1.1 若 $X(z)$ 是(1.13)的一个典则解矩阵，$P(z)=(P_1(z),P_2(z),\cdots,P_n(z))'$ 为一非零多项式向量，则向量 $X(z)P(z)$ 一定不是零向量.

6.1.4 齐次 R 问题的一般解与指标

有了典则解矩阵 $X(z)$，则齐次 R 问题(1.13)的一般解就很容易求出来了.

设我们要求(1.13)的解 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处为有限阶的. 由典则解 $X(z)$ 的性质，它是处处满秩的，且满足

$$X^+(t)=G(t)X^-(t),$$

或即

$$G(t)=X^+(t)[X^-(t)]^{-1}.$$

以此代入(1.13)，得

$$\Phi^+(t)=X^+(t)[X^-(t)]^{-1}\,\Phi^-(t),$$

或即

$$[X^+(t)]^{-1}\,\Phi^+(t)=[X^-(t)]^{-1}\,\Phi^-(t).$$

由此可见，$[X(z)]^{-1}\Phi(z)$ 为全平面中的全纯向量，在 ∞ 处为有限阶的. 因此由 Liouville 定理，它是一多项式向量 $P(z)=(P_1(z),P_2(z),\cdots,P_n(z))'$.

所以

$$\Phi(z) = X(z)P(z) = \sum_{k=1}^{n} P_k(z)X^k(z) \tag{1.28}$$

便是齐次 R 问题(1.13) 的一般解，其中 $P(z)$ 为任意多项式向量.

在以上的推导中，事实上我们没有用到典则解矩阵 $X(z)$ 在 $z=\infty$ 处的性状. 如果把 $X(z)$ 理解为任何正规解矩阵，以上结论也成立. 但若求解(1.13) 时，我们要求 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处至多为 m 阶(m 为一固定整数)，即所谓求解 R_m 问题，则典则解矩阵的优越性就显示出来了. 因为 $X^k(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶数为 $-\kappa_k$，若设 $P_k(z)$ 的次数为 λ_k，则由引理 6.1.3，由(1.28) 求出的 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处的阶数为$\max\limits_k\{\lambda_k-\kappa_k\}$，为使它不超过 m，必须而且只须

$$\lambda_k-\kappa_k\leqslant m\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

即 $\lambda_k\leqslant m+\kappa_k$ ①. 这里，和通常一样，如果 $m+\kappa_k<0$，则必须认为 $P_k\equiv 0$.

于是我们有

定理 6.1.2 齐次 R_m 问题(1.13) 的一般解以(1.28) 给出，其中 $X^k(z)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 为典则解组，而$P_k(z)$ 为(不超过)$m+\kappa_k$ 次的任意多项式. 特别，当 $m<\min\limits_k\{-\kappa_k\}$ 时，它只有零解.

特别有用的是 $m=-1$ 即要求 $\Phi(\infty)=0$ 的情况：

推论 6.1.2 齐次 R_{-1} 问题(1.13) (即要求 $\Phi(\infty)=0$) 当且仅当 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 中至少有一个为正数时才有非零解，且一般解以(1.28) 给出，这时 $P_k(z)$ 的次数为 κ_k-1.

从上面的定理使人易于猜想到，对于典则解组 $X^k(z)$ (它在 ∞ 处的阶数为$-\kappa_k$)，$k=1,2,\cdots,n$，其所相应的$\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 应该是不变的. 亦即，对于任何两个典则解矩阵 $X(z)$ 与 $Y(z)$ 来说，其相应的 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 应该是一样的，至多只是前后次序不同. 我们将证明这个猜想是正确的，于是可以称$\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 为问题(1.13) (或矩阵 $G(t)$) 的**偏指标**，而把$\kappa=\kappa_1+\kappa_2+\cdots+\kappa_n$ 称为它的**总指标**(或简称**指标**).

总指标 κ 的不变性比较明显，且容易直接从 $G(t)$ 计算出来. 事实上，设 $X(z)$ 是一典则解矩阵，仍记$\Delta(z)=\det X(z)$，它在全平面中(包括在 L 上的边值) 处处不等于零. 由$X^+(t)=G(t)X^-(t)$，立得

---

① 且若至少对于某个 k 等式成立，则 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处确有 m 阶.

$$\Delta^+(t) = \det G(t) \cdot \Delta^-(t),$$

于是

$$[\log \Delta^+(t)]_L = [\log \det G(t)]_L + [\log \Delta^-(t)]_L,$$

这里$[f(t)]_L$ 仍表示当t 沿L 正向环行一周时$f(t)$ 的改变量. 但$\Delta(z)$ 在D^+内全纯，$\neq 0$，故$[\log \Delta^+(t)]_L = 0$. 另一方面，由(1.25)，

$$\log \Delta(z) = -\kappa \log z + \log \Delta_0(z),$$

所以

$$[\log \Delta^-(t)]_L = -2\kappa\pi\mathrm{i} + [\log \Delta_0^-(t)]_L.$$

但因$\Delta_0(\infty) \neq 0$，所以$[\log \Delta_0^-(t)]_L = 0$. 这样，便得

$$0 = [\log \det G(t)]_L - 2\kappa\pi\mathrm{i},$$

亦即

$$\kappa = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\log \det G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}[\arg \det G(t)]_L. \tag{1.29}$$

这就是说，总指标κ 可由$G(t)$ 完全确定，而不依赖于任何典则解矩阵，且(1.29) 提供了κ 的具体计算方法.

偏指标$\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n$ 的不变性就不那么明显. 设$X(z)$ 与$Y(z)$ 是两个典则解矩阵，即$X^1(z), X^2(z), \cdots, X^n(z)$ 与$Y^1(z), Y^2(z), \cdots, Y^n(z)$ 是两组典则解组，它们相应的偏指标分别为$\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n$ 与$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，且设它们已分别如此排列，使

$$\kappa_1 \geqslant \kappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \kappa_n, \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n.$$

我们要证明$\kappa_k = \lambda_k \ (k = 1, 2, \cdots, n)$.

首先注意，$Y^k(z)$ 作为(1.13) 的一个解，一定可以写成

$$Y^k(z) = X^1(z)P_1^k(z) + X^2(z)P_2^k(z) + \cdots + X^n(z)P_n^k(z), \quad k = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.30}$$

其中$P^k(z) = (P_1^k(z), P_2^k(z), \cdots, P_n^k(z))'$ 为某些多项式向量.

我们假定

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_r > \kappa_{r+1}, \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_s > \lambda_{s+1};$$

当然，如果r 或s 等于n 时，相应的不等式就不存在. 我们要证明$\kappa_1 = \lambda_1$，且$r = s$. 在(1.30) 中取$k = 1, 2, \cdots, s$，注意到(1.30) 中右边在$z = \infty$ 处的阶数不会低于$-\kappa_1$，而左边的阶数为$-\lambda_1$，故$-\lambda_1 \geqslant -\kappa_1$ 即$\lambda_1 \leqslant \kappa_1$. 交换$X(z), Y(z)$ 的地位，立得$\lambda_1 = \kappa_1$.

这样，当$k = 1, 2, \cdots, s$ 时，(1.30) 右边只可能有前r 项：

$$Y^k(z) = X^1(z)P_1^k(z) + X^2(z)P_2^k(z) + \cdots + X^r(z)P_r^k(z), \quad k = 1, 2, \cdots, s, \tag{1.31}$$

且由引理 6.1.3，上式右边中诸 P_j^k 实际是常数.

设若 $s > r$，则向量

$$(P_1^1, P_2^1, \cdots, P_r^1), \ \cdots, \ (P_1^s, P_2^s, \cdots, P_r^s)$$

线性相关，即存在一组不全为 0 的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_s$，使

$$\sum_{i=1}^{s} c_i (P_1^i, P_2^i, \cdots, P_r^i) = 0,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{s} c_i Y^i(z) = 0.$$

但由推论 6.1.1，这不可能. 因此 $s \leqslant r$. 交换 X, Y 的地位，就可得知 $s = r$.

以上论证也适用于 r, s 中至少有一个等于 n 的情况. 以下设 $r = s < n$. 这样，我们就有

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_r = \lambda_1 = \cdots = \lambda_r, \quad \kappa_r > \kappa_{r+1}; \quad \lambda_r > \lambda_{r+1}.$$

又设

$$\kappa_{r+1} = \cdots = \kappa_{r+p} > \kappa_{r+p+1}, \quad \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_{r+q} > \lambda_{r+q+1},$$

而要求证明 $\kappa_{r+1} = \lambda_{r+1}$，$p = q$. 在(1.30) 中令 $k = r+1, r+2, \cdots, r+q$:

$$Y^k = X^1 P_1^k + X^2 P_2^k + \cdots + X^n P_n^k, \quad k = r+1, r+2, \cdots, r+q. \tag{1.32}$$

注意，这时不可能 $P_{r+1}^k = P_{r+2}^k = \cdots = P_n^k = 0$，因为否则的话，将有

$$Y^k = X^1 P_1^k + X^2 P_2^k + \cdots + X^r P_r^k, \quad k = r+1, r+2, \cdots, r+q,$$

但 $X^1, X^2, \cdots, X^r$ 可以写成 $Y^1, Y^2, \cdots, Y^r$ 的线性组合，于是得知：存在一组多项式 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{r+p}$ 不全为零，使得

$$Y^1 Q_1 + Y^2 Q_2 + \cdots + Y^{r+q} Q_{r+q} = 0,$$

但这是不可能的. 这样，比较(1.32) 两边在 ∞ 处的阶数，立刻可知 $-\lambda_{r+1} \geqslant -\kappa_{r+1}$. 交换 X, Y 的地位，便得 $\lambda_{r+1} = \kappa_{r+1}$. 再把(1.30) 应用于 $k = r+1, r+2, \cdots, r+q$:

$$Y^k = X^1 P_1^k + \cdots + X^r P_r^k + X^{r+1} P_{r+1}^k + \cdots + X^{r+p} P_{r+p}^k,$$
$$k = r+1, r+2, \cdots, r+q \tag{1.33}$$

(通过对 ∞ 处阶数的观察，上式右边不可能出现 $X^{r+p+1}, X^{r+p+2}, \cdots, X^n$ 的项)，且其中 $P_{r+1}^k, P_{r+2}^k, \cdots, P_{r+p}^k$ 为常数.

如果 $q > p$，则存在不全为 0 的常数 c_j，使

$$\sum_{j=r+1}^{r+q} c_j (P_{r+1}^j, P_{r+2}^j, \cdots, P_{r+p}^j) = 0,$$

于是

$$\sum_{j=r+1}^{r+q} c_j Y^j = \sum_{j=r+1}^{r+q} c_j \sum_{k=1}^{r} P_k^j X^k;$$

再注意 X^k 可由 $Y^k\ (k=1,2,\cdots,r)$ 线性表出，最后可得

$$\sum_{j=1}^{r+q} c_j^* Y^j = 0,$$

且 c_j^* 是不全为 0 的一组多项式. 这又不可能. 故知 $q \leqslant p$. 同样，交换 X,Y 的地位，便知 $q=p$.

以上推理对于 $r+p, r+q$ 中至少有一个等于 n 时也成立. 否则的话，又可继续以上推理. 这样不断进行下去，就可证得偏指标 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 的不变性.

6.1.5 函数组的相联齐次 R 问题

正如单个函数的 R 问题与其相联 R 问题间的关系一样，在函数组的 R 问题中也有类似的关系. 我们称

$$\Psi^+(t) = [G'(t)]^{-1}\,\Psi^-(t), \quad t \in L \tag{1.13$'$}$$

为问题(1.13) 的**相联齐次 R 问题**，这里 G' 是 G 的转置. 实际上(1.13) 与 (1.13)$'$ 是互为相联的.

我们有下列结果：

定理 6.1.3 若 $X(z)$ 为问题(1.31) 的典则矩阵，$\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 为其偏指标，则$[X'(z)]^{-1}$ 为(1.13)$'$ 的典则矩阵，$-\kappa_1,-\kappa_2,\cdots,-\kappa_n$ 为其偏指标. 由此，(1.13)$'$ 的总指标κ' 与(1.13) 的总指标 κ 间有关系式$\kappa'=-\kappa$.

证 仍记

$$X(z) = (X_j^k(z)), \quad \Delta(z) = \det X(z),$$

且已知 $\Delta(z)$ 处处不为零. 因此

$$Z(z) = [X'(z)]^{-1} = (Z_j^k(z)),$$

其中

$$Z_j^k(z) = \frac{\Delta_j^k(z)}{\Delta(z)}, \tag{1.34}$$

这里$\Delta_j^k(z)$ 为$\Delta(z)$ 中元 $X_j^k(z)$ 的代数余子式，它也是一个分区全纯函数，在 ∞ 处也是有限阶的. 由$X^+(t) = G(t)X^-(t)$ 立刻可知

$$Z^+(t) = [G'(t)]^{-1}\,Z^-(t);$$

此外，

$$\det Z(z)=\frac{1}{\Delta(z)}\neq 0\quad(\text{对任何有限的 } z).$$

因此，$Z(z)$ 是问题(1.13)′ 的正规解矩阵.

把(1.24) 中的 $\Delta_0(z)$ 的第 k 列、第 j 行的代数余子式记为$\Delta_{0j}^k(z)$，则由(1.25)，显然

$$\Delta_{0j}^k(z)=z^{\kappa-\kappa_k}\Delta_j^k(z),$$

于是，由(1.34)，

$$Z_j^k(z)=\frac{z^{\kappa_k-\kappa}\Delta_{0j}^k(z)}{z^{-\kappa}\Delta_0(z)}=\frac{\Delta_{0j}^k(z)}{\Delta_0(z)}z^{\kappa_k}.$$

但 $\Delta_{01}^k(z),\Delta_{02}^k(z),\cdots,\Delta_{0n}^k(z)$ 在 ∞ 处不可能同时为零(因为否则的话，将有 $\det\Delta_0(\infty)=0$)，故向量 $Z^k(z)$ 在 ∞ 处的阶数恰为 κ_k，而

$$\det(z^{-\kappa_k}Z_j^k(z))=z^{-\kappa}\det Z(z)=\frac{z^{-\kappa}}{\Delta(z)}=\frac{1}{\Delta_0(z)}$$

在 $z=\infty$ 处不等于零，故 $Z(z)$ 确实是(1.13)′ 的典则矩阵，且 $-\kappa_1,-\kappa_2,\cdots,-\kappa_n$ 为其偏指标. □

下面我们将进一步讨论(1.13) 与(1.13)′ 在 R_{-1} 中的解(即在 ∞ 处为 0 的解) 之间的关系.

仍设 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 为(1.13) 的偏指标，且已排列成 $\kappa_1\geqslant\kappa_2\geqslant\cdots\geqslant\kappa_n$. 又设

$$\kappa_1\geqslant\cdots\geqslant\kappa_r>0,\ 0>\kappa_{s+1}\geqslant\cdots\geqslant\kappa_n\quad(s>r),$$

而 $\kappa_{r+1}=\cdots=\kappa_s=0$①. 并记

$$\lambda=\kappa_1+\kappa_2+\cdots+\kappa_r,\quad \mu=-(\kappa_{s+1}+\kappa_{s+2}+\cdots+\kappa_n)\tag{1.35}$$

(当不存在正的偏指标时认为 $\lambda=0$，不存在负的偏指标时认为 $\mu=0$). 于是 λ,μ 均为非负整数，且

$$\kappa=\lambda-\mu.\tag{1.36}$$

前已看到，(1.13) 在 R_{-1} 中的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)P(z)=X^1(z)P_{\kappa_1-1}(z)+\cdots+X^r(z)P_{\kappa_r-1}(z),\tag{1.37}$$

其中 $P(z)=(P_{\kappa_1-1}(z),\cdots,P_{\kappa_r-1}(z),0,\cdots,0)'$，而 $P_{\kappa_j-1}(z)$ 为 κ_j-1 次任意多项式. (1.37) 中共含 λ 个任意常数系数 $C_1,C_2,\cdots,C_\lambda$，因此它又可改写为

$$\Phi(z)=C_1\Phi^1(z)+C_2\Phi^2(z)+\cdots+C_\lambda\Phi^\lambda(z),\tag{1.38}$$

其中 $\Phi^1(z),\Phi^2(z),\cdots,\Phi^\lambda(z)$ 为(1.13) 在 R_{-1} 中的 λ 个特解. 它们显然是线性无关的，因为如果有一组不全为零的常数 $C_1,C_2,\cdots,C_\lambda$ 使(1.38) 右边恒等于零，则回到(1.37) 时，便有一组不全为零的多项式 $P_{\kappa_1-1}(z),P_{\kappa_2-1}(z),\cdots,$

---

① 其中可能有些式子不出现，但这并不妨碍下面的论证.

$P_{\kappa_\lambda-1}(z)$ 使(1.37) 中的 $\Phi(z)$ 恒等于零. 但这是不可能的, 因为 $X^1(z)$, $X^2(z),\cdots,X^n(z)$ 是典则解组(由引理6.1.3). 所以, 问题(1.13) 在 R_{-1} 中共有 λ 个线性无关的解, 而 λ 是它的正的偏指标之和. 以上论证是在 $\lambda>0$ 的假定下作的, 但 $\lambda=0$ 时上述结论显然.

把以上结论应用于问题(1.13)′, 注意到它的偏指标为 $-\kappa_1,-\kappa_2,\cdots,-\kappa_n$, 其中为正者正好是 $-\kappa_{s+1},-\kappa_{s+2},\cdots,-\kappa_n$, 而其和为 μ. 所以, (1.13)′ 在 R_{-1} 中共有 μ 个线性无关的解, 且与(1.37) 类似, 其一般解为

$$\Psi(z)=[X'(z)]^{-1}Q(z), \tag{1.37'}$$

其中 $Q(z)=(0,\cdots,0,Q_{-\kappa_{s+1}-1},\cdots,Q_{-\kappa_n-1})$, 这里 Q 的下标仍表示任意多项式的次数.

于是我们得到

定理6.1.4 齐次 R_{-1} 问题的线性无关解的个数等于正的偏指标之和. 互为相联的问题(1.13) 与 (1.13)′ 在 R_{-1} 中线性无关解的个数之差等于 (1.13) 的总指标 κ.

6.1.6 函数组的非齐次 R 问题

现在我们来求解非齐次 R 问题

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \quad t\in L, \tag{1.39}$$

其中 $G(t),\Phi^\pm(t)$ 仍如前, 而 $g(t)=(g_1(t),g_2(t),\cdots,g_n(t))'\in H$ 为 L 上的一已知向量. 并设仍要求未知向量 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处有有限阶.

仍设 $X(z)$ 为与(1.39) 相应的齐次问题(1.13) 的典则解矩阵, 也称为(1.39) 或 $G(t)$ 的**典则矩阵**, 其总指标 κ 与偏指标 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 也仍分别称为(1.39) 的**总指标与偏指标**. 由于

$$G(t)=X^+(t)[X^-(t)]^{-1},$$

以此代入(1.39), 后者就可改写为

$$[X^+(t)]^{-1}\Phi^+(t)=[X^-(t)]^{-1}\Phi^-(t)+[X^+(t)]^{-1}g(t).$$

于是由(1.12), 得知

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{[X^+(t)]^{-1}g(t)}{t-z}dt+X(z)P(z), \quad z\overline{\in}L, \tag{1.40}$$

其中 $P(z)$ 为任意多项式(列) 向量. 此即 R 问题(1.39) 的一般解. 故有

定理6.1.5 R 问题(1.39) (在 $z=\infty$ 处有有限阶) 的一般解以(1.40) 给出, 其中 $X(z)$ 为 $G(t)$ 的典则矩阵, 而 $P(z)$ 为任意多项式向量.

从应用观点来看，在R_{-1}中(即解在∞处为零)求解(1.39)更为重要. 这只要说明在(1.40)中，如何选择$P(z)$就能达到目的.

为行文简便起见，记

$$[X^{+}(t)]^{-1}g(t)=h(t)=(h_1(t),h_2(t),\cdots,h_n(t))',$$

则(1.40)可改写为

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=X(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{h(t)}{t-z}dt+P(z)\right]\\&=X^1(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{h_1(t)}{t-z}dt+P_1(z)\right]+\cdots\\&\quad+X^n(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{h_n(t)}{t-z}dt+P_n(z)\right].\end{aligned}$$

为使$\Phi(\infty)=0$，必须而且只须上式右边每一项的阶数不高于-1(注意到上式中含$h_k(z)$的积分的各项在∞处为零，并再应用引理6.1.3即可得知). 注意到$X^k(z)$在$z=\infty$处的阶数为$-\kappa_k$，而在$z=\infty$附近，

$$\int_L\frac{h_k(t)}{t-z}dt=-\frac{1}{z}\int_L h_k(t)dt-\frac{1}{z^2}\int_L th_k(t)dt-\frac{1}{z^3}\int_L t^2h_k(t)dt-\cdots,$$

所以对于相应于$\kappa_k\geqslant 0$的项而言，必须取$P_k(z)$的次数至多为κ_k-1 ($\kappa_k=0$时$P_k(z)\equiv 0$)，而对$\kappa_k<0$的项而言，除应取$P_k(z)\equiv 0$外，还应满足条件

$$\int_L t^{\alpha}h_k(t)dt=0,\quad \alpha=0,1,\cdots,-\kappa_k-1. \tag{1.41}$$

这时，把P_k统一改写为P_{κ_k-1}，其下标表示其次数(次数小于零时恒为零)，则(1.40)式仍可用，其中

$$P(z)=(P_{\kappa_1-1}(z),P_{\kappa_2-1}(z),\cdots,P_{\kappa_n-1}(z))'.$$

另一方面，可解条件(1.41)还可改写为

$$\int_L Q_{-\kappa_k-1}(t)h_k(t)dt=0\quad(\text{对}\ \kappa_k<0\ \text{的}\ k),$$

其中$Q_{-\kappa_k-1}(t)$为$-\kappa_k-1$次任意多项式. 如果记

$$Q(z)=(Q_{-\kappa_1-1}(z),Q_{-\kappa_2-1}(z),\cdots,Q_{-\kappa_n-1}(z))',$$

其中下标小于零的多项式为零，则上式还可写成

$$\int_L Q'(t)h(t)dt=0 \tag{1.41$'$}$$

(注意这里添加了一些当$\kappa_k\geqslant 0$时的平凡等式).

于是我们得到

定理6.1.6 问题(1.39)在R_{-1}中求解(即要求解在∞处等于零)时，可解条件为

$$\int_L Q'(t)[X^+(t)]^{-1}g(t)\mathrm{d}t = 0, \tag{1.42}$$

当它满足时其一般解以(1.40) 给出，这里

$$P(z) = (P_{\kappa_1-1}(z), P_{\kappa_2-1}(z), \cdots, P_{\kappa_n-1}(z))',$$
$$Q(z) = (Q_{-\kappa_1-1}(z), Q_{-\kappa_2-1}(z), \cdots, Q_{-\kappa_n-1}(z))',$$

其中各多项式分量的下标表示其次数(小于零时恒为零)，而 $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n$ 为问题的偏指标.

推论 6.1.3 问题(1.39) 在 R_{-1} 中当所有偏指标 $\kappa_k \geqslant 0$ 时恒可解.

最后我们注意，(1.42) 还可改写成

$$\int_L g'(t)[X^{+\prime}(t)]^{-1}Q(t)\mathrm{d}t = 0, \tag{1.43}$$

而(1.39) 的相应齐次问题的相联问题(1.13)$'$ 的典则解矩阵为$[X'(z)]^{-1}$，偏指标为$-\kappa_1, -\kappa_2, \cdots, -\kappa_n$ (定理 6.1.3). 由(1.37) 知，这个相联齐次问题在 R_{-1} 中的一般解为

$$\Psi(z) = [X'(z)]^{-1}Q(z),$$

故

$$\Psi^+(t) = [X^{+\prime}(t)]^{-1}Q(t),$$

从而(1.43) 又可改写为

$$\int_L g'(t)\Psi^+(t)\mathrm{d}t = 0 \quad 或 \int_L \Psi^{+\prime}(t)g(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{1.44}$$

且因这时相联齐次问题在 R_{-1} 中共有 μ 个线性无关的解(μ 为(1.39) 的所有负偏指标之和变号)，故上式中实际上含有 μ 个线性无关条件.

于是又得

定理 6.1.7 R_{-1} 问题(1.39) 当且仅当 $g(t)$ 与它的相联齐次问题在 R_{-1} 中的一切解的正边值正交(即满足(1.44) 式) 时可解，这里共有 μ 个独立的可解条件.

此定理又可看做单个函数的 R_{-1} 问题结果的推广.

习 题

试求解 R_0 问题(即在 ∞ 处有界的解) (1.39). 注意这时定理 6.1.6 中，

$$P(z) = (P_{\kappa_1}(z), P_{\kappa_2}(z), \cdots, P_{\kappa_n}(z))',$$
$$Q(z) = (Q_{-\kappa_1-2}(z), Q_{-\kappa_2-2}(z), \cdots, Q_{-\kappa_n-2}(z))'.$$

6.2 函数组的 Hilbert 边值问题和复合边值问题

6.2.1 典则矩阵的一般表示

为了后面求解 Hilbert 边值问题的需要，本段先讨论对于一个 $n\times n$ 满秩矩阵 $G(t)$，其典则矩阵的一般表示问题. 亦即，若已知 $G(t)$ 的一个典则矩阵 $X(z)$，如何用它表示出 $G(t)$ 的任何典则矩阵.

设 $X(z),Y(z)$ 是 $G(t)$ 的两个典则矩阵，亦即，$X^1(z)$，$X^2(z),\cdots,X^n(z)$；$Y^1(z),Y^2(z),\cdots,Y^n(z)$ 是(1.13)的两个典则解组. 用分块矩阵记法，可写

$$\left.\begin{aligned}X(z)&=(X^1(z),X^2(z),\cdots,X^n(z));\\Y(z)&=(Y^1(z),Y^2(z),\cdots,Y^n(z)).\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

设 $G(t)$ 的偏指标为 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$，且设它们已排列成单调下降的次序

$$\begin{aligned}\kappa_1&=\cdots=\kappa_{k_1}>\kappa_{k_1+1}=\cdots=\kappa_{k_1+k_2}>\kappa_{k_1+k_2+1}=\cdots>\cdots\\&=\kappa_{k_1+\cdots+k_{r-1}}>\kappa_{k_1+\cdots+k_{r-1}+1}=\cdots=\kappa_{k_1+\cdots+k_r}(=\kappa_n).\end{aligned}$$

当然 $X^k(z),Y^k(z)$ 也作了相应的排列，它们在 ∞ 处的阶数都是 $-\kappa_k$.

每一 Y^k 可以写成 $X^1,X^2,\cdots,X^n$（以多项式为系数）的线性组合. 但注意到 $Y^1,Y^2,\cdots,Y^{k_1}$ 与 $X^1,X^2,\cdots,X^{k_1}$ 在 ∞ 处的阶数都是 $-\kappa_1$，所以，由引理 6.1.3，必然有

$$\begin{aligned}Y^1&=P_1^1X^1+P_2^1X^2+\cdots+P_{k_1}^1X^{k_1},\\&\cdots,\\Y^{k_1}&=P_1^{k_1}X^1+P_2^{k_1}X^2+\cdots+P_{k_1}^{k_1}X^{k_1},\end{aligned}$$

其中 $P_j^i\ (i,j=1,2,\cdots,k_1)$ 都是常数. 它们也可写成

$$(Y^1,Y^2,\cdots,Y^{k_1})=(X^1,X^2,\cdots,X^{k_1})Q_{11},\tag{2.2}$$

其中已令

$$Q_{11}=\begin{pmatrix}P_1^1&P_1^2&\cdots&P_1^{k_1}\\P_2^1&P_2^2&\cdots&P_2^{k_1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\P_{k_1}^1&P_{k_1}^2&\cdots&P_{k_1}^{k_1}\end{pmatrix}.\tag{2.3}$$

且因 $X^1,X^2,\cdots,X^{k_1}$ 反过来也可一意地表示成 $Y^1,Y^2,\cdots,Y^{k_1}$ 的线性组合，故

$\det Q_{11} \neq 0$.

再考虑 $Y^{k_1+1}, Y^{k_1+2}, \cdots, Y^{k_1+k_2}$，它们一定是 $X^1, X^2, \cdots, X^{k_1+k_2}$ 的线性组合：

$$Y^{k_1+1} = P_1^{k_1+1} X^1 + \cdots + P_{k_1}^{k_1+1} X^{k_1} + P_{k_1+1}^{k_1+1} X^{k_1+1} + \cdots + P_{k_1+k_2}^{k_1+1} X^{k_1+k_2},$$
$$\cdots,$$
$$Y^{k_1+k_2} = P_1^{k_1+k_2} X^1 + \cdots + P_{k_1}^{k_1+k_2} X^{k_1} + P_{k_1+1}^{k_1+k_2} X^{k_1+1} + \cdots + P_{k_1+k_2}^{k_1+k_2} X^{k_1+k_2},$$

或写成

$$(Y^{k_1+1}, \cdots, Y^{k_1+k_2}) = (X^1, \cdots, X^{k_1}, X^{k_1+1}, \cdots, X^{k_1+k_2}) \begin{pmatrix} Q_{12} \\ Q_{22} \end{pmatrix}, \qquad (2.4)$$

其中已令

$$Q_{12} = \begin{pmatrix} P_1^{k_1+1} & \cdots & P_1^{k_1+k_2} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{k_1}^{k_1+1} & \cdots & P_{k_1}^{k_1+k_2} \end{pmatrix}, \quad Q_{22} = \begin{pmatrix} P_{k_1+1}^{k_1+1} & \cdots & P_{k_1+1}^{k_1+k_2} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{k_1+k_2}^{k_1+1} & \cdots & P_{k_1+k_2}^{k_1+k_2} \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

且根据 ∞ 处阶数的考虑，Q_{12} 中各个元都是 $\kappa_{k_1} - \kappa_{k_1+k_2}$ 次的多项式，而 Q_{22} 中的元都是常数. 将 $X^1, X^2, \cdots, X^{k_1}$ 写为 $Y^1, Y^2, \cdots, Y^{k_1}$ 的线性组合，代入 (2.4)，便得 $X^{k_1+1}, X^{k_1+2}, \cdots, X^{k_1+k_2}$ 的一个方程组. 由于它们可一意地用 $Y^1, Y^2, \cdots, Y^{k_1+k_2}$（以多项式为系数）的线性组合表出，故知 $\det Q_{22} \neq 0$.

如此继续下去，并逐个地把(2.2)，(2.4) 等拼接起来，最后可得

$$(Y^1, Y^2, \cdots, Y^n) = (X^1, X^2, \cdots, X^n) Q(z)$$

或即

$$Y(z) = X(z) Q(z), \qquad (2.6)$$

这里

$$Q(z) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1r} \\ & Q_{22} & \cdots & Q_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & Q_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \cdots & Q_{rr} \end{pmatrix}, \qquad (2.7)$$

且 Q_{ij} 为 $k_i \times k_j$ 矩阵，其元为 $\kappa_{k_1+\cdots+k_i} - \kappa_{k_1+\cdots+k_j}$ 次多项式（当这一次数小于零时，认为它恒等于零）. 且显然

$$\det Q(z) = \det Q_{11} \cdot \det Q_{22} \cdot \cdots \cdot \det Q_{rr} \neq 0 \qquad (2.8)$$

为一常数.

(2.6) 便是典则矩阵的一般表示式.

习 题

1. 试证：如果$X(z)$是$G(t)$的典则矩阵，$Q(z)$由(2.7)给出，其中Q_{ij}的性质如正文所述，且(2.8)成立，则由(2.6)定义的$Y(z)$也是$G(t)$的典则矩阵.

2. 在(2.7)中，如果把矩阵写成(q_{ij}) $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则$q_{ij}(z)$是$\kappa_i-\kappa_j$次多项式(次数小于零的多项式算做恒等于零).

6.2.2 函数组的齐次 H 问题

本段讨论函数组的齐次 Hilbert 边值问题，即

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Phi^+(t)\}=0,\quad t\in L,\tag{2.9}$$

这里L为单位圆周$|t|=1$(对更一般的Lyapunov封闭曲线L，可化归这一情况，参看2.6.1段)，已取定反时针向为正向，$\Phi^+(t)$为单位圆$|z|<1$中n维全纯向量$\Phi(z)$的边值，$a(t)$,$b(t)$都是$n\times n$实矩阵，$\in H$，且只限于正则型情况，即$\det[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\neq 0$于$L$上. 我们也设$\Phi^+(t)\in H$. 如果记$\Phi^+(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t)$，则(2.9)也可写成

$$a(t)u(t)-b(t)v(t)=0,\quad t\in L.\tag{2.10}$$

(2.9)或(2.10)实际上是$\Phi^+(t)$的n个分量$\Phi_j^+(t)=u_j(t)+\mathrm{i}v_j(t)$ $(j=1,2,\cdots,n)$函数组的边值问题.

问题的求解方法类似于单个函数的情况.

首先，类似于2.6.2段，要将$\Phi(z)$对称扩张到单位圆的外域$|z|>1$，成为

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar z}\right)},\tag{2.11}$$

于是构成一分区全纯向量

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi(z), & \text{当}|z|<1\text{时};\\ \Phi_*(z), & \text{当}|z|>1\text{时}.\end{cases}\tag{2.12}$$

于是，对于这一扩张了的$\Phi(z)$，有$\Phi^-(t)=\Phi_*^-(t)=\overline{\Phi^+(t)}$，而(2.9)可写成

$$[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Phi^+(t)+[a(t)-\mathrm{i}b(t)]\Phi^-(t)=0,$$

亦即，成为齐次 R 问题

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\tag{2.13}$$

其中

$$G(t)=-[a(t)+\mathrm{i}b(t)]^{-1}[a(t)-\mathrm{i}b(t)].\tag{2.14}$$

不过要注意，第一，(2.13)应该在R_0中求解，即要求$\Phi(z)$在$z=\infty$处有

界，这是由 $|z|<1$ 中的 $\Phi(z)$ 对称扩张的必然结果；第二，(2.13) 的解 $\Phi(z)$ 在 $|z|<1$ 中的部分一般还不是(2.9) 的解，而必须满足条件 $\Phi_*(z)=\Phi(z)$，这里 $\Phi_*(z)$ 是分区全纯向量 $\Phi(z)$ 用(2.11) 对称运算的结果. 或者，也是一样，求出(2.13) 的解 $\Phi(z)$ 后，作对称运算得 $\Phi_*(z)$，则

$$\Omega(z)=\frac{1}{2}[\Phi(z)+\Phi_*(z)] \tag{2.15}$$

就是(2.9) 的解①. 这是因为，在(2.13) 中两边取共轭值，注意到 $\overline{\Phi^{\pm}(t)}=\Phi_*^{\mp}(t)$，故有

$$\Phi_*^-(t)=\overline{G(t)}\Phi_*^+(t),$$

亦即

$$\Phi_*^+(t)=[\overline{G(t)}]^{-1}\Phi_*^-(t),$$

而由(2.14)，

$$[\overline{G(t)}]^{-1}=-\{[a(t)+ib(t)]^{-1}[a(t)-ib(t)]\}=G(t),$$

所以 $\Phi_*(z)$ 也是(2.13) 的解，从而(2.15) 也是它的解，且 $\Omega_*(z)=\Omega(z)$，因为 $\Phi_{**}(z)=\Phi(z)$. 这些都与 2.6 节类似.

现设 $X(z)$ 是(2.13) 的典则解矩阵，$\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 为其偏指标，且如上段已按单调下降的次序排列. 它们也称为问题(2.9) 的**偏指标**. 同样，$\kappa=\sum_{k=1}^{n}\kappa_k$ 也称为其**总指标**；且可知

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}\arg[\det G(t)]_L=\frac{1}{\pi}\arg\{\det[a(t)-ib(t)]\}_L,$$

故为一偶数.

由定理 6.1.2 (取 $m=0$)，(2.13) 在 R_0 中的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)P(z), \tag{2.16}$$

其中 $P(z)$ 为多项式向量

$$P(z)=(P_{\kappa_1}(z),P_{\kappa_2}(z),\cdots,P_{\kappa_n}(z))', \tag{2.17}$$

这里 $P_\nu(z)$ 表示 ν 次任意多项式($\nu<0$ 时 $P_\nu\equiv 0$).

为了要求出齐次 H 问题(2.9) 的解，必须要求

$$[X(z)P(z)]_*=X(z)P(z),$$

亦即，

$$X_*(z)P_*(z)=X(z)P(z). \tag{2.18}$$

① (2.15) 右边的因子 1/2 可以省去. 但对于后面非齐次 H 问题而言，它就不能省去.

设偏指标中非负者为 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_m$，即

$$\kappa_1 \geqslant \kappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \kappa_m \geqslant 0 > \kappa_{m+1} \geqslant \cdots \geqslant \kappa_n.$$

又记

$$P_{\kappa_k}(z) = C_0^k z^{\kappa_k} + C_1^k z^{\kappa_k - 1} + \cdots + C_{\kappa_k}^k, \quad k = 1,2,\cdots,m; \tag{2.19}$$

其中 C_j^k 是一些任意常数，则

$$\begin{aligned} P_{\kappa_k *}(z) &= \overline{P_{\kappa_k}\left(\frac{1}{\bar z}\right)} = \bar C_0^k z^{-\kappa_k} + \bar C_1^k z^{-\kappa_k+1} + \cdots + \bar C_{\kappa_k}^k \\ &= z^{-\kappa_k}(\bar C_{\kappa_k}^k z^{\kappa_k} + \bar C_{\kappa_k-1}^k z^{\kappa_k-1} + \cdots + \bar C_0^k), \\ &\qquad k = 1,2,\cdots,m, \end{aligned} \tag{2.20}$$

而当 $k > m$ 时，$P_{\kappa_k}(z)$ 与 $P_{\kappa_k *}(z)$ 都恒等于零.

为了满足(2.18)，关键是要算出 $X_*(z)$. 我们希望通过$X(z)$ 来表示它. 首先，因

$$X^+(t) = G(t)X^-(t),$$

如(2.15) 式下面一段所述，由此立即有

$$X_*^+(t) = G(t)X_*^-(t).$$

又显然 $X_*(z)$ 在有限远点除 $z=0$ 外处处满秩，而在 $z=0$ 处一般无意义(而在 $z=\infty$ 处是有限阶的). 但它一般并不是典则解矩阵. 我们要证明，

$$z^{-\kappa_1}X_*^1(z), z^{-\kappa_2}X_*^2(z), \cdots, z^{-\kappa_n}X_*^n(z) \tag{2.21}$$

是一典则解组，亦即

$$X_*(z)(z^{-\kappa_k}) \tag{2.22}$$

为一典则矩阵，这里已引进对角矩阵

$$(z^{\kappa_k}) = \begin{pmatrix} z^{\kappa_1} & & & 0 \\ & z^{\kappa_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z^{\kappa_n} \end{pmatrix}, \quad (z^{-\kappa_k}) = (z^{\kappa_k})^{-1}. \tag{2.23}$$

先证(2.22) 是一正规解矩阵. 当 $z \neq 0$ 时它是满秩的无问题. 现考虑 $z=0$ 的情况. 记 $\Delta_0(z)$ 如(1.24)，现可写成

$$\Delta_0(z) = \det[X(z)(z^{\kappa_k})].$$

由于 $X(z)$ 是典则解矩阵，故 $\Delta_0(\infty) \neq 0$. 在上式中作对称扩张运算，得

$$\Delta_{0*}(z) = \det[X_*(z)(z^{-\kappa_k})],$$

而 $\Delta_{0*}(z) = \overline{\Delta_0\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$，因而 $\Delta_{0*}(0) = \overline{\Delta_0(\infty)} \neq 0$. 所以(2.22) 在 $z=0$ 处也是满秩的.

如果能证明(2.21) 中诸向量在 ∞ 处的阶数分别为 $-\kappa_1, -\kappa_2, \cdots, -\kappa_n$，

则就证明了它们是典则解组，亦即(2.22) 是典则矩阵. 注意到 $X^k(0)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 不会是零向量，因为否则的话，$\det X(z)$ 就会等于零，这与 $X(z)$ 为典则矩阵相矛盾. 所以 $X_*^k(\infty)=\overline{X^k(0)}$ 也不是零向量，从而 $z^{-\kappa_k}X_*^k(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶数正好是 $z^{-\kappa_k}$.

既然(2.22) 是典则矩阵，由(2.6)，它一定可以写成

$$X_*(z)(z^{-\kappa_k})=X(z)Q(z), \tag{2.24}$$

其中 $Q(z)$ 是具有(2.7) 之形的某矩阵，其元都是多项式，且矩阵块 Q_{ij} 中的元(至多)为 $\kappa_{k_1+k_2+\cdots+k_i}-\kappa_{k_1+k_2+\cdots+k_j}$ 次多项式(次数小于0时恒等于0)；特别是，Q_{ii} 中的元都是常数，且 $\det Q_{ii}\neq 0$，从而 $\det Q(z)$ 为一非零常数(还可参看上段习题 2).

由(2.24) 虽然可得出 $X_*(z)=X(z)Q(z)(z^{\kappa_k})$，但此式较为复杂，不便于应用. 我们希望能从一个已给典则矩阵 $X(z)$ 出发，作出一个特殊典则矩阵 $Y(z)$，使得 $Y_*(z)$ 与 $Y(z)$ 之间类似于(2.24) 式中的 $Q(z)$ 为单位矩阵，即希望

$$Y_*(z)=Y(z)(z^{\kappa_k}) \tag{2.25}$$

成立，则此表示式就简单得多. $Y(z)$ 称为**规范化典则矩阵**.

为此，我们令

$$Y(z)=[X(z)\delta]_*(z^{-\kappa_k})+X(z)\delta, \tag{2.26}$$

其中

$$\delta=\begin{bmatrix}\delta_1 & & & 0\\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta_n\end{bmatrix} \tag{2.27}$$

为一待定的常数对角矩阵. 容易验证，(2.26) 定义的 $Y(z)$ 满足条件(2.25)：

$$\begin{aligned}Y_*(z)&=[X(z)\delta]_{**}(z^{-\kappa_k})_*+[X(z)\delta]_*\\&=X(z)\delta(z^{\kappa_k})+[X(z)\delta]_*\\&=Y(z)(z^{\kappa_k}).\end{aligned}$$

现在的问题是要选取 δ 使得(2.26) 为典则矩阵. 利用 $X_*(z)$ 的表示式(2.24)，注意到 $\delta_*=\bar{\delta}$，则

$$\begin{aligned}Y(z)&=X_*(z)\bar{\delta}(z^{-\kappa_k})+X(z)\delta\\&=X(z)Q(z)(z^{\kappa_k})\bar{\delta}(z^{-\kappa_k})+X(z)\delta\\&=X(z)Q(z)\bar{\delta}+X(z)\delta\\&=X(z)[Q(z)\gamma+E]\delta,\end{aligned}$$

其中

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & 0 \\ & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_n \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \frac{\overline{\delta}_k}{\delta_k}. \tag{2.28}$$

对角常数矩阵 γ 的元 γ_k 皆有 $|\gamma_k| = 1$. 待定常数 δ_k 可换作 γ_k，但 $|\gamma_k| = 1$. 矩阵

$$\widetilde{Q}(z) = Q(z)\gamma + E$$

与矩阵 $Q(z)$ 相比较，其各个元(为多项式)的次数没有改变(确切地说，次数没有升高)，而且 $\det\widetilde{Q}(z)$ 仍为一常数. 所以，我们只要适当选取 $\delta_k(\neq 0)$ 或 γ_k，使得

$$\det\widetilde{Q}(z) = \det[Q(z)\gamma + E] \neq 0$$

(这种选法显然有无限多种)，便可保证 $Y(z)$ 是一典则矩阵(参看上段习题 1)，且满足(2.25).

在(2.18)中把 $X(z)$ 换成这样作出的典则矩阵 $Y(z)$，该式就成为

$$Y(z)P(z) = Y_*(z)P_*(z) = Y(z)(z^{\kappa_k})P_*(z).$$

但 $Y(z)$ 为满秩的，此即

$$P(z) = (z^{\kappa_k})P_*(z),$$

或即

$$P_{\kappa_k}(z) = z^{\kappa_k}P_{\kappa_k *}(z).$$

再由(2.19),(2.20)，可知应有

$$C_j^k = \overline{C}_{\kappa_k - j}^k, \quad j = 0,1,\cdots,\kappa_k;\ k = 1,2,\cdots,m. \tag{2.29}$$

这便是 $P_{\kappa_k}(z)$ 的诸系数间应满足的条件.

于是我们得到

定理 6.2.1 齐次 H 问题(2.9)在正则型情况 $\det[a(t) + ib(t)] \neq 0$ 的情况下，一般解由

$$\Phi(z) = Y(z)P(z) \tag{2.30}$$

给出，其中 $Y(z)$ 为适合条件(2.25)的一规范化典则矩阵，$P(z)$ 为一多项式向量(2.17)，$P_{\kappa_k}(z)$ 的次数不超过 κ_k (若 $\kappa_k < 0$ 则恒为零)，且写成(2.19)时其系数满足条件(2.29)，这里已设偏指标排列成

$$\kappa_1 \geqslant \kappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \kappa_m \geqslant 0 > \kappa_{m+1} \geqslant \cdots \geqslant \kappa_n.$$

推论 6.2.1 如果 H 问题(2.9)的所有偏指标为负数，则它只有零解.

习　题

试证：齐次 H 问题(2.9) 在实域中共有 $\kappa_1+\kappa_2+\cdots+\kappa_m+m$ 个线性无关的解(线性无关性也是在实系数意义下讲的).

6.2.3　函数组的非齐次 H 问题

现在来讨论非齐次的 Hilbert 问题：

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Phi^+(t)\}=c(t),\quad t\in L, \tag{2.31}$$

这里 $c(t)\in H$ 为已给的 n 维实向量，其他记号均同上段，且仍限于正则型情况：$\det[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\neq 0$.

相应于(2.31) 的齐次 H 问题的偏指标 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 与总指标 κ 也分别称为它本身的偏指标与总指标.

和上段类似，把 $\Phi(z)$ 经对称扩张后，问题(2.31) 可化为 R_0 问题

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L, \tag{2.32}$$

其中 $G(t)$ 仍由(2.14) 给出，而

$$g(t)=2[a(t)+\mathrm{i}b(t)]^{-1}c(t). \tag{2.33}$$

同上段理由，当求出(2.32) 的解 $\Phi(z)$ 后，(2.31) 的解就由(2.15) 给出. (2.31) 的相应齐次问题的一般解已如上段可以求出，所以现在只要求出(2.31) 的一个特解就行了.

问题(2.32) 在 R_0 中可解的必要充分条件是(参看 6.1.6 段习题)

$$\int_L Q'(t)[Y^+(t)]^{-1}g(t)\mathrm{d}t=0, \tag{2.34}$$

这里 $Y(z)$ 是 $G(t)$ 的一典则矩阵(不妨取成上段中作出的规范化典则矩阵 $Y(z)$)，而

$$Q'(z)=(Q_{-\kappa_1-2}(z),Q_{-\kappa_2-2}(z),\cdots,Q_{-\kappa_n-2}(z))$$

为一多项式(行) 向量，其中 $Q_{-\kappa_k-2}(z)$ 为次数不超过 $-\kappa_k-2$ 的任意多项式(次数小于 0 时恒为 0). 当条件(2.34) 满足时，由(1.40)，

$$\Psi(z)=\frac{Y(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{[Y^+(t)]^{-1}g(t)}{t-z}\mathrm{d}t,\quad z\,\overline{\in}\,L \tag{2.35}$$

是问题(2.32) 在 R_0 中的一个特解. 仿上段中的说明，于是可得

$$\Omega(z)=\frac{1}{2}[\Psi(z)+\Psi_*(z)] \tag{2.36}$$

就是 H 问题(2.31) 的一个特解. 再把它加上相应齐次 H 问题的一般解(2.30)，便可得到(2.31) 的一般解.

习　题

1. 试验证由(2.36)给出的 $\Omega(z)$ 确为(2.31)的一个特解.
2. 试利用 $Y(z)$ 的特点(2.25)化简(2.36)中的 $\Omega(z)$.
3. 试说明可解条件(2.34)中共有多少个(在实域中)线性无关的条件.

6.2.4　函数组的 RH 问题

在 2.7 节中讨论过的复合边值问题即 RH 问题，可以推广到函数组的情形.

仍设 L 为单位圆周 $|t|=1$（也可以是一 Lyapunov 封闭曲线，这时经过保形变换，可化归这一情形），取定其反时针向为正向，而 Γ 为单位圆内的一条光滑封闭曲线①，取定其顺时针向为正向. 单位圆内域记为 D，Γ 的内域记为 D_0.

D 中函数组的**复合边值问题即 RH 问题**可以表述为：求在 D 内的 n 维分区全纯向量(以 Γ 为跳跃曲线)，使它在 Γ 的两侧满足边值条件

$$\Phi^+(\tau)=G(\tau)\Phi^-(\tau)+g(\tau),\quad \tau\in\Gamma, \tag{2.37}$$

而在 L 上满足边值条件

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Phi^+(t)\}=c(t),\quad t\in L, \tag{2.38}$$

其中 $G(\tau),a(t)+\mathrm{i}b(t)$ 均为处处满秩的 $n\times n$ 矩阵，$\in H$，而 $g(\tau),c(t)$ 均为 $\in H$ 的 n 维(列)向量. 并设所求向量的边值 $\Phi^{\pm}(\tau),\Phi^+(t)$ 也都 $\in H$.

求解的方法类似于 2.7 节中的消去法.

先作 $G(\tau)$ 的典则矩阵 $X(z)$. 再令

$$\Psi(z)=\frac{X(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{[X^+(\tau)]^{-1}g(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\quad z\overline{\in}\Gamma. \tag{2.39}$$

它是 R 问题(2.37)在 ∞ 处阶数有限的一个特解. 限制 z 在 $\overline{D}$ 中时，$\Psi(z)$ 是 D 中的分区全纯向量，以 Γ 为跳跃曲线，在 L 上有边值 $\Psi(t)\in H$. 把未知向量 $\Phi(z)$ 用下式变换成新的未知向量 $\Omega(z)$：

$$\Phi(z)=\Psi(z)+X(z)\Omega(z). \tag{2.40}$$

由于 $X^+(\tau)=G(\tau)X^-(\tau)$ $(\tau\in\Gamma)$，且 $\Psi(z)$ 满足(2.37)，故

$$\begin{aligned}\Phi^+(\tau)&=\Psi^+(\tau)+X^+(\tau)\Omega^+(\tau)\\&=G(\tau)\Psi^-(\tau)+g(\tau)+G(\tau)X^-(\tau)\Omega^+(\tau)\\&=G(\tau)[\Psi^-(\tau)+X^-(\tau)\Omega^+(\tau)]+g(\tau),\quad \tau\in\Gamma.\end{aligned}$$

① Γ 也可以是有限条互不相交的光滑封闭曲线的集合.

如果 $\Phi(z)$ 是原 RH 问题的解，则

$$\Phi^+(\tau)=G(\tau)[\Psi^-(\tau)+X^-(\tau)\Omega^-(\tau)]+g(\tau),\quad \tau\in\Gamma.$$

比较上面两式，并注意到$X^-(\tau)$满秩，故知$\Omega^+(\tau)=\Omega^-(\tau)$. 亦即，$\Omega(z)$在$D$内全纯，在$\overline{D}$上$\in H$.

反过来，如果有一$\Omega(z)$在D内全纯，在$\overline{D}$上$\in H$，则易证，由(2.40)所确定的$\Phi(z)$必满足(2.37)，且其边值$\in H$于L上.

把(2.40)代入(2.38)，则得

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]X(t)\Omega(t)\}=c^*(t),\quad t\in L,\tag{2.41}$$

其中

$$c^*(t)=c(t)-\mathrm{Re}\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]\Psi(t)\}.\tag{2.42}$$

这样，原 RH 问题就转化为求在D内全纯、在L上有$\in H$边值的向量$\Omega(z)$，要求其边值满足条件(2.42)，亦即，化为了D上的 H 问题(2.41). 此后就可按上段中的方法求解，不再详述.

在这里，我们只提出问题(2.41)的总指标K的求法.

如果我们仍记

$$\begin{aligned}\kappa&=\mathrm{Ind}_L\det\{[a(t)+\mathrm{i}b(t)]^{-1}[a(t)-\mathrm{i}b(t)]\}\\&=\frac{1}{\pi}\arg\{\det[a(t)-\mathrm{i}b(t)]\}_L\end{aligned}\tag{2.43}$$

(κ是一偶数)，又记(不要忘记Γ是顺时针向)

$$k=\mathrm{Ind}_\Gamma[\det G(\tau)]=\frac{1}{2\pi}\arg[\det G(\tau)]_\Gamma,\tag{2.44}$$

则可以证明

$$K=\kappa+2k,\tag{2.45}$$

从而也是一偶数，称为 RH 问题的**总指标**.

事实上，由 6.2.2 段知，

$$\begin{aligned}K&=\mathrm{Ind}_L\{X(t)^{-1}[a(t)+\mathrm{i}b(t)]^{-1}[a(t)-\mathrm{i}b(t)]\overline{X(t)}\}\\&=\kappa-2\mathrm{Ind}_L[\det X(t)].\end{aligned}$$

所以为了证明(2.45)，只须证明

$$\mathrm{Ind}_L[\det X(t)]=-\mathrm{Ind}_\Gamma[\det G(\tau)].\tag{2.46}$$

由$X(z)$的性质可知，

$$\det X^+(\tau)=\det G(\tau)+\det X^-(\tau).$$

因$\det X^-(\tau)$为D_0内(包括边值)不取零值的全纯函数$\det X(z)$的边值，故

$$\mathrm{Ind}_\Gamma[\det X^-(\tau)]=0,$$

于是

$$\mathrm{Ind}_\Gamma[\det X^+(\tau)] = \mathrm{Ind}_\Gamma[\det G(\tau)].$$

另一方面，在 L 与 Γ 间所围区域 $D-D_0$ 内，$\det X(z)$ 全纯，连同其边值不取零值，故

$$\mathrm{Ind}_L[\det X(t)] + \mathrm{Ind}_\Gamma[\det X^+(\tau)] = 0.$$

联合以上二式就证得(2.46)，从而(2.45) 得证.

还可注意，(2.39) 中的 $X(z)$ 可不必取为 $G(\tau)$ 的典则矩阵，而只要是正规矩阵就行了，因为在我们的论证中并未用到 $X(z)$ 在 $z=\infty$ 处的特性，而只要它在有限远处到处满秩就够了.

对于 Γ 为开口弧段的情况或间断系数的情况，也可讨论 RH 问题，但要用到这种情况下的 R 问题. 从略.

6.3 奇异积分方程组

6.3.1 特征奇异积分方程组

本节中将讨论奇异积分方程组的求解问题. 它在许多方面与单个方程情况相类似. 本段先考虑**特征奇异积分方程(组)**，用矩阵和向量形式写成

$$\boldsymbol{K}^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = f(t), \quad t\in L, \tag{3.1}$$

这里 L 仍为一光滑封闭曲线，取定反时针向为正向，并分别记其内、外域为 D^+, D^-①；$a(t), b(t)$ 均为 $n\times n$ 矩阵，$f(t)$（已给）与 $\varphi(t)$（未知）均为 n 维（列）向量，它们皆 $\in H$. $\boldsymbol{K}^0$ 也称为**特征奇异算子**. 记

$$S(t) = a(t) + b(t), \quad D(t) = a(t) - b(t), \tag{3.2}$$

称之为(3.1) 或 $\boldsymbol{K}^0$ 的**主矩阵**. 我们只讨论正则型情况：

$$\det S(t) \neq 0, \det D(t) \neq 0, \quad t \in L.$$

求解(3.1) 时，可与单个方程时类似，令

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau, \quad z \overline{\in} L, \tag{3.3}$$

由 Plemelj 公式，(3.1) 可化为 R 问题

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t\in L, \tag{3.4}$$

---

① L 为有限条互不相交的光滑封闭曲线时，本节所论也同样成立，但要 L 围成一区域.

其中已令

$$G(t)=S^{-1}(t)D(t),\quad g(t)=S^{-1}(t)f(t). \tag{3.5}$$

由于

$$\det G(t)=\frac{\det D(t)}{\det S(t)}\neq 0,$$

故它是正则型的. 且因 $\Phi(\infty)=0$, 因此(3.4) 要在 R_{-1} 中求解. 一旦求出其解后, (3.1) 的解就由下式给出:

$$\varphi(t)=\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t). \tag{3.6}$$

设 $X(z)$ 为 $G(t)$ 的典则矩阵, 由定理 6.1.6, (3.4) 在 R_{-1} 中的可解条件为(1.42); 当它满足时, 其一般解由(1.40) 给出, 其中 $P(z)$,$Q(z)$ 为多项式向量, 仍为

$$\left.\begin{aligned}P(z)&=(P_{\kappa_1-1}(z),P_{\kappa_2-1}(z),\cdots,P_{\kappa_n-1}(z))',\\ Q(z)&=(Q_{-\kappa_1-1}(z),Q_{-\kappa_2-1}(z),\cdots,Q_{-\kappa_n-1}(z))',\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

这里下标表示多项式的次数(次数小于0的多项式恒为零), 而 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 为 $G(t)$ 的偏指标, 它们也称为方程(3.1) 或算子 K^0 的偏指标. 同样, $\kappa=\sum_{k=1}^{n}\kappa_k$ 也称为其总指标.

在(1.40) 中用 Plemelj 公式,

$$\begin{aligned}\Phi^{\pm}(t)=X^{\pm}(t)\Big\{&\pm\frac{1}{2}[X^{-}(t)]^{-1}g(t)\\ &+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{[X^{+}(\tau)]^{-1}g(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\Big\}+X^{\pm}(t)P(t).\end{aligned}$$

引进矩阵

$$Z(t)=S(t)X^{+}(t)=D(t)X^{-}(t), \tag{3.8}$$

$$\left.\begin{aligned}A(t)&=\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+D^{-1}(t)],\\ B(t)&=\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-D^{-1}(t)],\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

把前面两式相减, 并利用(1.5), 即得

$$\begin{aligned}\varphi(t)=A(t)f(t)&+\frac{B(t)Z(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{Z^{-1}(\tau)f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\\ &+B(t)Z(t)P(t),\end{aligned} \tag{3.10}$$

这里已经在最后一项中把常数系数并入 $P(t)$ 中. 可解条件(1.42) 现可写成

$$\int_L Q'(t)Z^{-1}(t)f(t)\mathrm{d}t=0$$

或即

$$\int_L f'(t)[Z'(t)]^{-1}Q(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{3.11}$$

为了弄清楚(3.11)中共有多少个(独立的)条件，仍设偏指标已排成

$$\kappa_1 \geqslant \cdots \geqslant \kappa_r > 0, \quad \kappa_{r+1} = \cdots = \kappa_s = 0, \quad 0 > \kappa_{s+1} \geqslant \cdots \geqslant \kappa_n,$$

且仍如(1.35)，记

$$\lambda = \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_r, \quad \mu = -(\kappa_{s+1} + \kappa_{s+2} + \cdots + \kappa_n).$$

(3.7)中的 $P(t)$ 显然含有 λ 个任意常数，且可改写为

$$P(t) = C_1 P^1(t) + C_2 P^2(t) + \cdots + C_\lambda P^\lambda(t), \tag{3.12}$$

这里 $P^1, P^2, \cdots, P^\lambda$ 是 λ 个完全确定的多项式向量，且是线性无关的. 因此，

$$B(t)Z(t)P(t) = C_1 \Pi^1(t) + C_2 \Pi^2(t) + \cdots + C_\lambda \Pi^\lambda(t),$$

这里 $\Pi^\alpha(t) = B(t)Z(t)P^\alpha(t)$，且显然 $\Pi^1(t), \Pi^2(t), \cdots, \Pi^\lambda(t)$ 也是线性无关的. 因为，若有一组 $C_1, C_2, \cdots, C_\lambda$ 使上式右边等于 0，则由(3.8)，(3.9)，

$$0 = B(t)Z(t)P(t) = \frac{1}{2}[X^+(t) - X^-(t)]P(t),$$

此即 $X^+(t)P(t) = X^-(t)P(t)$，从而 $X(z)P(z)$ 在全平面全纯，因而是一常数向量，但由于 $X^k(z)$ 在 ∞ 处的阶数为 $-\kappa_k$，故

$$X(z)P(z) = P_{\kappa_1 - 1}(z)X^1(z) + P_{\kappa_2 - 1}(z)X^2(z) + \cdots + P_{\kappa_r - 1}(z)X^r(z)$$

在 $z = \infty$ 处为 0，于是 $X(z)P(z) = 0$. 但因 $X(z)$ 处处满秩，故 $P(z) = 0$. 由(3.12)以及 $P^1, P^2, \cdots, P^\lambda$ 的线性无关性知，$C_1 = C_2 = \cdots = C_\lambda = 0$. 这就说明，(3.10)中含有 λ 个任意常数.

再来看条件(3.11). 由于 $Q(t)$ 中含有 μ 个任意常数，故可改写为

$$Q(t) = D_1 Q^1(t) + D_2 Q^2(t) + \cdots + D_\mu Q^\mu(t), \tag{3.13}$$

这里 $Q^1, Q^2, \cdots, Q^\mu$ 是 μ 个完全确定的线性无关多项式向量. 所以(3.11)可改写为

$$\int_L f'(t)\psi^\alpha(t)\mathrm{d}t = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, \mu, \tag{3.14}$$

其中

$$\psi^\alpha(t) = [Z'(t)]^{-1}Q^\alpha(t) \quad \alpha = 1, 2, \cdots, \mu. \tag{3.15}$$

易证 $\psi^1(t), \psi^2(t), \cdots, \psi^\mu(t)$ 是线性无关的. 因为，若有一组常数 $D_1, D_2, \cdots, D_\mu$，使

$$D_1\psi^1(t) + D_2\psi^2(t) + \cdots + D_\mu\psi^\mu(t) = 0,$$

则便有 $Q'(t)Z'^{-1}(t) = 0$，其中 $Q(t)$ 由(3.13)给出，但因 $Z(t)$ 处处满秩，故 $Q(t) = 0$. 再由 $Q^1(t), Q^2(t), \cdots, Q^\mu(t)$ 的线性无关性，便可知道

$$D_1 = D_2 = \cdots = D_\mu = 0.$$

于是我们有

定理6.3.1 特征奇异方程(3.1)可解的必要充分条件为(3.11)或即(3.14)，这里共有μ个独立条件；当它们满足时，其一般解由(3.10)给出，其中共含λ个任意常数. 这里λ与μ分别为(3.1)的正偏指标之和与负偏指标之和变号.

由此可见，方程(3.1)解的广义自由度恰为其总指标$\kappa = \lambda - \mu$. 由此还易得

推论6.3.1 如果(3.1)的所有偏指标非负，则(3.1)对任何$f(t)$可解，且一般解中含有κ个任意常数.

推论6.3.2 对于齐次特征方程$\boldsymbol{K}^0\varphi = 0$来说，它共有$\lambda$个线性无关解. 特别，如果其所有偏指标非正，则此方程只有零解. 而这时f要满足$-\kappa$个条件时(3.1)方可解且有唯一解.

最后我们指出(3.1)的总指标κ的求法. 由(3.5)，

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}[\arg \det G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}[\arg \det D(t)]_L - \frac{1}{2\pi}[\arg \det S(t)]_L.$$

6.3.2 特征方程的相联方程

我们把方程

$$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi \equiv a'(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{b'(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = h(t), \quad t \in L, \tag{3.16}$$

称为方程(3.1)的**相联方程(组)**，而$\boldsymbol{K}^{0\prime}$也称为$\boldsymbol{K}^0$的**相联算子**，而不问其右端如何.

与单个方程情况类似，方程(3.1)的求解问题与$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi = 0$的解之间有一定联系.

考虑求解(3.16)时，令

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{b'(\tau)\psi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau, \quad z \overline{\in} L. \tag{3.17}$$

用 Plemelj 公式，得

$$\left.\begin{aligned} b'(t)\psi(t) &= \frac{1}{2}[\Psi^+(t) - \Psi^-(t)], \\ \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{b'(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{2}[\Psi^+(t) + \Psi^-(t)]. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

以后一式代入(3.16)，得

$$a'(t)\psi(t)=\frac{1}{2}[\Psi^+(t)+\Psi^-(t)]+h(t).$$

以此式和(3.18)中前一式相加减，得

$$S'(t)\psi(t)=\Psi^+(t)+h(t),$$
$$D'(t)\psi(t)=\Psi^-(t)+h(t).$$

注意到 $S(t),D(t)$ 都是满秩矩阵，故可写

$$\left.\begin{aligned}\psi(t)&=[S'(t)]^{-1}\Psi^+(t)+[S'(t)]^{-1}h(t),\\ \psi(t)&=[D'(t)]^{-1}\Psi^-(t)+[D'(t)]^{-1}h(t).\end{aligned}\right\}\tag{3.19}$$

消去 $\psi(t)$，便得

$$\Psi^+(t)=[G'(t)]^{-1}\Psi^-(t)+\{[G'(t)]^{-1}-E\}h(t),\quad t\in L.\tag{3.20}$$

这是一个 R 问题，且由(3.17)知 $\Psi(\infty)=0$，故应在 R_{-1} 中求解.

求出(3.20)在 R_{-1} 中的解 $\Psi(z)$ 后，方程(3.16)的解 $\psi(t)$ 可以从(3.19)的任一式中求出.

现在来考虑齐次方程 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 的求解. 这时应在(3.20)中令 $h(t)=0$. 它正好是(3.4)的齐次相联 R 问题(参见 6.1.5 段). 如果 $X(z)$ 是(3.4)的典则矩阵，由定理 6.1.3，$[X'(z)]^{-1}$ 就是(3.20)的典则矩阵.

由定理 6.1.7 知，(3.4)在 R_{-1} 中可解的条件(亦即方程(3.1)的可解条件)是 $g(t)=S^{-1}(t)f(t)$ 须满足(1.42)，即

$$\int_L Q'(t)[X^+(t)]^{-1}S^{-1}(t)f(t)\mathrm{d}t=0;$$

或者，利用(3.8)，可写成

$$\int_L f'(t)[Z'(t)]^{-1}Q(t)\mathrm{d}t=0,\tag{3.21}$$

其中 Q 仍由(3.7)给出. 但由(1.37)′，齐次问题(3.20)($h=0$)的一般解为

$$\Psi(z)=[X'(z)]^{-1}Q(z),$$

它实际上含有 μ 个线性无关的解. 而由(3.19)中第一式，$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 的一般解为

$$\begin{aligned}\psi(t)&=[S'(t)]^{-1}\Psi^+(t)=[S'(t)]^{-1}[X^{+\prime}(t)]^{-1}Q(t)\\ &=[Z'(t)]^{-1}Q(t).\end{aligned}$$

这实际上是 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 的全解系 $\psi^1(t),\psi^2(t),\cdots,\psi^\mu(t)$ 的任意线性组合. 与(3.21)对照，得方程(3.1)的可解条件为

$$\int_L f'(t)\psi^\alpha(t)\mathrm{d}t=0,\quad \alpha=1,2,\cdots,\mu,\tag{3.22}$$

即要求 $f(t)$ 与 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 的一切解正交.

此外，$\boldsymbol{K}^0\varphi=0$ 共有 λ 个线性无关解，这里 λ 是 $\boldsymbol{K}^0$ 的所有正偏指标之和，

而 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 共有 μ 个线性无关解，其中 μ 是$\boldsymbol{K}^0$ 所有负偏指标之和变号. $\kappa=\lambda-\mu$ 则为$\boldsymbol{K}^0$ 的总指标.

于是我们有

定理 6.3.2 (特征方程组的 Noether 定理)　在正则型情况下，

Ⅰ. 特征方程$\boldsymbol{K}^0\varphi=0$及其相联方程$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$都只有有限个线性无关的解；

Ⅱ. $\boldsymbol{K}^0\varphi=f$ 可解的必要充分条件为 f 与 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 的一切解正交；

Ⅲ. $\boldsymbol{K}^0\varphi=0$ 与 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 的线性无关解的个数之差等于 $\boldsymbol{K}^0$ 的总指标.

习　题

1. 试证方程(3.16) 与 R_{-1} 问题(3.20) 在下列意义下确实等价：它们同时可解或否，可解时它们的解之间以(3.19) 相联系.

2. 试写出方程(3.16) 的一般解.

3. 说明定理 6.3.2 中 $\boldsymbol{K}^0$ 与 $\boldsymbol{K}^{0\prime}$ 的地位可以互换.

6.3.3　完全奇异积分方程组及其正则化

仍设 L 如前. 方程

$$\boldsymbol{K}\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L \tag{3.23}$$

称为完全奇异积分方程(组)，其中 $K(t,\tau)$, $a(t)$ 为 $n\times n$ 矩阵，$f(t)$, $\varphi(t)$ 为 n 维(列) 向量. 如果记

$$b(t)=K(t,t), \tag{3.24}$$

则(3.23) 还可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}\varphi&\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=f(t),\quad t\in L,\end{aligned} \tag{3.25}$$

这里已令

$$k(t,\tau)=\frac{K(t,\tau)-K(t,t)}{\pi\mathrm{i}(\tau-t)}, \tag{3.26}$$

$\in H^*$，故

$$k\varphi\equiv\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\in L \tag{3.27}$$

一个(弱) Fredholm 算子. 而 $\boldsymbol{K}$ 已可写成

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^0+k, \tag{3.28}$$

这里 $\boldsymbol{K}^0$ 仍由(3.1)定义. $\boldsymbol{K}^0$ 称为 $\boldsymbol{K}$ 的**特征算子**.

采用与6.3.1段中同样的记号. $\boldsymbol{K}^0$ 的偏指标 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 与总指标 κ 也分别称为 $\boldsymbol{K}$ 的**偏指标与总指标**. 我们还是只考虑**正则型**情况，即 $\det S(t)\neq 0$, $\det D(t)\neq 0$.

我们可用与3.3.1段中相类似的方法将(3.23)或(3.25)**正则化**，即转化为Fredholm方程(组). 但下面我们宁愿采用另一种正则化方法，会使讨论更简洁一些(参看[35]).

为简便计，不妨设 O 在 L 所围的内域 D^+ 中.

引进特征算子 $\boldsymbol{P}^0$:

$$\boldsymbol{P}^0\rho\equiv A(t)\rho(t)+\frac{B(t)}{\pi i}\int_L\frac{\rho(\tau)}{\tau-t}d\tau,\quad t\in L, \tag{3.29}$$

其中 $A(t),B(t)$ 由(3.9)给出.

可以证明，$\boldsymbol{P}^0$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的正则化算子，即 $\boldsymbol{KP}^0$ 与 $\boldsymbol{P}^0\boldsymbol{K}$ 都是Fredholm算子. 例如，用(3.25)直接算出 $\boldsymbol{KP}^0\rho$，利用Poincaré-Bertrand积分换序公式，可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{KP}^0\rho\equiv{}& a(t)A(t)\rho(t)+\frac{a(t)B(t)}{\pi i}\int_L\frac{\rho(\tau)}{\tau-t}d\tau\\
&+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}\left[A(\tau)\rho(\tau)+\frac{B(\tau)}{\pi i}\int_L\frac{\rho(\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1\right]\\
&+\int_L k(t,\tau)d\tau\left[A(\tau)\rho(\tau)+\frac{B(\tau)}{\pi i}\int_L\frac{\rho(\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1\right]\\
={}&[a(t)A(t)+b(t)B(t)]\rho(t)\\
&+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{a(t)B(t)+b(t)A(\tau)}{\tau-t}\rho(\tau)d\tau\\
&-\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\rho(\tau_1)}{\tau_1-t}d\tau_1\,\frac{1}{\pi i}\int_L B(\tau)\left(\frac{1}{\tau-\tau_1}-\frac{1}{\tau-t}\right)d\tau\\
&+\int_L k(t,\tau)A(\tau)\rho(\tau)d\tau\\
&-\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\int_L\frac{k(t,\tau)B(\tau)}{\tau-\tau_1}d\tau\right]\rho(\tau_1)d\tau_1.
\end{aligned}\tag{3.30}$$

上式中右边第三、四、五项都是Fredholm积分(虽然第三项有不到一阶奇异性的核). 至于第二项的积分，由于

$$\begin{aligned}
a(t)B(t)+b(t)A(t)={}&\frac{1}{4}\{[S(t)+D(t)][S^{-1}(t)-D^{-1}(t)]\\
&+[S(t)-D(t)][S^{-1}(t)+D^{-1}(t)]\}\\
={}&0
\end{aligned}$$

(这里已利用(3.9)式)，所以它也是(弱)Fredholm 积分. 因此 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}^0$ 是 Fredholm 算子. 同样也可证明 $\boldsymbol{P}^0\boldsymbol{K}$ 是 Fredholm 算子.

记 $\boldsymbol{P}^0$ 的偏指标为 $\pi_1 \geqslant \pi_2 \geqslant \cdots \geqslant \pi_n$，它们也是矩阵

$$[A(t)+B(t)]^{-1}[A(t)-B(t)] = S^{-1}(t)D(t)$$

的偏指标，故由 6.3.1 段末知，(3.29) 的总指标为 $-\kappa$，即

$$-\kappa = \sum_{k=1}^{n} \pi_k. \tag{3.31}$$

任意取定一正整数 $M \geqslant -\pi_n$，作函数

$$\beta(t) = \frac{t^M - \alpha}{t^M + \alpha},$$

这里 $\alpha \neq 0$ 是适合 $t^M + \alpha \neq 0\ (t \in L)$ 的任一常数. 易见 $1 \pm \beta(t) \neq 0$ 于 L 上. 引进另一特征方程(组)

$$\boldsymbol{N}^0\omega \equiv \omega(t) + \frac{\beta(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = 0, \quad t \in L, \tag{3.32}$$

这里 $\omega(t)$ 仍是 n 维(列)向量. 如果令

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau,$$

代入(3.32)，立刻得到 R 问题

$$\Omega^+(t) = \frac{1-\beta(t)}{1+\beta(t)}\Omega^-(t),$$

或即

$$\Omega^+(t) = \alpha t^{-M}\Omega^-(t).$$

这一问题的典则矩阵 $X(z)$ 应满足

$$X^+(t)[X^-(t)]^{-1} = \alpha t^{-M}E$$

(E 为 $n \times n$ 单位矩阵). 很明显我们可以取

$$X^+(t) = E, \quad X^-(t) = \frac{1}{\alpha}t^M E$$

(注意 $O \in D^+$)，就能符合典则矩阵的要求. 这就说明，此问题的所有偏指标皆为 $-M < 0$. 由推论 6.3.2，方程(3.32) 只有零解.

这样一来，方程(3.25) 就等价于方程 $\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}\varphi = \boldsymbol{N}^0 f$. 经直接验证，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}\varphi &\equiv [a(t)+\beta(t)b(t)]\varphi(t) + \frac{b(t)+\beta(t)a(t)}{\pi \mathrm{i}} \\ &\quad \cdot \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau + \int_L k_1(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= (\boldsymbol{N}^0 f)(t), \quad t \in L,\end{aligned} \tag{3.33}$$

其中 $k_1(t,\tau) \in H^*$[①].

$\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}$ 仍是一个奇异积分算子. 如同对于算子 $\boldsymbol{K}$ 作正则化算子 $\boldsymbol{P}^0$ 那样，对于 $\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}$ 作其正则化算子 $\boldsymbol{Q}^0$，则得 $\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^0$ 与 $\boldsymbol{Q}^0\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}$ 都是 Fredholm 算子. 经直接验证，可知

$$\boldsymbol{Q}^0\sigma \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{S^{-1}(t)}{1+\beta(t)}+\frac{D^{-1}(t)}{1-\beta(t)}\right]\sigma(t) + \frac{1}{2}\left[\frac{S^{-1}(t)}{1+\beta(t)}-\frac{D^{-1}(t)}{1-\beta(t)}\right]\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\sigma(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau.$$

再令

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\sigma(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau, \quad z \overline{\in} L,$$

则易证 $\boldsymbol{Q}^0\sigma = 0$ 等价于齐次 R_{-1} 问题

$$\sigma^+(t) = \frac{1+\beta(t)}{1-\beta(t)} S(t)D^{-1}(t)\sigma^-(t)$$

或即

$$\sigma^+(t) = \frac{t^M}{\alpha} S(t)D^{-1}(t)\sigma^-(t).$$

由于 $S(t)D^{-1}(t)$ 的偏指标为 $\varkappa_1,\varkappa_2,\cdots,\varkappa_n$，易见此问题的偏指标即 $\boldsymbol{Q}^0$ 的偏指标为 $\varkappa_1+M,\varkappa_2+M,\cdots,\varkappa_n+M$，它们都是正的. 由推论 6.3.1，$\boldsymbol{Q}^0\sigma = g$ 对任何右端都是可解的. 由此可见，方程(3.25) 等价于 Fredholm 方程

$$\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^0\sigma = \boldsymbol{N}^0 f, \tag{3.34}$$

且 $\varphi = \boldsymbol{Q}^0\sigma$ 就是(3.25) 的解(如果后者可解的话).

总之，我们有

定理 6.3.3 奇异积分方程(3.25) 等价于 Fredholm 方程(3.34)，即它们同时可解或否；且若可解，则它们的解之间有关系式 $\boldsymbol{Q}^0\sigma = \varphi$.

习 题

1. 如果知道所有的 $\varkappa_k \leqslant 0$ 或所有的 $\varkappa_k \geqslant 0$ $(k = 1,2,\cdots,n)$，则定理 6.3.3 将有怎样的简化形式?

2. 如果 O 不在 D^+ 内，算子 $\boldsymbol{N}^0$ 应如何改变?

---

① 如果在(3.29) 中令 $A(t)=E$, $B(t)=\beta(t)E$, 则利用计算 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}^0$ 时的结果，立即可得(3.33).

6.3.4 奇异积分方程组的 Noether 定理

本段就来证明，关于一个未知函数的奇异积分方程的 Noether 定理(见 3.3.2 段) 也可推广到方程组的情况. 在此之前，先对一般的奇异积分算子(作用于 n 维向量) 的一些性质作些说明，它们也都是单个函数情况(3.1.2 段) 的推广.

对于算子(3.23)，定义

$$\boldsymbol{K}'\psi \equiv a'(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K'(\tau,t)}{\tau-t}\psi(\tau)d\tau, \quad t\in L \tag{3.35}$$

为 $\boldsymbol{K}$ 的**相联算子**. (3.23) 写成(3.25) 时，

$$\boldsymbol{K}'\psi \equiv a'(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b'(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau + \int_L k'(\tau,t)\psi(\tau)d\tau. \tag{3.36}$$

$\boldsymbol{K}'\psi = g$ 称为 $\boldsymbol{K}\varphi = f$ 的**相联方程**.

设 $\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}_j$ $(j=1,2,3)$ 都是类似于(3.23) 的完全奇异积分算子，而 φ,ψ 都是 L 上 $\in H$ 的 n 维(列) 向量，则下列性质成立：

1° $\int_L \psi'\boldsymbol{K}\varphi\, dt = \int_L \varphi'\boldsymbol{K}'\psi\, dt$;

2° $(\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{K}_3 = \boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_3)$;

3° $(\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2)' = \boldsymbol{K}_2'\boldsymbol{K}_1'$.

这些性质都可直接验证. 以 1° 为例，因

$$\psi'\boldsymbol{K}\varphi \equiv \psi'(t)\left[a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau\right]$$

是一函数(可看成 1×1 矩阵)，故

$$\psi'\boldsymbol{K}\varphi = (\psi'\boldsymbol{K}\varphi)' = \varphi'(t)a'(t)\psi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi'(\tau)K'(t,\tau)\psi(t)}{\tau-t}d\tau.$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_L \psi'\boldsymbol{K}\varphi\, dt &= \int_L \varphi'(t)a'(t)\psi(t)dt + \frac{1}{\pi i}\int_L dt\int_L \frac{\varphi'(\tau)K'(t,\tau)\psi(t)}{\tau-t}d\tau \\ &= \int_L \varphi'(t)a'(t)\psi(t)dt - \frac{1}{\pi i}\int_L \varphi'(\tau)d\tau\int_L \frac{K'(t,\tau)\psi(t)}{t-\tau}dt \\ &= \int_L \varphi'(t)\left[a'(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K'(\tau,t)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]dt \\ &= \int_L \varphi'(t)(\boldsymbol{K}'\psi)(t)dt.\end{aligned}$$

即 1° 成立. 2°,3° 可类似地证明，从略.

现在，对完全奇异积分方程(组) (3.23) 或(3.25)，我们可证明

定理 6.3.4 (Noether 定理) 对于奇异积分算子 $\boldsymbol{K}$，以下结论成立：

Ⅰ. $\boldsymbol{K}\varphi=0$（以及 $\boldsymbol{K}'\psi=0$）的线性无关解的个数 l（以及 l'）有限；

Ⅱ. $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解的必要充分条件为

$$\int_L f'(t)\psi^{\alpha}(t)\mathrm{d}t=0,\quad \alpha=1,2,\cdots,l', \tag{3.37}$$

其中 $\psi^1,\psi^2,\cdots,\psi^{l'}$ 为相联齐次方程 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的完全解组；

Ⅲ. 如果 $\boldsymbol{K}$ 的总指标为 κ，则

$$l-l'=\kappa. \tag{3.38}$$

证 由上段所证，$\boldsymbol{K}\varphi=0$ 等价于 Fredholm 方程 $\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^0\sigma=0$，其中 $\varphi=\boldsymbol{Q}^0\sigma$. 根据 Fredholm 方程(组)的一般理论，后一方程只有有限个线性无关解，故前者也必如此. 结论 Ⅰ 得证.

现证结论 Ⅱ. 方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解的必要条件为(3.37)很明显. 因为，若 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解，而 ψ 为 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的任何解，则由性质 1°，

$$\int_L f'\psi\,\mathrm{d}t=\int_L\psi' f\,\mathrm{d}t=\int_L\psi'\boldsymbol{K}\varphi\,\mathrm{d}t=\int_L\varphi'\boldsymbol{K}'\psi\,\mathrm{d}t=0.$$

反之，设条件(3.37)成立. 因为 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解等价于 $\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^0\sigma=\boldsymbol{N}^0f$ 可解，而后者为 Fredholm 方程，其可解条件为

$$\int_L(\boldsymbol{N}^0f)'\chi\,\mathrm{d}t=\int_L\chi'\boldsymbol{N}^0f\,\mathrm{d}t=0, \tag{3.39}$$

其中 χ 为 $(\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^0)'\chi=0$ 的任何解. 由性质 3° 与 2°，χ 也是方程 $\boldsymbol{Q}^{0\prime}\boldsymbol{K}'\boldsymbol{N}^{0\prime}\chi=0$ 的解. 但 $\boldsymbol{Q}^0$ 的偏指标均为正的，故 $\boldsymbol{Q}^{0\prime}$ 的偏指标均为负的，从而 $\boldsymbol{Q}^{0\prime}\sigma=0$ 只有零解. 于是 $\boldsymbol{K}'\boldsymbol{N}^{0\prime}\chi=0$，亦即 $\boldsymbol{N}^{0\prime}\chi$ 是 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的解. 由条件(3.37)，

$$0=\int_L f'\boldsymbol{N}^{0\prime}\chi\,\mathrm{d}t=\int_L\chi'\boldsymbol{N}^0f\,\mathrm{d}t,$$

即(3.39)确实成立，从而 $\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^0\boldsymbol{f}=\boldsymbol{N}^0f$ 可解，亦即 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解，结论 Ⅱ 得证.

最后证结论 Ⅲ. 我们先来计算方程 $\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^0\sigma=0$ 的线性无关解的个数 ν. 由于 $\boldsymbol{N}^0$ 的偏指标均为负的，故 $\boldsymbol{N}^0\omega=0$ 只有零解，所以 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^0\sigma=0$ 的(线性无关)解的个数也是 ν. 今设 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的全解系为 $\varphi^1,\varphi^2,\cdots,\varphi^l$，于是求解 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^0\sigma=0$ 等价于求解

$$\boldsymbol{Q}^0\sigma=c_1\varphi^1+c_2\varphi^2+\cdots+c_l\varphi^l,$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_l$ 为 l 个任意常数. 因 $\boldsymbol{Q}^0$ 的偏指标 $\pi_1+M,\pi_2+M,\cdots,\pi_n+M$（见上段）均为正数，特征齐次方程 $\boldsymbol{Q}^0\sigma=0$（由推论 6.3.1）应有 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\pi_k+M)$

$= -\kappa + nM$（由(3.31)式）个解. 又 $Q^0\sigma = \varphi^\alpha\ (\alpha = 1,2,\cdots,l)$ 均可解(再由推论 6.3.1)，各任取一解 σ^α，则 $\sigma^1,\sigma^2,\cdots,\sigma^l$ 显然线性无关. 故知

$$\nu = -\kappa + nM + l. \tag{3.40}$$

另一方面，作为 Fredholm 方程的相联方程，

$$(\boldsymbol{N}^0\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^0)'\chi = \boldsymbol{Q}^{0\prime}\boldsymbol{K}'\boldsymbol{N}^{0\prime}\chi = 0$$

也应有 ν 个解. 由于 $\boldsymbol{Q}^0$ 的偏指标均为正，故 $\boldsymbol{Q}^{0\prime}$ 的均为负，从而 $\boldsymbol{Q}^{0\prime}\sigma = 0$ 只有零解. 于是 $\boldsymbol{K}'\boldsymbol{N}^{0\prime}\chi = 0$ 也有 ν 个解. 但因 $\boldsymbol{K}'\psi = 0$ 有 l' 个解 $\psi^1,\psi^2,\cdots,\psi^{l'}$，所以后一方程等价于方程

$$\boldsymbol{N}^{0\prime}\chi = d_1\psi^1 + d_2\psi^2 + \cdots + d_{l'}\psi^{l'},$$

这里 $d_1,d_2,\cdots,d_{l'}$ 也是任意常数. 前已证明 $\boldsymbol{N}^0$ 的一切偏指标均为 $-M$，故 $\boldsymbol{N}^{0\prime}$ 的偏指标均为 $M>0$，总指标则为 nM. 所以 $\boldsymbol{N}^{0\prime}\chi = 0$ 共有 nM 个解. 又 $\boldsymbol{N}^{0\prime}\chi = \psi^\alpha\ (\alpha = 1,2,\cdots,l')$ 均可解，且所得的解线性无关(理由同前). 这样，最后得

$$\nu = nM + l'.$$

与(3.40)比较，便得(3.38). 结论 Ⅲ 得证. □

这一定理显然也是定理 6.3.2 的推广.

定理中结论 Ⅲ 还告诉我们，方程 $\boldsymbol{K}\varphi = f$ 解的(广义)自由度为 κ.

对于间断系数或带节点的曲线上的完全奇异积分方程(组)也有相应的结果，可参看[35]，第二章，这里就不讨论了.

习　题

试验证性质 2°,3°.

6.4　某些直接有效解法

6.4.1　有理系数矩阵的 R 问题

对于函数组的齐次 R 问题(1.13)或非齐次 R 问题(1.39)求解的关键在求出 $G(t)$ 的典则矩阵 $X(z)$. 而前已说明(6.1.3段)，只要求出了问题的正解矩阵 $\Psi(z) = (\Psi_j^k(z))$，即求出 $\Psi(z)$ 使满足

$$\Psi^+(t) = G(t)\Psi^-(t),\quad t \in L, \tag{4.1}$$

$\Psi(z)$ 在任何有限远点(包括 L 上的边值)满秩：

$$\det \Psi(z) \neq 0, \tag{4.2}$$

就能通过有限个步骤有效地求出典则矩阵，进而 R 问题的解就可写成积分形式. 所以，如果能够有效地求出正规(解)矩阵，那也就得到了 R 问题的有效解法.

但是，一般说来，没有求正规矩阵 $\Psi(z)$ 的普遍有效方法. 然而，在某些特殊情况下，例如，$G(t)$ 是有理函数的矩阵时，即其所有元都是 t 的有理函数时，却有直接有效的方法来求出正规矩阵. 当然我们仍限于正则型情况，即 $G(t)$ 在 L 上无极点且 $\det G(t) \neq 0$. 下面就来说明这一方法.

首先，把 $G(t)$ 中的各个元进行通分，将它改写为下形：

$$G(t) = \frac{P(t)}{r(t)}, \tag{4.3}$$

其中 $P(t)$ 为一多项式矩阵，而 $r(t)$ 为一多项式. 由 $G(t)$ 的性质，可知 $\det P(t) \neq 0$ 于 L 上，$r(t)$ 在 L 上也无零点. 将 $r(z)$ 分解因式，写成

$$r(z) = r_+(z) r_-(z),$$

其中 $r_+(z)$ 在 D^+ 内无零点，$r_-(z)$ 在 D^- 内无零点. 这样，(1.13) 可写成

$$r_+(t)\Phi^+(t) = \frac{1}{r_-(t)} P(t)\Phi^-(t).$$

令

$$\Omega(z) = \begin{cases} r_+(z)\Phi^+(z), & \text{当 } z \in D^+ \text{ 时;} \\ \dfrac{1}{r_-(z)}\Phi^-(z), & \text{当 } z \in D^- \text{ 时,} \end{cases} \tag{4.4}$$

则(1.13) 成为

$$\Omega^+(t) = P(t)\Omega^-(t), \quad t \in L. \tag{4.5}$$

所以我们只要能求出问题(4.5) 或 $P(t)$ 的正规矩阵即可.

如果 $\det P(z)$ 在 D^+ 内无零点，则令

$$\Omega^0(z) = \begin{cases} P(z), & \text{当 } z \in D^+ \text{ 时;} \\ E, & \text{当 } z \in D^- \text{ 时,} \end{cases}$$

它便是(4.5) 的一正规解组. 再回到(1.13)，则由(4.4)，

$$\Psi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{r_+(z)} P(z), & \text{当 } z \in D^+ \text{ 时;} \\ r_-(z) E, & \text{当 } z \in D^- \text{ 时} \end{cases} \tag{4.6}$$

就是(3.13) 的正规矩阵. 且很明显，它甚至就是(1.13) 的典则矩阵.

今考虑 $\det P(z)$ 在 D^+ 内可能有零点的一般情况. 由线性代数熟知，经过一些初等变换，可把 $P(z)$ 化为等价的对角矩阵，亦即，存在两个多项式矩

阵 $A(z), B(z)$，使得

$$P(z)=A(z)Q(z)B(z), \tag{4.7}$$

其中

$$Q(z)=\begin{bmatrix} Q_1(z) & & & 0 \\ & Q_2(z) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Q_n(z) \end{bmatrix} \quad (Q_j\text{ 为多项式}),$$

且 $\det A(z), \det B(z)$ 均为非零常数. 再把每一 $Q_j(z)$ 分解因式为

$$Q_j(z)=Q_{j+}(z)Q_{j-}(z), \quad j=1,2,\cdots,n,$$

使 $Q_{j+}(z)$ 在 D^+ 内无零点，$Q_{j-}(z)$ 在 D^- 内无零点. 这是做得到的，因为显然 $\det Q(z)$ 与 $\det P(z)$ 一样在 L 上无零点. 又令

$$Q_+(z)=\begin{bmatrix} Q_{1+}(z) & & & 0 \\ & Q_{2+}(z) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Q_{n+}(z) \end{bmatrix},$$

$$Q_-(z)=\begin{bmatrix} Q_{1-}(z) & & & 0 \\ & Q_{2-}(z) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Q_{n-}(z) \end{bmatrix},$$

则 $Q_+(z), Q_-(z)$ 分别在 D^+, D^- 内满秩，且

$$Q(z)=Q_+(z)Q_-(z).$$

我们可以证明

$$\Omega^0(z)=\begin{cases} A(z)Q_+(z), & \text{当 } z\in D^+\text{ 时;} \\ B^{-1}(z)Q_-^{-1}(z), & \text{当 } z\in D^-\text{ 时} \end{cases} \tag{4.8}$$

便是问题(4.5)或即矩阵 $P(z)$ 的正规矩阵. 首先，它是(4.5)的一个解矩阵，因为

$$\Omega^{0+}(t)=A(t)Q_+(t), \quad \Omega^{0-}(t)=B^{-1}(t)Q_-^{-1}(t),$$

由(4.7)显然 $\Omega^{0+}(t)=P(t)\Omega^{0-}(t)$ 成立. 此外，$\det\Omega^0(z)$ 处处(包括在 L 上的边值)不等于零也很明显，所以 $\Omega^0(z)$ 确实是(4.5)的正规矩阵.

如果回到(1.13)，则由(4.4)式，有

$$\Psi(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{r_+(z)}A(z)Q_+(z), & \text{当 } z\in D^+\text{ 时;} \\ r_-(z)B^{-1}(z)Q_-(z), & \text{当 } z\in D^-\text{ 时.} \end{cases} \tag{4.9}$$

注意，$\det P(z)$ 在 D^+ 内无零点的特殊情况也包括在这个一般情况中. 不过，这时正规矩阵可极简单地由(4.6)式得出(且已是典则矩阵)，而不必用这一较麻烦的手续.

注 1 我们说在有理系数矩阵情况下已找到了求正规矩阵从而找到了求典则矩阵的有效方法，仅指的是在“分析”范围内而言，而并未把“代数”中的问题考虑在内. 实际上，我们这里两次用了多项式的因子分解，而这并不是总能用有效的方法做得到的.

注 2 对于奇异积分方程(3.23)，如果 $a(t), K(t,\tau)$ 都是有理函数矩阵，则令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{K(z,\tau)}{\tau-z}\varphi(\tau)d\tau,\quad z\overline{\in}L, \tag{4.10}$$

便可化为 $\Phi(z)$ 的 R_{-1} 问题求解，其系数矩阵为有理矩阵. 用本段方法就可直接对它求解，从而对(3.23)也可直接求解.

习 题

求矩阵

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^3+2 & -\frac{1}{2}t^4+2t-2 \\ -\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^2+2 & -\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{2}t^3+2t-2 \end{pmatrix}$$

的正规矩阵、典则矩阵及其偏指标、总指标. 这里 L 是 $|t|=1$.

答 解答不唯一. 例如，正规矩阵之一为

$$\Phi(z)=\begin{cases}\begin{pmatrix} 2 & z \\ 2 & z+1 \end{pmatrix}, & \text{当}|z|<1\text{时};\\ \begin{pmatrix} z & \frac{2}{z}-\frac{2}{z^2} \\ -1 & -\frac{2}{z^2} \end{pmatrix}, & \text{当}|z|>1\text{时},\end{cases}$$

典则矩阵之一为

$$\begin{pmatrix} 4-z^2-z^3 & z \\ 4-z+2z^2-z^3 & z+1 \end{pmatrix},\quad \text{当}|z|<1\text{时};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{z} & \frac{2}{z}-\frac{2}{z^2} \\ \frac{2}{z} & -\frac{2}{z^2} \end{pmatrix},\quad \text{当}|z|>1\text{时}.$$

偏指标 $\kappa_1=\kappa_2=1$，总指标 $\kappa=2$.

6.4.2 核与系数具解析性的奇异积分方程组

3.5 节中对于核与系数具有解析性的奇异积分方程的直接解法，可推广到方程组的情况. 亦即，对于方程(组)(3.23)，其中 $a(t)$ 为区域 D^+ 内的全纯矩阵，$K(t,\tau)$ 当固定一个变元于 $\overline{D}^+$ 上时为另一变元在 D^+ 内的全纯矩阵，且在 L 上都有 $\in H$ 的边值，其他条件仍如前. 这时我们也有直接解法. 本段中把向量的维数改写为 N，矩阵也相应地为 $N\times N$ 的.

为此，我们记 $b(z)=K(z,z)$，

$$\left.\begin{aligned} S(z)&=a(z)+b(z),\\ D(z)&=a(z)-b(z),\end{aligned}\right\}\tag{4.11}$$

当然 z 必须限制在 $\overline{D}^+$ 上. 它们都在 D^+ 内全纯，在 $\overline{D}^+$ 上 $\in H$. 我们仍只考虑正则型情况，亦即设 $\det S(t),\det D(t)$ 在 L 上均无零点. 但一般地设 $\det S(t)$ 在 D^+ 内有零点 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，阶数分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，而 $\det D(z)$ 在 D^+ 内有零点 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，阶数分别为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$. 为简单起见，我们还设 $\alpha_k\neq\beta_j$ $(k=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$.

我们还引进记号

$$\det S(z)=(z-\alpha_k)^{\lambda_k}S_k(z),$$

$$\det D(z)=(z-\beta_j)^{\mu_j}D_j(z),$$

因此 $S_k(\alpha_k)\neq 0$，$D_j(\beta_j)\neq 0$.

我们令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(z,\tau)\varphi(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\quad z\in D^+,\tag{4.12}$$

于是，由 Plemelj 公式，

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{2}b(t)\varphi(t)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\in L.\tag{4.13}$$

以此代入(3.23)，消去奇异积分，得

$$\varphi(t)=D^{-1}(t)[f(t)-2\,\Phi^+(t)].\tag{4.14}$$

再以此代入(4.12)，化简后，便有

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(z,\tau)D^{-1}(\tau)f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(z,\tau)D^{-1}(\tau)\Phi^+(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau\\ &=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(z,\tau)D^{-1}(\tau)f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau-2b(z)D^{-1}(z)\Phi(z)\\ &\quad-2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{res}\left[\frac{K(z,\tau)D^{-1}(\tau)\Phi^+(\tau)}{\tau-z}\right]_{\tau=\beta_j},\end{aligned}$$

这里向量的留数记号表示其各分量的留数构成的向量. 由上式解出 $\Phi(z)$，得

$$\Phi(z)=D(z)S^{-1}(z)\left\{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{K(z,\tau)D^{-1}(\tau)f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau\right.$$
$$\left.-2\sum_{j=1}^{n}\operatorname{res}\left[\frac{K(z,\tau)D^*(\tau)\Phi^+(\tau)}{(\tau-\beta_j)^{\mu_j}D_j(\tau)(\tau-z)}\right]_{\tau=\beta_j}\right\},\qquad(4.15)$$

这里 $D^*(\tau)$ 表示 $D(\tau)$ 的伴随矩阵，即

$$D^*(\tau)=\det D(\tau)\cdot D^{-1}(\tau).$$

我们再记

$$B_{jr}(z)=\frac{1}{r!(\mu_j-r-1)!}\left[\frac{\partial^{\mu_j-r-1}}{\partial\tau^{\mu_j-r-1}}\frac{K(z,\tau)D^*(\tau)}{D_j(\tau)(\tau-z)}\right]_{\tau=\beta_j},$$
$$r=0,1,\cdots,\mu_j-1;\ j=1,2,\cdots,n,\qquad(4.16)$$

则(4.15) 可改写为

$$\Phi(z)=D(z)S^{-1}(z)\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{K(z,\tau)D^{-1}(\tau)f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau\right.$$
$$\left.-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}B_{jr}(z)\Phi^{(r)}(\beta_j)\right].\qquad(4.17)$$

与单个方程情况相类似，为使方程(3.23) 可解，下面两个条件必须满足：

1° 把 $z=\beta_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 代入(4.17) 及其直到 μ_j-1 阶的导数时，两边不能出现矛盾；

2° (4.17) 右边确实是 D^+ 内的全纯向量.

在单个方程情况下，在 3.5.2 段中已经证明，当 $\alpha_k\neq\beta_j$ 时，条件 1° 自动满足. 但在方程组($N>1$)的情况下，一般说来，条件 1°不会自动满足. 为使 1° 成立，必须且只须

$$C_{l\rho}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L\left[\frac{\partial^\rho}{\partial z^\rho}\frac{D(z)S^{-1}(z)K(z,\tau)}{\tau-z}\right]_{z=\beta_l}D^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}\left\{\frac{\mathrm{d}^\rho}{\mathrm{d}z^\rho}[D(z)S^{-1}(z)B_{jr}(z)]\right\}_{z=\beta_l}C_{jr}$$
$$(\rho=0,1,\cdots,\mu_j-1;\ l=1,2,\cdots,n)\qquad(4.18)$$

相容，这里已令 $N\times N$ 矩阵 $C_{jr}=\Phi^{(r)}(\beta_j)$. 但要注意，一般说来，

$$\frac{\mathrm{d}^\rho}{\mathrm{d}z^\rho}[D(z)S^{-1}(z)B_{jr}(z)]$$

的各个元在 $z=\beta_l$ 处可能有极点，这时矩阵 C_{jr} 的某些相应元之间就要有适当的约束条件使(4.18) 式有意义. 这里讲的相容性要包括这一点在内.

另一方面，为使 2° 满足，由(4.17)，须且只须下列式子成立：

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}\left\{\frac{\mathrm{d}^\sigma}{\mathrm{d}z^\sigma}[D(z)S^*(z)B_{jr}(z)]\right\}_{z=\alpha_k}C_{jr}$$

$$=\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_L\left[\frac{\mathrm{d}^\sigma}{\mathrm{d}z^\sigma}\frac{D(z)S^*(z)K(z,\tau)}{\tau-z}\right]_{z=\alpha_k}D^-(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$(\sigma=0,1,\cdots,\lambda_k-1;\ k=1,2,\cdots,m). \qquad (4.19)$$

(4.18),(4.19) 一起相容就是方程(3.23) 可解的条件. 当这相容性满足时，由(4.14)，方程(3.23) 的一般解为

$$\varphi(t)=S^{-1}(t)\left[a(t)D^{-1}(t)f(t)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,\tau)D^{-1}(\tau)f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\right.$$

$$\left.+4\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{\mu_j-1}B_{jr}(t)C_{jr}\right], \qquad (4.20)$$

其中 C_{jr} 是由(4.18),(4.19) 求得的任何解(矩阵).

特别，当 $a(t),K(t,\tau)$ 都是有理矩阵时，虽可如上段末所说的那样化为有理系数矩阵的 R_{-1} 问题求解，但用这里的方法一般更为直截了当，还可避免 $S(z),D(z)$ 的因子分解，从而减少或避免代数上的困难.

6.4.3 解析核密度的奇异积分的反演

作为一个应用，最后我们来讨论下列奇异积分(组) 的反演问题：

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L, \qquad (4.21)$$

其中所有的记号与条件均同前. 我们来求出其反演公式. 特别要找出成立对合公式

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=\varphi(t),\quad t\in L \qquad (4.22)$$

的必要充分条件.

对于 $N=1$ 的情形，设 $b(z)$ 在 $\overline{D}^+$ 上无零点时，这一条件在 3.5.6 段中已讨论过，它是 $b(t)=+1$ 或 -1.

现讨论 $N\geqslant 2$ 的情况. 由于现在 $a(z)=0$，故 $S(z)=b(z)$，$D(z)=b(z)$. 我们将设 $\det b(z)$ 在 $\overline{D}^+$ 上无零点，因而就不存在 α_j,β_k. 由前面的讨论，知(4.21) 恒有唯一解；且由(4.20)，此解为

$$\varphi(t)=\frac{b^{-1}(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,\tau)b^{-1}(\tau)f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau,\quad t\in L. \qquad (4.23)$$

这就是(4.21) 的一般**反演公式**. 为使(4.22) 对任何 $f(t)$ 成立，其必要充分

条件为

$$b^{-1}(t)K(t,\tau)b^{-1}(\tau)=K(t,\tau),$$

亦即

$$b(t)K(t,\tau)b(\tau)=K(t,\tau). \tag{4.24}$$

易证此条件等价于下列二条件：

$$b^2(t)=E,\ b(t)K(t,\tau)=K(t,\tau)b(\tau),\quad t,\tau\in L. \tag{4.24'}$$

这样，我们便有

定理6.4.1 在 $K(t,\tau)$ 所设解析性条件下，若 $\det b(z)$ 在 $\overline{D}^+$ 上无零点，则对合公式(4.21)，(4.22)成立的必要充分条件为(4.24)或即(4.24)′成立.

特别，如果 $b(t)=E$ 或 $-E$，则条件(4.24)当然成立. 故有

推论6.4.1 在 $K(t,\tau)$ 所设解析性条件下，如果 $b(t)=E$ 或 $-E$，则对合公式(4.21)，(4.22)成立.

注 本段与上段中的讨论，都限于正则型情况，即 $\det S(t)$ 与 $\det D(t)$ 在 L 上都无零点. 如果不是这样，情况较为复杂. 当它们在 L 上有零点，但互不相同时，在著者[11]，[20]中均有过讨论. 当它们有公共零点时，钟寿国在[8]，[70]中有详细的讨论.

习　题

求解 Fredholm 方程(组)

$$a(t)\varphi(t)+\frac{\lambda}{\pi i}\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L,$$

这里 $a(t)$，$K(t,\tau)$ 都是 $N\times N$ 矩阵，为其变元在 $\overline{D}^+$ 上的全纯矩阵，$f(t)$，$\varphi(t)$ 均为 N 维向量，$\in H$，λ 为一常数，且设 $\det a(t)$ 在 $\overline{D}^+$ 上无零点.

提示 参考3.5.6段.

答 对任何 λ，方程均有唯一解

$$\varphi(t)=a^{-1}(t)\left[f(t)-\frac{\lambda}{\pi i}\int_L k(t,\tau)a^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right],\quad t\in L.$$

第七章 其他问题

本章将论述边值问题和有关奇异积分(方程)的某些其他问题，它们都与本书此前讨论的内容直接相关.

7.1 与某些分式线性变换群相联系的边值问题与奇异积分方程

7.1.1 分式线性变换群

我们称

$$\omega(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0 \tag{1.1}$$

为**一分式线性变换**. 由 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ 的条件，$\omega(z)$ 不可能退化为一常数. 以后不妨设 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. 如果特别 $\gamma=0$，则(1.1) 称为**整式线性变换**. (1.1) 的反函数 $\omega^{-1}(z)$ 也是一分式线性变换. 若 $\omega_1(z),\omega_2(z)$ 都是分式线性变换，则其复合也是的.

一组(非空的) 分式线性变换 $\mathscr{G}=\{\omega(z)\}$ 若具有这样的性质：如果 $\omega(z)\in\mathscr{G}$，则 $\omega^{-1}(z)\in\mathscr{G}$；如果 $\omega_1(z),\omega_2(z)$ 都 $\in\mathscr{G}$，则$\omega_2(\omega_1(z))\in\mathscr{G}$，则 $\mathscr{G}$形成**一分式线性变换群**. 易证群 $\mathscr{G}$ 中恒含有恒等变换 $\omega_0(z)=z$. 以后 $\mathscr{G}$ 表示某个分式线性变换群.

给定一群 $\mathscr{G}$. 对复平面中任何两点 z_1,z_2，如果 $\mathscr{G}$ 中有某一元(变换)$\omega(z)$，能使 $\omega(z_1)=z_2$，则称 z_1 与 z_2 关于群 $\mathscr{G}$ **合同**. 设 S 是这样的一区域，其中任何两不同点不相合同，而扩充平面中任何点 z 都可找到它在 S 中的合同点，则称 S 为群 $\mathscr{G}$ 的**基本区域**[①].

---

① S 的边界可分解为若干个部分，使各部分上都不含互为合同的点. 严格说来，S 不是一个区域，而它要包括其边界中的一个这种部分. 更一般地，S 的结构可能极为复杂.

设 $F(z)$ 为整个平面中的一个亚纯函数. 若对 $\mathscr{G}$ 中的任何元 $\omega(z)$，均有

$$F(\omega(z)) = F(z),$$

则称 $F(z)$ 为关于群 $\mathscr{G}$ 的**自守函数**. S 也称为 $F(z)$ 的**基本区域**.

自守函数 $F(z)$，如果不是常数，则在其基本区域 S 中取任何值的次数均相同，即对任何常数 a，$F(z)-a=0$ 在 S 中的根的个数(重数计算在内)都一样，而与 a 无关. 这里 a 可以是 ∞，亦即，极点的个数也一样. 特别，如果自守函数 $F(z)$ 在基本区域内有界，则必为常数.

以前我们讨论过的周期函数实际上是一种特殊的自守函数. 例如，以 $a\pi$ 为周期的解析函数 $f(z)$，是关于群

$$\mathscr{G} = \{\omega_k(z) = z + ka\pi;\ k = 0, \pm 1, \cdots\}$$

的自守函数，其基本区域为一个周期带

$$-\frac{1}{2}a\pi < \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2}a\pi.$$

例如，$\sin\dfrac{2z}{a}$ 就是这样的一个自守函数，它在上述基本区域中有两个零点 0，$\dfrac{1}{2}a\pi$，而在 $\pm\infty\mathrm{i}$ 处取 ∞ 值. 又如，以 $2\omega_1, 2\omega_2$ $(\operatorname{Im}\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\neq 0)$ 为周期的椭圆函数 $f(z)$，则是关于群

$$\mathscr{G} = \{\omega_{mn}(z) = z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2;\ m, n = 0, \pm 1, \cdots\}$$

的自守函数，基本区域就是它的基本胞腔. 当然还有更复杂的群 $\mathscr{G}$ 和自守函数.

以后我们感兴趣的只是有限的线性分式变换群

$$\mathscr{G}: \omega_0(z) = z,\ \omega_1(z),\ \cdots,\ \omega_{n-1}(z), \tag{1.2}$$

它共含有 n 个不同的元，称为 $\mathscr{G}$ 的阶. 例如，

$$\omega_0(z) = z,\ \omega_1(z) = \alpha z,\ \cdots,\ \omega_{n-1}(z) = \alpha^{n-1}z \quad (\alpha = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}});$$

$$\omega_0(z) = z,\ \omega_1(z) = a - z \quad (a \text{ 为常数}, n = 2);$$

$$\omega_0(z) = z,\ \omega_1(z) = \frac{1}{z} \quad (n = 2);$$

$$\omega_0(z) = z,\ \omega_1(z) = -z,\ \omega_2(z) = \frac{1}{z},\ \omega_3(z) = -\frac{1}{z} \quad (n = 4)$$

等，都是有限分式变换群.

对于有限的分式线性变换群(1.2)，重要的是要作出一自守函数 $F(z)$，使它在基本区域 S 内取任何 a 值一次，当然取 ∞ 也只一次. 这种自守函数称为群 $\mathscr{G}$ 的**主自守函数**.

由于每一 $\omega_k(z)$ $(k>0)$ 的不动点(就是使 $\omega(z)=z$ 的点 z)最多只有两

个，故可取一点 a 使它不是 $\mathscr{G}$ 中任何元(当然除去 $\omega_0(z)$，下同)的不动点. 如果 ∞ 点是 $\mathscr{G}$ 中某变换的不动点，则 a 可取为有限值，且当然可取在基本区域 S 内. 这时，我们可以证明

$$F(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\omega_k(z)-a} \tag{1.3}$$

是 $\mathscr{G}$ 的一个主自守函数. 首先，由于对固定的 j $(0\leqslant j\leqslant n-1)$，$\{\omega_k(\omega_j(z))\}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 不过是 $\{\omega_k(z)\}_0^{n-1}$ 的一个重新排列，故 $F(z)$ 关于群 $\mathscr{G}$ 不变，且只含有极点，所以它是 $\mathscr{G}$ 的自守函数. 其次，易见 $F(a)=\infty$，这是因为 $\frac{1}{\omega_0(z)-a}=\frac{1}{z-a}$ 当 $z=a$ 时为 ∞，而对于 $k>0$，$\frac{1}{\omega_k(z)-a}$ 在 $z=a$ 处必有限(因为 a 不是不动点). 再次，对于任何 $b\in S$，且 $\neq a$，$F(b)$ 必有限. 这是因为，设若 $F(b)=\infty$，则必至少对某个 k，有 $\omega_k(b)=a$，从而 b 与 a 合同，此不可能. 因此 $F(z)$ 在 S 中有唯一单极点 a，从而取任何值也恰好一次. 故它确实是 $\mathscr{G}$ 的主自守函数.

如果 ∞ 不是不动点，则主自守函数可更简单地取为

$$F(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(z). \tag{1.4}$$

证明完全与上面类似.

群 $\mathscr{G}$ 的主自守函数 $w=F(z)$ 把基本区域 S 单叶映射到整个 w 扩充平面上，故 $z=F^{-1}(w)$ 把后者单叶映射到 S 上.

下面的讨论都固定了一个有限分式线性变换群 $\mathscr{G}$.

考虑一自守函数 $H_\nu(z)$，它在基本区域 S 中 $z=z_\infty$ 处有 ν 阶极点，且别无其他极点，我们要求作出 $H_\nu(z)$ 的一般形式. 仍设 $F(z)$ 为一主自守函数(例如，如前所述). 记 $w_\infty=F(z_\infty)$. 因此 $H_\nu(F^{-1}(w))$ 在 $w=w_\infty$ 处有 ν 阶极点，且别无其他极点. 如果 w_∞ 有限，则 $H_\nu(F^{-1}(w))$ 在 $w=\infty$ 处也有限. 故 $(w-w_\infty)^\nu H_\nu(F^{-1}(w))$ 在 w 平面中全纯，且在 $w=\infty$ 处有 ν 阶，从而一定是个至多 ν 次的多项式 $P_\nu(w)$. 故

$$H_\nu(F^{-1}(w))=\frac{P_\nu(w)}{(w-w_\infty)^\nu},$$

从而

$$H_\nu(z)=\frac{P_\nu(F(z))}{[F(z)-F(z_\infty)]^\nu}\quad (F(z_\infty)\text{ 有限}). \tag{1.5}$$

如果 $w_\infty=\infty$，则 $H_\nu(F^{-1}(w))$ 在 w 全平面中全纯，但在 ∞ 处有 ν 阶极点，因此 $H_\nu(F^{-1}(w))=P_\nu(w)$，从而

$$H_\nu(z) = P_\nu(F(z)). \quad (1.6)$$

这样，我们得到

引理 7.1.1 如果 $H_\nu(z)$ 是群 $\mathscr{G}$ 的自守函数，在基本区域中有唯一的 ν 阶极点 z_∞（有限点或无穷远点），而 $F(z)$ 为 $\mathscr{G}$ 的主自守函数，则当 $F(z_\infty)$ 有限时，$H_\nu(z)$ 以(1.5)给出，$F(z_\infty)=\infty$ 时，$H_\nu(z)$ 以(1.6)给出，其中 $P_\nu(w)$ 为某个 ν 次多项式.

习 题

1. 对于相应于周期函数与双周期函数的整式线性变换群，是否有类似的主自守函数？

2. 如果无穷远点不是 $\mathscr{G}$ 中元的不动点，试证(1.4)给出的 $F(z)$ 为主自守函数.

7.1.2 与有限分式线性变换群有关的 Riemann 边值问题

以后恒设 $\mathscr{G}$ 为一有限分式线性变换群(1.2). L_0 为基本区域 S 中的一封闭光滑曲线，已取定反时针向为其正向. L_k $(k=1,2,\cdots,n-1)$ 为 L_0 经 $\omega_k(z)$ 变换后的像曲线，它们也是封闭光滑曲线，彼此互不相交. 且设 $\omega_k(z)$ 把 L_0 所围内域 D_0^+（或外域 D_0^-）变换为 L_k 所围的内域 D_k^+（或外域 D_k^-）. 记 $L=\sum_{k=0}^{n-1} L_k$.

现在来求解 R 问题

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (1.7)$$

其中 $G(t), g(t) \in H$ 于 L 上，且关于群 $\mathscr{G}$ 不变，即

$$G(\omega_k(t)) = G(t),\ g(\omega_k(t)) = g(t), \quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

未知分区全纯函数 $\Phi(z)$ 也要求关于 $\mathscr{G}$ 不变，即

$$\Phi(\omega_k(z)) = \Phi(z).$$

这一问题我们称为**AR 问题**. 我们还只限于正则型情况，即假定 $G(t)\neq 0$. 为确定起见，设还要求 $\Phi(\infty)=0$，称为在 AR_{-1} 类中求解.

我们先来考虑齐次 AR_{-1} 问题

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L. \quad (1.8)$$

条件与要求均同上.

对于每一 L_k $(k=0,1,\cdots,n-1)$，我们可用第二章中方法作出相应的典

则函数 $X_k(z)$，则 $X(z)=\prod_{k=0}^{n-1}X_k(z)$ 便是问题(1.8) 的典则函数. 但现在没有必要一一作出 $X_k(z)$，而只要作出$X_0(z)$ 便立即可得 $X(z)$.

设

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_0},$$

它仍称为$G(t)$ 或问题(1.7) 与(1.8) 的**指标**. 由第二章知，任取$z_0\in D_0^+$，则有

$$X_0(z)=\begin{cases}e^{\Gamma_0(z)}, & \text{当 } z\in D_0^+ \text{ 时};\\ (z-z_0)^{-\kappa}e^{\Gamma_0(z)}, & \text{当 } z\in D_0^- \text{ 时},\end{cases}\tag{1.9}$$

其中

$$\Gamma_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\log[(\tau-z_0)^{-\kappa}G(\tau)]}{\tau-z}d\tau.\tag{1.10}$$

立即可见

$$X(z)=\prod_{k=0}^{n-1}X_k(z),\quad X_k(z)=X_0(\omega_k(z))\tag{1.11}$$

为(1.8) 的典则函数；它满足条件 $X(\omega_k(z))=X(z)$，处处不等于 0，但在 $z=\infty$ (及其合同点，下同) 处有 $-\kappa$ 阶，且满足条件

$$X^+(t)=G(t)X^-(t),\quad t\in L.$$

这些都易于直接验证. 与(1.8) 相除，得

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}.$$

因此，$\Phi(z)/X(z)$ 在全平面全纯，但在∞处有$\kappa-1$阶，且关于群$\mathcal{G}$不变，因此它是关于群 $\mathcal{G}$ 的自守函数. 如果$\kappa\geqslant 1$，则由引理 7.1.1，它就是 $H_{\kappa-1}(z)$. 因此所求解

$$\Phi(z)=X(z)H_{\kappa-1}(z),\tag{1.12}$$

其中 $H_{\kappa-1}(z)$ 由(1.5) 或(1.6) 给出，随着 $F(z_\infty)$ 为有限或无限而定，而 z_∞ 现在就是无穷远点(或它在 S 中的合同点). 如果$\kappa<1$，则 $\Phi(z)$ 将恒等于零. 由于这时 $P_{\kappa-1}$ 可看做恒等于零，故(1.12) 也还成立.

于是我们有

定理 7.1.1 齐次 AR_{-1} 问题(1.8) 当 $\kappa\geqslant 1$ 时有一般解(1.12)，故有 κ 个线性无关的解；当 $\kappa\leqslant 0$ 时只有零解.

现在来讨论非齐次 AR_{-1} 问题(1.7). 将它改写为

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}+\frac{g(t)}{X^+(t)},\quad t\in L. \tag{1.13}$$

现在令

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)[\tau-\omega_k(z)]}\mathrm{d}\tau,\quad z\,\overline{\in}\,L, \tag{1.14}$$

则易见 $\Psi(\omega_j(z))=\Psi(z)\ (j=0,1,\cdots,n-1)$，$\Psi(\infty)$ 有限，且当 $z\to t\in L_0$ 时，

$$\Psi^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)[\tau-\omega_k(t)]}\mathrm{d}\tau, \tag{1.15}$$

故

$$\Psi^+(t)-\Psi^-(t)=\frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

此式既对 $t\in L_0$ 成立，故对一切 $t\in L$ 也成立，因为此式两边当 t 换成 $\omega_j(t)$ 时都不变. 于是

$$\Phi(z)=X(z)\Psi(z)$$

满足(1.7).

当 $\kappa>0$ 时，因为 $X(\infty)=0$，故 $X(z)\Psi(z)$ 已是 AR_{-1} 问题(1.7) 的一个特解，因此它的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)[\Psi(z)+H_{\kappa-1}(z)], \tag{1.16}$$

其中 $\Psi(z)$ 由(1.14) 给出，$H_{\kappa-1}(z)$ 由(1.5) 或(1.6) 给出.

如果 $\kappa=0$，则 $X(\infty)$ 有界但 $\neq 0$. 这时 $H_{\kappa-1}(z)=0$，AR_{-1} 问题(1.7) 有唯一解

$$\Phi(z)=X(z)[\Psi(z)-\Psi(\infty)],$$

或即

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(z)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

如果 $\kappa<0$，则由(1.17) 确定的 $\Phi(z)$ 不足以保证 $\Phi(\infty)=0$. 为使这一条件满足，还必须要求 $\Psi(z)-\Psi(\infty)$ 在 $z=\infty$ 处至少有 $-\kappa+1$ 阶零点. 我们来写出这一要求的明显表达式.

为此，我们对于任一分式线性变换

$$\omega(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\quad(\alpha\delta-\beta\gamma=1),$$

求出函数 $\dfrac{1}{\tau-\omega(z)}$ 在 $z=\infty$ 附近的 Laurent 展式. 注意到 $\omega^{-1}(\tau)=\dfrac{-\delta\tau+\beta}{\gamma\tau-\alpha}$，

且$[\omega^{-1}(\tau)]'=\dfrac{1}{(\gamma\tau-\alpha)^2}$，故有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau-\omega(z)}&=\frac{\gamma z+\delta}{(\gamma\tau-\alpha)z+\delta\tau-\beta}=\frac{\gamma z+\delta}{\gamma\tau-\alpha}\frac{1}{z-\omega^{-1}(\tau)}\\&=\frac{\gamma}{\gamma\tau-\alpha}\left(1+\frac{\delta}{\gamma z}\right)\left\{1+\frac{\omega^{-1}(\tau)}{z}+\frac{[\omega^{-1}(\tau)]^2}{z^2}+\cdots\right\}\\&=\frac{1}{\tau-\dfrac{\alpha}{\gamma}}+\frac{\gamma}{\gamma\tau-\alpha}\left[\frac{\delta}{\gamma}+\omega^{-1}(\tau)\right]\\&\quad\cdot\left\{\frac{1}{z}+\frac{\omega^{-1}(\tau)}{z^2}+\frac{[\omega^{-1}(\tau)]^2}{z^3}+\cdots\right\}\\&=\frac{1}{\tau-\omega(\infty)}-[\omega^{-1}(\tau)]'\left\{\frac{1}{z}+\frac{\omega^{-1}(\tau)}{z^2}+\frac{[\omega^{-1}(\tau)]^2}{z^3}+\cdots\right\}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\Psi(z)-\Psi(\infty)\\&=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}[\omega_k^{-1}(\tau)]'\left\{\frac{1}{z}+\frac{\omega_k^{-1}(\tau)}{z^2}+\frac{[\omega_k^{-1}(\tau)]^2}{z^3}+\cdots\right\}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{1.18}$$

所以上述要求的条件就是

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}[\omega_k^{-1}(\tau)]'[\omega_k^{-1}(\tau)]^{r-1}\mathrm{d}\tau=0,\quad r=1,2,\cdots,-\kappa.$$

但$\{\omega_k^{-1}(\tau)\}_0^{n-1}$ 无非是$\{\omega_k(\tau)\}_0^{n-1}$ 的一个重新排列，故上式又可写为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\omega_k'(\tau)\omega_k^{r-1}(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\quad r=1,2,\cdots,-\kappa.\tag{1.19}$$

因此我们有

定理7.1.2 非齐次 AR_{-1} 问题(1.7)，当指标$\kappa>0$时有一般解(1.16)；当$\kappa=0$时有唯一解(1.17)；当$\kappa<0$时当且仅当满足$-\kappa$个条件(1.19)时才可解，且有唯一解(1.17).

可见，AR_{-1} 问题(1.7)解的自由度为κ.

习 题

试求解 AR 问题(1.7)，但要求$\Phi(z)$在$z=\infty$处至多有m阶(即在AR_m中求解).

7.1.3 与有限分式线性变换群有关的奇异积分方程

现在来考虑奇异积分方程

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L_0,\tag{1.20}$$

其中 $a(t),b(t),f(t)$ 均 $\in H$ 已给于 L_0 上，未知函数 $\varphi(t)$ 也 $\in H$ 于 L_0 上，而 $\{\omega_k(z)\}_0^{n-1}$ 形成一分式线性变换群 $\mathscr{G}$. 我们也只限于正则型情况：$a(t)\pm b(t)\neq 0$ 于 L_0 上.

和通常一样，求解时令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(z)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad z\overline{\in} L.\tag{1.21}$$

显然 $\Phi(\omega_j(z))=\Phi(z)$ $(j=0,1,\cdots,n-1)$，故 $\Phi(z)$ 关于群 $\mathscr{G}$ 不变. 令 $z\to t\in L$，则立即可得

$$\Phi^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\in L.$$

所以，当 $t\in L$ 时，以此代入(1.20)，立即可得

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L_0,\tag{1.22}$$

其中

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)},\quad g(t)=\frac{f(t)}{a(t)+b(t)},\quad t\in L_0.\tag{1.23}$$

我们如果把 $a(t),b(t),f(t)$ 扩充定义到 L 上，使当 $t\in L_k$ 时，$a(t)=a(\omega_k^{-1}(t))$，等等，则 $G(t),g(t)$ 也扩充定义到 L 上，且

$$G(\omega_k(t))=G(t),\quad g(\omega_k(t))=g(t).$$

这样，(1.22) 就成为(1.7)，且已见 $\Phi(\omega_k(z))=\Phi(z)$. 又因从(1.21)立即可看出 $\Phi(\infty)=0$，故方程(1.20) 就化为 AR_{-1} 问题(1.7). 一旦求出了它的解 $\Phi(z)$，则(1.20) 的解就可由

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),\quad t\in L_0\tag{1.24}$$

求出；而且此 AR_{-1} 问题的可解条件，也就是方程(1.20) 的可解条件.

当 $\kappa>0$ 时，(1.7) 在 AR_{-1} 问题中的一般解为(1.16)，代入(1.24)，得

$$\varphi(t)=X^+(t)\Psi^+(t)-X^-(t)\Psi^-(t)+[X^+(t)-X^-(t)]H_{\kappa-1}(t),$$

这里 $X(z)$ 仍由(1.9) ~ (1.11) 给出，其中 $G(t)$ 由(1.23) 给出，$\Psi(z)$ 由(1.14) 给出，其中 $g(t)$ 由(1.23) 给出. 如果记

$$Z(t)=[a(t)+b(t)]X^{+}(t)=[a(t)-b(t)]X^{-}(t),$$

则由上式以及(1.15)，可得

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{G(t)}\right]g(t)+X^{+}(t)\left[1-\frac{1}{G(t)}\right]$$
$$\cdot\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(\tau)d\tau}{X^{+}(\tau)[\tau-\omega_k(t)]}+H_{\kappa-1}(t)\right\},$$

或即

$$\varphi(t)=a^*(t)f(t)-b^*(t)Z(t)$$
$$\cdot\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(\tau)d\tau}{Z(\tau)[\tau-\omega_k(t)]}-H_{\kappa-1}(t)\right\},\quad t\in L_0,\quad(1.25)$$

其中已令

$$a^*(t)=\frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)},\quad b^*(t)=\frac{b(t)}{a^2(t)-b^2(t)},$$

这里 $H_{\kappa-1}(t)$ 前面原来的系数 1/2 已吸收于 $\kappa-1$ 次任意多项式 $P_{\kappa-1}(t)$ 中. (1.25) 即是方程(1.20) 的一般解.

当 $\kappa=0$ 时，(1.20) 有唯一解，它显然是

$$\varphi(t)=a^*(t)f(t)-\frac{b^*(t)Z(t)}{\pi i}$$
$$\cdot\int_{L_0}\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]d\tau.\quad(1.26)$$

当 $\kappa<0$ 时，方程(1.20) 的可解条件亦即 AR_{-1} 问题(1.7) 的可解条件，由(1.19)，为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{L_0}\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\omega_k'(\tau)\omega_k^{r-1}(\tau)d\tau=0,\quad r=1,2,\cdots,-\kappa.\quad(1.27)$$

因此我们有

定理 7.1.3 奇异积分方程(1.20) 当 $\kappa>0$ 时有一般解(1.25)；当 $\kappa=0$ 时有唯一解(1.26)；当 $\kappa<0$ 时当且仅当条件(1.27) 成立时才有解，且解唯一，仍以(1.26) 给出.

可见，此方程解的自由度为 κ.

下面我们考虑另一种奇异积分方程：

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}\varphi(\tau)d\tau=f(t),\quad t\in L_0,\quad(1.28)$$

一切记号与条件同前.

比较 3.4.2 段的方法，我们可把方程(1.28) 改写为

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=f(t)-\lambda b(t),\quad t\in L_0,\tag{1.29}$$

这里已令

$$\lambda=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau.\tag{1.30}$$

暂把 λ 看做参数求解(1.29)，得到解 $\varphi_\lambda(t)$；然后代入(1.30)，得到 λ 的一个线性方程；选取 λ 使适合此方程，代回 $\varphi_\lambda(t)$ 中，便可得到方程(1.28)的解. 下面我们按此步骤进行.

先设 $\kappa>0$. 由(1.25)知，(1.29)的一般解为

$$\varphi_\lambda(t)=\boldsymbol{\Gamma}_0 f-\lambda\boldsymbol{\Gamma}_0 b+b^*(t)Z(t)H_{\kappa-1}(t),\tag{1.31}$$

其中算子 $\boldsymbol{\Gamma}_0$ 由下式定义：

$$\boldsymbol{\Gamma}_0 f\equiv a^*(t)f(t)-\frac{b^*(t)Z(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}\mathrm{d}\tau.\tag{1.32}$$

以(1.31)代入(1.30)，得

$$\lambda\left[1+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\boldsymbol{\Gamma}_0 b)(\tau)}{\tau-\omega_k(t)}\mathrm{d}\tau\right]$$
$$=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\boldsymbol{\Gamma}_0 f)(\tau)}{\tau-\omega_k(\infty)}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b^*(\tau)Z(\tau)H_{\kappa-1}(\tau)}{\tau-\omega_k(\infty)}\mathrm{d}\tau.\tag{1.33}$$

如果左边[…] $\neq 0$，则 λ 可一意确定：$\lambda=\lambda_0$. 因此(1.28)的一般解为(1.31)，其中 $\lambda=\lambda_0$，这里共包含 κ 个任意常数. 如果上式左边[…] $=0$，则上式右边亦必须等于零，从而 $H_{\kappa-1}(t)$ 中 $P_{\kappa-1}(t)$ 的 κ 个系数间要受一个线性约束，而 λ 却可任意；这样，(1.28)的一般解(1.31)中仍含有 κ 个任意常数.

其次设 $\kappa=0$. 则由(1.26)，

$$\varphi(t)=\boldsymbol{\Gamma}_0 f-\lambda\boldsymbol{\Gamma}_0 b+(f_0-\lambda b_0)b^*(t)Z(t),\tag{1.34}$$

其中已令

$$f_0=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\mathrm{d}\tau,$$

$$b_0=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\frac{b(\tau)}{Z(\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

将(1.34)代入(1.30)，得

$$\lambda\left[1+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\boldsymbol{\Gamma}_0 b)(\tau)}{\tau-\omega_k(\infty)}\mathrm{d}\tau+\frac{b_0}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b^*(\tau)Z(\tau)}{\tau-\omega_k(\infty)}\mathrm{d}\tau\right]$$
$$=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\boldsymbol{\Gamma}_0 f)(\tau)}{\tau-\omega_k(\infty)}\mathrm{d}\tau+\frac{f_0}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b^*(\tau)Z(\tau)}{\tau-\omega_k(\infty)}\mathrm{d}\tau.\tag{1.35}$$

因此，如果上式左边[…]≠0，则$\lambda=\lambda_0$可一意确定，以此代入(1.31)，便得方程(1.28)的唯一解. 但若[…]=0，则必须(1.35)的右边也等于零，此即方程(1.28)的可解条件；而当它满足时，λ却可任意，即(1.31)为方程(1.28)的一般解.

最后设$\kappa<0$. 方程(1.29)的可解条件为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{L_0}\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\omega_k'(\tau)\omega_k^{r-1}(\tau)\mathrm{d}\tau=\lambda\sum_{k=0}^{n-1}\int_{L_0}\frac{b(\tau)}{Z(\tau)}\omega_k'(\tau)\omega_k^{r-1}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad r=1,2,\cdots,-\kappa. \tag{1.36}$$

再添上(1.35)，它们一起相容便是方程(1.28)的可解条件. 只要(1.35)，(1.36)诸式中至少有一个其λ的系数不等于零，由此式便可一意确定$\lambda=\lambda_0$，而以此代入其余的$-\kappa$个式子，便是方程(1.28)的$-\kappa$个可解条件. 如果(1.35)，(1.36)中λ的系数都等于零，则共有$-\kappa+1$个可解条件，而λ可保持任意.

因此我们有

定理7.1.4 *方程(1.28)当$\kappa>0$时恒可解，且一般解中含有κ个任意常数；当$\kappa=0$时它或者有唯一解，或者有一个可解条件而一般解中含有一个任意常数；当$\kappa<0$时，它或者有$-\kappa$个可解条件而有唯一解，或者有$-\kappa+1$个可解条件而一般解中含有一个任意常数.*

总之，此方程解的广义自由度为κ.

注1 如果$\mathscr{G}$中有一元$\omega_j(z)$把L_0的正向变换为L_j的负向(顺时针向)，则D_0^+将变为L_j的外域，这时，(1.22)经扩充到L_j上时，将成为

$$\Phi^-(t)=G(t)\Phi^+(t)+g(t),\quad t\in L_j,$$

亦即

$$\Phi^+(t)=\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}\Phi^-(t)-\frac{f(t)}{a(t)-b(t)},\quad t\in L_j.$$

所以，如果在L_j上，$G(t),g(t)$的扩充定义方法改为

$$G(\tau)=\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)},\quad g(\tau)=\frac{-f(t)}{a(t)-b(t)},\quad t\in L_0,\ \tau=\omega_j(t),$$

则以上的推理和结果仍都成立. 如果有不止一个$\omega_j(z)$有此情况，也可完全同样地处理.

注2 如果L_0并不完全位于基本区域S中，则各个L_k可能彼此相交. 只要这种交点只有有限个，则本节所论完全成立，不过在交点处当然谈不上满足边值问题或奇异积分方程.

本节材料大部分取自[36]，§51，但作了一些简化、修改和补充，并改正了其中某些错误. 当 $\mathscr{G}$ 为无限群时，问题复杂得多；但在应用上最重要的相应于单周期或双周期函数的群，事实上我们在以前有关章节中已讨论过了.

习 题

1. 如果有限群 $\mathscr{G}$ 中的元都是整式线性变换，则方程(1.20) 就是(1.28). 试证这时定理 7.1.3 与定理 7.1.4 的确一致.

2. 如果有限群 $\mathscr{G}$ 中除 $\omega_0(z)=z$ 外，别无其他整式线性变换，试证(1.6)式成立，且

$$F(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(z).$$

3. 设群 $\mathscr{G}=\{z,\alpha z,\cdots,\alpha^{n-1}z\}$ $(\alpha=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}})$，又 L_0 为单位圆周 $|t|=1$. 试求解 AR_{-1} 问题(1.22)，这里 $G(t),g(t)\in H$ 均关于 $\mathscr{G}$ 不变，且 $G(t)\neq 0$. 由此并求解方程

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\alpha^k t}\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L_0,$$

这里 $a(t),b(t),f(t)$ 均 $\in H$，关于 $\mathscr{G}$ 不变，且 $a(t)\pm b(t)\neq 0$.

7.2 带位移的边值问题和奇异积分方程

7.2.1 带位移的 Riemann 边值问题

本节中将讨论所谓带有位移的边值问题和奇异积分方程，但只涉及比较简单的最基本的情况. 更一般的情况在[41] 中有详细讨论.

设 L 是复平面中的一条封闭的 Lyapunov 曲线，已取定其反时针向为正向. $\tau=\alpha(t)$ 为 L 上的一连续函数，它把 L 一对一地映射到 L 自身，因此 $\alpha(t)$ 的反函数 $t=\alpha^{-1}(\tau)$ 也连续，一对一；这时我们也说 $\alpha(t)$ 是 L 自身上的**同胚映射**(此外，我们还总设 $\alpha'(t)\in H$ 且 $\neq 0$ 于 L 上). 我们称 $\alpha(t)$ 为 L 的**一位移**. 如果 t 沿 L 正向环行一周时，$\tau=\alpha(t)$ 也沿 L 正向环行一周，即保持 L 的正向不变，则称 $\alpha(t)$ 为 L 的**正位移**；否则，$\tau=\alpha(t)$ 就把 L 的正向变成 L 的负向，这时就称它为 L 的**反位移**.

本段中恒设 $\alpha(t)$ 为 L 的正位移. L 所围内域记为 D^+，外域记为 D^-.

所谓 L 上**带位移的 Riemann 边值问题**，简记为**SR** 问题，是指：寻求一分区全纯函数 $\Phi(z)$，使其满足边值条件

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \tag{2.1}$$

其中 $G(t), g(t) \in H$，且 $G(t) \neq 0$（正则型）. 此外，我们要求 $\Phi(z)$ 在 $z = \infty$ 处有有限阶. 我们以后将看到，如果(2.1) 的解存在，则必 $\Phi^\pm(t) \in H$.

上述问题也称为 **Haseman** 问题.

如果 $\alpha(t) \equiv t$，这便是通常的 R 问题. 我们知道，如果 $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$，且 $\Phi(\infty) = 0$，则必 $\Phi(z) \equiv 0$. 这一结果可以推广到较一般的情形.

引理 7.2.1 如果 $\Phi(z)$ 分区全纯，$\Phi(\infty) = 0$，而 $\alpha(t)$ 为 L 的正位移，且满足边值条件

$$\Phi^+(\alpha(t)) = \Phi^-(t), \quad t \in L, \tag{2.2}$$

则必 $\Phi(z) = 0$；而若 $\Phi(\infty)$ 有界，则必 $\Phi(z) \equiv$ 常数.

下面的证明中，暂设 $\Phi^\pm(t) \in H$；以后将会看到，即使无此条件，仅设 $\Phi^\pm(t)$ 连续，本引理也成立.

证 首先我们证明，边值问题(2.2) 在 $\Phi(\infty) = 0$ 的条件下只可能有有限个线性无关的解. 设 $\Phi(z)$ 是这样的一个解，且有边值 $\Phi^\pm(t) \in H$，则由 Cauchy 公式和 Plemelj 公式，

$$\left.\begin{aligned} &\Phi^+(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - t}d\tau = 0, \\ &\Phi^-(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t}d\tau = 0, \end{aligned}\right\} \quad t \in L. \tag{2.3}$$

在第一式中把 t 改为 $\alpha(t)$，τ 改为 $\alpha(\tau)$，利用(2.2)，并注意到 $\alpha(t)$ 保持 L 的正向不变，则它成为

$$\Phi^-(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}d\tau = 0.$$

再把此式与(2.3) 中第二式相加，即得

$$\Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L K(t,\tau)\Phi^-(\tau)d\tau = 0, \tag{2.4}$$

其中

$$K(t,\tau) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}. \tag{2.5}$$

我们来证明，$K(t,\tau)$ 是一(弱) Fredholm 核，即

$$|K(t,\tau)| \leqslant \frac{M}{|\tau - t|^\nu}, \quad 0 \leqslant \nu < 1, \tag{2.6}$$

其中 M 为一常数. 事实上, 设 $\alpha'(t)\in H^{\mu}\,(0<\mu\leqslant 1)$:

$$|\alpha'(\tau)-\alpha'(t)|\leqslant A|\tau-t|^{\mu}\quad (A\text{ 为常数}),$$

则有

$$|\alpha(\tau)-\alpha(t)-\alpha'(\tau)(\tau-t)|=\left|\int_t^{\tau}[\alpha'(\zeta)-\alpha'(\tau)]\mathrm{d}\zeta\right|$$
$$\leqslant A\left|\int_t^{\tau}|\zeta-\tau|^{\mu}|\mathrm{d}\zeta|\right|.$$

用 s 表示 L 上的弧长参数, 用 τ 点表示 $s=0$ 即弧长度量的起点, 并设 t,ζ 处弧长参数分别为 s,σ, 则(不妨设 $s,\sigma\geqslant 0$)

$$\left|\int_t^{\tau}|\zeta-\tau|^{\mu}|\mathrm{d}\zeta|\right|\leqslant\int_0^s\sigma^{\mu}\mathrm{d}\sigma=\frac{s^{\mu+1}}{\mu+1}\leqslant\frac{C}{\mu+1}|\tau-t|^{\mu+1},$$

其中 C 为 1.2.2 段中的常数. 以此代入上式, 则有

$$|K(t,\tau)|=\left|\frac{\alpha(\tau)-\alpha(t)-\alpha'(\tau)(\tau-t)}{[\alpha(\tau)-\alpha(t)](\tau-t)}\right|$$
$$\leqslant\frac{M_1}{|\tau-t|^{1-\mu}}\left|\frac{\tau-t}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right|,$$

其中 M_1 为一常数. 但

$$\lim_{\tau\to t}\left|\frac{\tau-t}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right|=\frac{1}{|\alpha'(t)|}.$$

又因 $\alpha'(t)\neq 0$ 且连续, 因此 $1/|\alpha'(t)|$ 有界. 于是当 t,τ 充分接近时, 易证 $\left|\dfrac{\tau-t}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right|$ 一致地有界, 从而(2.6) 成立(其中 $\nu=1-\mu$).

于是(2.4) 为(弱) Fredholm方程, 故它至多只可能有有限个线性无关的解, 从而(2.2) 在 $\Phi(\infty)=0$ 的条件下也只有有限个线性无关的解.

今设(2.2) 有一非零解 $\Phi_0(z)$ 使 $\Phi_0(\infty)=0$. 则显然 $\Phi_0^k(z)$ $(k=1,2,\cdots)$ 也都是这样的解. 但它们显然是线性无关的, 这就与以上结论相矛盾. 所以引理的前半段(在 $\Phi^{\pm}(t)\in H$ 的假设下) 得证.

引理后半段极为明显, 因为如果 $\Phi(\infty)=C_0$, 则 $\Phi_0(z)=\Phi(z)-C_0$ 由已证结果必恒等于零. □

现在来讨论问题(2.1) 的求解. 先讨论最简单的跳跃问题:

$$\Phi^+(\alpha(t))=\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L. \tag{2.7}$$

因 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处为有限阶的, 不妨设其主部为

$$P(z)=C_0+C_1z+\cdots+C_nz^n,$$

且认为已经给定.

设(2.7) 有解 $\Phi(z)$, 在 ∞ 处以 $P(z)$ 为主部. 引进未知函数 $\varphi(t)\in H$ 于

L 上，使

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi^+(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_L\dfrac{\varphi(\alpha^{-1}(\tau))}{\tau-z}\mathrm{d}\tau, & \text{当 } z\in D^+ \text{ 时；}\\ \Phi^-(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_L\dfrac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+P(z), & \text{当 } z\in D^- \text{ 时.}\end{cases}\tag{2.8}$$

以后将证明，若上述解存在，则这种 $\varphi(t)$ 一定存在.

在(2.8) 中引用 Plemelj 公式，立得

$$\left.\begin{aligned}\Phi^+(\alpha(t))&=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\alpha'(\tau)\varphi(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\mathrm{d}\tau,\\ \Phi^-(t)&=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+P(t),\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

代入(2.7)，便得方程

$$\boldsymbol{K}\varphi\equiv\varphi(t)-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L K(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=g(t)+P(t),\tag{2.10}$$

其中 $K(t,\tau)$ 由(2.5) 给出. 这是一个(弱) Fredholm 方程. 由于 $g(t)\in H$，其解(如果存在) 必 $\in H$.

现在证明(2.10) 对任何给定的 $g(t)$,$P(t)$ 有唯一解. 根据 Fredholm 理论，为此只须证明 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 只有零解. 事实上，设$\varphi_0(t)$ 是 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的一个解，它必 $\in H$. 再令

$$\Phi_0(z)=\begin{cases}\Phi_0^+(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_L\dfrac{\varphi_0(\alpha^{-1}(\tau))}{\tau-z}\mathrm{d}\tau, & \text{当 } z\in D^+ \text{ 时；}\\ \Phi_0^-(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_L\dfrac{\varphi_0(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau, & \text{当 } z\in D^- \text{ 时，}\end{cases}\tag{2.11}$$

且因 $\varphi_0(t)\in H$，故 $\Phi_0^\pm(t)\in H$. 于是，用(2.8) 以下相似的推理($P\equiv0$)，从 $\boldsymbol{K}\varphi_0=0$ 可得

$$\Phi_0^+(\alpha(t))=\Phi_0^-(t),\quad t\in L;$$

且明显地有 $\Phi_0(\infty)=0$. 故由引理 7.2.1 (已证得的部分) 知，$\Phi_0(z)\equiv0$. 再由(2.11) 的后一式，便知道 $\varphi_0(\alpha^{-1}(t))$ 为 D^- 内某全纯函数 $\Psi^-(z)$ 的边值:

$$\varphi_0(\alpha^{-1}(t))=\Psi^-(t),$$

且 $\Psi^-(\infty)=0$；而由后一式知，$\varphi_0(t)$ 为 D^+ 内某全纯函数 $\Psi^+(z)$ 的边值: $\varphi_0(t)=\Psi^+(t)$，于是，

$$\Psi^+(\alpha^{-1}(t))=\Psi^-(t),\quad \Psi^-(\infty)=0.$$

注意到 $\Psi^\pm(t)\in H$，故再由上述引理(已证部分) 知，$\Psi^\pm(z)\equiv0$. 于是 $\varphi_0(t)=0$. 亦即 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 只有零解.

既然(2.10) 对任意给定的 $g(t)\in H$ 与多项式 $P(t)$ 均可解，且有唯一解

$\in H$，用这个解经(2.8)表示的 $\Phi(z)$ 便是跳跃问题(2.7)（在 ∞ 处主部为 $P(z)$）的唯一解.

顺便也证明了这个解 $\Phi(z)$ 表示成(2.8)的可能性以及唯一性，其中 $\varphi(t)$ 确实 $\in H$.

于是我们有

定理7.2.1 跳跃问题(2.7)（其中 $g(t)\in H$），当 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处的主部 $P(z)$ 给定时，恒有唯一解，且此解可由(2.8)给出，其中 $\varphi(t)\in H$ 是(2.10)的唯一解. 一般说来，跳跃问题(2.7)在 ∞ 处最多有 m ($\geqslant 0$) 阶（即在 SR_m 中）的一般解由(2.8)给出，其中 $\varphi(t)\in H$ 为(2.10)的解，这里 $P(t)$ 为 m 次任意多项式. 特别，SR_{-1} 跳跃问题(2.7)只有零解. 还可看出，(2.7)的解 $\Phi(z)$ 的边值 $\Phi^{\pm}(t)\in H$.

现在讨论齐次 SR 问题

$$\Phi^{+}(\alpha(t)) = G(t)\Phi^{-}(t),\quad t\in L,\tag{2.12}$$

其中 $G(t)\in H$ 且 $\neq 0$. $G(t)$ 的指标 $\kappa=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L$. 不失一般性，我们将假定 $O\in D^{+}$. 仍要求 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处有有限阶.

解法与不带位移的情况相似，可把(2.12)改写为

$$\Phi^{+}(\alpha(t)) = [t^{-\kappa}G(t)]\cdot t^{\kappa}\Phi^{-}(t).$$

这启发我们令

$$X(z)=\begin{cases} X^{+}(z)=\exp\left\{\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_L\dfrac{\chi(\alpha^{-1}(\tau))}{\tau-z}\mathrm{d}\tau\right\}, & \text{当 } z\in D^{+}\text{ 时；}\\ X^{-}(z)=z^{-\kappa}\exp\left\{\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_L\dfrac{\chi(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau\right\}, & \text{当 } z\in D^{-}\text{ 时，}\end{cases}\tag{2.13}$$

其中 $\chi(t)$ 为方程

$$\mathbf{K}\chi=\log[t^{-\kappa}G(t)]$$

的解，这个解一定存在、唯一，且 $\in H$.

易于验证，

$$X^{+}(\alpha(t)) = G(t)X^{-}(t).\tag{2.14}$$

这只要在两边取对数后由定理 7.2.1 便可立即看出. 又 $X(z)$ 处处 $\neq 0$，在 $z=\infty$ 处为 $-\kappa$ 阶. $X(z)$ 仍称为问题的**典则函数**(解).

以(2.14)除(2.12)，如果记

$$\Omega(z)=\frac{\Phi(z)}{X(z)},$$

则有

$$\Omega^+(\alpha(t)) = \Omega^-(t),$$

且 $\Omega(z)$ 在 $z=\infty$ 处仍有有限阶. 因此，再由定理 7.2.1，得知

$$\Omega(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\omega(\alpha^{-1}(\tau))}{\tau - z}d\tau, & \text{当 } z \in D^+ \text{ 时;} \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\omega(\tau)}{\tau - z}d\tau + P(z), & \text{当 } z \in D^- \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $P(z)$ 为任意多项式，而 $\omega(t)$ 为 $\boldsymbol{K}\omega = P(t)$ 的解，它由$P(z)$ 唯一确定. 换回到原未知函数 $\Phi(z)$，则

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\omega(\alpha^{-1}(\tau))}{\tau - z}d\tau, & \text{当 } z \in D^+ \text{ 时;} \\ \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\omega(\tau)}{\tau - z}d\tau + X(z)P(z), & \text{当 } z \in D^- \text{ 时.} \end{cases} \tag{2.15}$$

于是我们有

定理 7.2.2 齐次 SR 问题(2.12) 在 ∞ 处有有限阶的解由(2.15) 给出，这里 $X(z)$ 为典则函数，由(2.13) 给出，其中 $\chi(t)$ 为 $\boldsymbol{K}\chi = \log[t^{-\kappa}G(t)]$ 的解，而 κ 为 $G(t)$ 的指标，$P(z)$ 为任意多项式，$\omega(t)$ 为 $\boldsymbol{K}\omega = P(t)$ 的解. 若$P(z)$ 为 m 次多项式，则 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处有 $m-\kappa$ 阶. 特别，若要求 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处有 m 阶，则当 $\kappa+m\geqslant 0$ 时，应取 $P(z)$ 为 $\kappa+m$ 次任意多项式，而问题共有 $\kappa+m+1$ 个线性无关解；当 $\kappa+m<0$ 时，它只有零解.

现在讨论非齐次 SR 问题(2.1). 取典则函数 $X(z)$ 如前，则它可写成

$$\frac{\Phi^+(\alpha(t))}{X^+(\alpha(t))} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(\alpha(t))},$$

由此按(2.15)，立即可得

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\alpha^{-1}(\tau))}{\tau - z}d\tau, & \text{当 } z \in D^+ \text{ 时;} \\ \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau + X(z)P(z), & \text{当 } z \in D^- \text{ 时,} \end{cases} \tag{2.16}$$

其中 $P(z)$ 仍为任意多项式，而 $\varphi(t)$ 为方程

$$\boldsymbol{K}\varphi = \frac{g(t)}{X^+(\alpha(t))} + P(t) \tag{2.17}$$

的解.

我们最感兴趣的是问题(2.1) 在 SR_{-1} 中求解，即要求 $\Phi(\infty)=0$. 这时，当指标 $\kappa\geqslant 0$ 时，它的一般解由(2.16) 给出，其中$P(z)$ 为 $\kappa-1$ 次任意多项

式，因而一般解中含有κ个任意常数；当$\kappa<0$时，则在(2.16)中应取$P\equiv 0$，且有可解条件

$$\int_L \tau^r \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = 0, \quad r = 0,1,\cdots,-\kappa-1, \tag{2.18}$$

其中 $\varphi(t)$ 为

$$\boldsymbol{K}\varphi = \frac{g(t)}{X^+(\alpha(t))}$$

的唯一解：

$$\varphi(t) = g(t) + \int_L \frac{\gamma(t,\tau)}{X^+(\alpha(\tau))} g(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

这里 $\gamma(t,\tau)$ 为 $\boldsymbol{K}$ 的预解核. 以此代入(2.18)，后者可写成

$$\int_L h_r(t) g(t)\mathrm{d}t = 0, \quad r = 1,2,\cdots,-\kappa, \tag{2.19}$$

其中 $h_1,h_2,\cdots,h_{-\kappa}$ 为与 $g(t)$ 无关的、确定的线性无关函数.

于是我们有

定理 7.2.3 非齐次 SR_{-1} 问题(2.1)，当 $\kappa\geqslant 0$ 时一般解由(2.16)～(2.17)给出，其中 $P(z)$ 为 $\kappa-1$ 次任意多项式；当 $\kappa<0$ 时要满足 $-\kappa$ 个可解条件(2.19)时才有唯一解(2.16)～(2.17)（其中 $P\equiv 0$）. 总之，问题的解的自由度为 κ.

为了以后的需要，最后我们来证明下面这一有关分区全纯函数的表示引理：

引理 7.2.2 设 $\Phi(z)$ 是以 L 为间断曲线的分区全纯函数，在 L 上有边值 $\Phi^{\pm}(t)\in H$，且 $\Phi(\infty)=0$，又 $\alpha(t)$ 为 L 的一正位移，则必存在唯一的函数 $\varphi(t)\in H$ 于 L 上，使得

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\alpha^{-1}(\tau))}{\tau - z}\mathrm{d}\tau, & \text{当 } z\in D^+ \text{ 时；} \\ \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau, & \text{当 } z\in D^- \text{ 时.} \end{cases} \tag{2.20}$$

证 记 $g(t) = \Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t)$，则 $g(t)\in H$ 于 L 上. 把此式看成一个 SR 跳跃问题，由(2.8)式($P\equiv 0$)及其下面的说明，立即可得引理的结论. □

习 题

1. 试证(2.19)中的 $h_1(t),h_2(t),\cdots,h_{-\kappa}(t)$ 线性无关.

2. 条件同引理 7.2.2，但 $\Phi(z)$ 在 ∞ 处有 κ 阶，则引理结论将如何？

提示 分别就 $\kappa\geqslant 0$ 与 $\kappa<0$ 两种情况讨论.

3. 如果 $\alpha(t)$ 为 L 自身的反位移，则引理 7.2.1 是否成立？

答 不成立.

提示 考虑 L 为单位圆周 $|t|=1$，而 $\alpha(t)=\bar{t}$.

7.2.2 保形粘合定理以及 SR 问题转化为 R 问题

带正位移的 SR 问题是通常 R 问题的推广. 又如上段所看到的，所得结果也完全与后者相似. 之所以会这样，是由于通过下面的保形粘合定理，可使 SR 问题转化为 R 问题.

定理 7.2.4（保形粘合定理） 设 $\alpha(t)$ 是 L 自身的正位移，则必存在 $D^{\pm}$ 内的解析函数 $\zeta=\omega^{\pm}(z)$，把区域 $\overline{D}^{\pm}$ 分别一一对应地保形映射到 ζ 平面上的区域 $\overline{\Delta}^{\pm}$，且 $\omega^{-}(\infty)=\infty$，这里 Δ^{+} 与 Δ^{-} 为无公共点的（开）区域，但有公共的边界封闭曲线 Γ $(\Delta^{+}+\Delta^{-}+\Gamma$ 为整个 ζ 平面)，使得

$$\omega^{+}(\alpha(t))=\omega^{-}(t),\quad t\in L. \tag{2.21}$$

证 注意到要求 $\omega^{-}(\infty)=\infty$，故 $\omega^{-}(z)$（如果存在）必以 ∞ 为极点，且又因一一对应的关系，它还必定是单极点. 又若存在符合要求的 $\omega^{\pm}(z)$，则 $a\omega^{\pm}(z)$（对任何 $a\neq 0$）以及 $\omega^{\pm}(z)+c_0$（c_0 为任何常数）也必符合要求. 因此，不妨设在 $z=\infty$ 的邻域内

$$\omega^{-}(z)=z+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots. \tag{2.22}$$

以下恒在(2.22)的条件下来证明定理.

我们先来求解问题(2.21). 这是一个指标 $\kappa=0$ 的齐次 SR 问题. 但由(2.22)，$\omega^{-}(z)$ 在 ∞ 处的主部为 z，故它的解存在唯一(由定理 7.2.1). [实际上易证 $\omega^{-}(t)$ 是方程

$$\omega^{-}(t)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L K(t,\tau)\omega^{-}(\tau)\mathrm{d}\tau=t$$

的唯一解.] 我们要证明，这样得到的 $\omega^{\pm}(z)$ 满足定理的各项要求.

我们首先证明，$\zeta=\omega^{+}(z)$ 与 $\zeta=\omega^{-}(z)$ 把区域 D^{+} 与 D^{-} 分别映成 ζ 平面中两区域 Δ^{+} 与 Δ^{-}，它们无公共点，但有公共的边界曲线 Γ，且 $\Delta^{+}+\Delta^{-}+\Gamma$ 为整个 ζ 平面. 既然 $\omega^{\pm}(z)$ 分别在 $D^{\pm}$ 内全纯，由内点变内点的原理，$\Delta^{\pm}$ 是区域无问题，设它们的边界分别为 $\Gamma^{\pm}$. 由于 $\alpha(L)=L$，故

$$\omega^{+}(\alpha(L))=\omega^{+}(L)=\Gamma^{+},\quad \omega^{-}(L)=\Gamma^{-},$$

因此由(2.21)，$\Gamma^+=\Gamma^-$，记为Γ. 且因D^+有界，故Δ^+也有界；又因$\omega^-(\infty)=\infty$，故Δ^-无界. 这两个区域又有公共的边界，故必$\Delta^++\Delta^-+\Gamma$为全平面，且Γ为一封闭的 Jordan 曲线.

其次我们要证明：映射$\zeta=\omega^\pm(t)$，$t\in L$都是一对一地把L映射到Γ上.

为此，我们先证明，$\omega^{\pm\prime}(t)\in H$于$L$上. 设想它们存在，则由(2.21)，应有

$$\alpha'(t)\omega^{+\prime}(\alpha(t))=\omega^{-\prime}(t),\quad t\in L;$$

又由(2.22)，$\omega^{-\prime}(\infty)=1$. 所以，我们来考虑求解齐次 SR 问题(记住$\alpha'(t)\neq 0$)

$$\gamma^+(\alpha(t))=\frac{1}{\alpha'(t)}\gamma^-(t),\quad t\in L,\ \gamma^-(\infty)=1,\tag{2.23}$$

证明其解唯一，再证明$\omega^{\pm\prime}(t)$存在且等于$\gamma^\pm(t)$. 我们来看问题(2.23)的指标κ. 令$\tau=\alpha(t)$，且t,τ的弧长参数分别为s,σ，则

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}=\alpha'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma},\tag{$*$}$$

因此，

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{1}{\alpha'(t)}\right]_L=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right]_L-\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}\right]_L+\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}\right]_L.$$

$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$为$t$处的正向切线向量，当$t$沿$L$正向环行一周时，此切线向量的倾角$\arg\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$的改变量为$2\pi$，故上式右边第一项等于1. 又因$\alpha(t)$为正位移，故$t$沿$L$正向环行一周时，$\tau$亦必如此，所以上式右边第二项等于$-1$. 而$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}$作为一连续函数且$\neq 0$(这可由($*$)式看出，注意$\left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}\right|=1$)，所以它永远不变号(实际上恒为正)，因此上式右边最后一项等于0. 于是得知$\kappa=0$. 再次由定理 7.2.1，(2.23) 确有唯一解$\gamma(z)$，且$\gamma^\pm(t)\in H$于L上.

现在要证明$\gamma^\pm(t)=\omega^{\pm\prime}(t)$. 令

$$\omega_0(z)=\begin{cases}\omega_0^+(z)=\displaystyle\int_{\alpha(t_0)}^z\gamma^+(z)\mathrm{d}z, & \text{当 } z\in\overline{D^+}\text{ 时;}\\ \omega_0^-(z)=\displaystyle\int_{t_0}^z\gamma^-(z)\mathrm{d}z, & \text{当 } z\in\overline{D^-}\text{ 时,}\end{cases}$$

其中$t_0\in L$为一固定点，则

$$\begin{aligned}\omega_0^+(\alpha(t))&=\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}\gamma^+(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^t\gamma^+(\alpha(t))\alpha'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^t\gamma^-(t)\mathrm{d}t=\omega_0^-(t),\end{aligned}\tag{2.24}$$

其中积分路径都可看做取在L上，且沿正向进行. 又因$\gamma^-(\infty)=1$，故在$z=\infty$附近有展式

$$\gamma^-(z)=1+\frac{d_1}{z}+\frac{d_2}{z^2}+\cdots.$$

但是

$$d_1=-\operatorname{res}\gamma^-(z)\Big|_{z=\infty}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\gamma^-(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\alpha'(t)\gamma^+(\alpha(t))\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\gamma^+(\tau)\mathrm{d}\tau=0.$$

由于$\omega_0^{-\prime}(z)=\gamma^-(z)$，故在$z=\infty$附近有展式

$$\omega_0^-(z)=z+d_0-\frac{d_2}{z}-\frac{d_3}{2z^2}-\cdots,$$

其中d_0为某常数. 考察函数

$$\omega_1(z)=\omega(z)-\omega_0(z). \tag{2.25}$$

由(2.21),(2.24)，$\omega_1^+(\alpha(t))=\omega_1^-(t)$，且比较(2.22),(2.25)知，$\omega_1^-(\infty)$有限. 由引理7.2.1，故$\omega_1(z)$为一常数. 因此$\omega'_1(z)\equiv 0$. 所以

$$\omega^{\pm\prime}(t)=\omega_0^{\pm\prime}(t)=\gamma^\pm(t).$$

于是我们证明了$\omega^{\pm\prime}(t)$确实存在，且$\in H$.

现在证明$\zeta=\omega^\pm(t)$把L一对一地映射到Γ上. 例如，对于$\omega^-(t)$来说，若有两不同点$t_1,t_2\in L$，使$\omega^-(t_1)=\omega^-(t_2)=\zeta_0\in\Gamma$. 令$\omega_2(z)=\omega(z)-\zeta_0$，则

$$\omega_2^+(\alpha(t))=\omega_2^-(t), \tag{2.26}$$

且$\omega_2^+(\alpha(t_1))=\omega_2^+(\alpha(t_2))=\omega_2^-(t_1)=\omega_2^-(t_2)=0$. 再令

$$\omega_3^+(z)=\frac{\omega_2^+(z)}{[z-\alpha(t_1)][z-\alpha(t_2)]},\quad z\in D^+;$$

$$\omega_3^-(z)=\frac{\omega_2^-(z)}{(z-t_1)(z-t_2)},\quad z\in D^-;$$

它们都在L上分别有边值$\omega_3^\pm(t)$，且

$$\omega_3^+(\alpha(t))=\frac{\omega_2^+(\alpha(t))}{[\alpha(t)-\alpha(t_1)][\alpha(t)-\alpha(t_2)]},$$

$$\omega_3^-(t)=\frac{\omega_2^-(t)}{(t-t_1)(t-t_2)}. \tag{2.27}$$

再由(2.26)，得

$$\omega_3^+(\alpha(t))=\frac{(t-t_1)(t-t_2)}{[\alpha(t)-\alpha(t_1)][\alpha(t)-\alpha(t_2)]}\omega_3^-(t). \tag{2.28}$$

这又是一个齐次 SR 问题①. 注意到当 t 自 t_1 沿 L 正向环行一周回到 t_1 时，$\arg(t-t_1)$ 的改变量为 π；这时 $\alpha(t)$ 也从 $\alpha(t_1)$ 沿 L 正向环行一周回到 $\alpha(t_1)$（注意 $\alpha(t)$ 为正位移），故又有

$$\left\{\arg[\alpha(t)-\alpha(t_1)]\right\}_L=\pi.$$

把 t_1 改为 t_2 时也有类似情况. 因此问题(2.28) 的指标 $\kappa=0$. 且因 $\alpha'(t)\in H$，(2.28) 中的整个系数也 $\in H$. 又因 $\omega_2^-(z)$ 和 $\omega^-(z)$ 一样，在 ∞ 处的阶数为 1，所以 $\omega_3^-(\infty)=0$. 故由定理7.2.2($\kappa=0$，$m=-1$)，$\omega_3^{\pm}(z)\equiv 0$. 从而 $\omega_2^{\pm}(z)\equiv 0$ 而 $\omega^{\pm}(z)\equiv\zeta_0$ 为一常数. 但 $\omega^-(z)$ 把 $z=\infty$ 映到 ∞，故这是不可能的. 这就证明了 $\zeta=\omega^-(t)$ 把 L 一对一地映成 Γ. 由于 $\tau=\alpha(t)$ 把 L 一对一地映成自身，且 $\omega^+(\alpha(t))=\omega^-(t)$，故 $\zeta=\omega^+(t)$ 也一对一地把 L 映成 Γ.

这样，我们已证明了 $\zeta=\omega^{\pm}(t)$ 把 L 一对一地且连续地映射到 Γ 上(同胚映射). 又因 $D^{\pm}$ 分别对应于 $\Delta^{\pm}$，故当 t 沿 L 正向环行一周时，$\zeta=\omega^{\pm}(t)$ 也必沿 Γ 正向环行一周.

最后证明映射 $\zeta=\omega^{\pm}(z)$ 都是单叶的，即分别把 $D^{\pm}$ 一对一地映成 $\Delta^{\pm}$. 任取 $\zeta_1\in\Delta^+$. 我们要证明：$\omega^+(z)-\zeta_1=0$ 在 D^+ 内的根的个数 $N=1$. 因 $\omega^+(z)-\zeta_1$ 在 D^+ 内全纯，故由辐角原理，

$$N=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\omega^{+\prime}(t)}{\omega^+(t)-\zeta_1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\{\log[\omega^+(t)-\zeta_1]\right\}_L$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\arg[\omega^+(t)-\zeta_1]\right\}_L=\frac{1}{2\pi}[\arg(\zeta-\zeta_1)]_\Gamma=1.$$

这就证明了 $\zeta=\omega^+(z)$ 的单叶性. 再任取 $\zeta_2\in\Delta^-$. 我们也要证明 $\omega^-(z)-\zeta_2=0$ 在 D^- 内的根的个数 $N'=1$. 因 $\omega^-(\infty)=\infty$，故在 z 平面中可作一充分大的圆周 L_R(取反时针向为正向)，使 L 位于它所围的圆域中，并使在 L_R 的外域中 $\omega^-(z)-\zeta_2=0$ 无根. 又设 L_R 经 $\omega^-(z)$ 映成曲线 Γ_R，它完全在 Δ^- 内，且 ζ_2 在 Γ_R 所围的内域中. 在 L 和 L_R 间所形成的域上用辐角原理，则有

$$N'=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{L_R}-\int_L\right)\frac{\omega^{-\prime}(t)}{\omega^-(t)-\zeta_2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\{\log[\omega^-(t)-\zeta_2]\right\}_{L_R}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\{\log[\omega^-(t)-\zeta_2]\right\}_L$$

---

① 不过现在，由(2.27)，$\omega_3^{\pm}(t)$ 分别在 $t=t_1$ 与 t_2 处，可能有不到一阶的奇异性，且 $\in H^*$. 但易于证明，在 $\omega_3^{\pm}(t)\in H^*$ 情况下的齐次 SR 问题(2.28)，以前的论证与结论完全成立，最后仍得 $\omega_3^{\pm}(t)\in H$. 因此可以在原来的提法下求解.

$$= \frac{1}{2\pi}\{\arg[\omega^-(t)-\zeta_2]\}_{L_R} - \frac{1}{2\pi}\{\arg[\omega^-(t)-\zeta_2]\}_L$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\arg(\zeta-\zeta_2)]_{\Gamma_R} - \frac{1}{2\pi}[\arg(\zeta-\zeta_2)]_{\Gamma}$$

$$= 1 - 0 = 1.$$

所以 $\zeta = \omega^-(z)$ 也是单叶的. □

既然 $\zeta = \omega^\pm(z)$ 分别保形映射 $D^\pm$ 于 $\Delta^\pm$，且 $D^\pm$ 的边界 L 是一条 Lyapunov 曲线(这是本节一开始就假定了的)，所以顺便看出，L 的像 Γ 也是 Lyapunov 曲线(由 2.6.1 段中提到过的 Kellog 定理).

前已提到，此定理的几何意义在于：可以把 SR 问题转化为通常的 R 问题. 我们现在来说明这一点.

设要求解问题(2.1). 由上述定理，可作出分区全纯函数$\omega^\pm(z)$适合定理的要求. 定义 $\zeta = \omega^\pm(z)$ 的反函数分别为 $z = \Omega^\pm(\zeta)$. 定义

$$\Psi(\zeta) = \begin{cases} \Phi^+(\Omega^+(\zeta)), & \text{当}\ \zeta \in \Delta^+\ \text{时}; \\ \Phi^-(\Omega^-(\zeta)), & \text{当}\ \zeta \in \Delta^-\ \text{时}. \end{cases} \tag{2.29}$$

故 $\Psi(\zeta)$ 是以 Γ 为跳跃曲线的分区全纯函数. 令

$$\tau = \omega^+(\alpha(t)) = \omega^-(t) \in \Gamma,$$

于是

$$\alpha(t) = \Omega^+(\tau), \quad t = \Omega^-(\tau).$$

在(2.29) 中令 ζ 分别从 Γ 的正、负侧趋于 Γ 上的 τ，则有

$$\Psi^+(\tau) = \Phi^+(\Omega^+(\tau)) = \Phi^+(\alpha(t)),$$

$$\Psi^-(\tau) = \Phi^-(\Omega^-(\tau)) = \Phi^-(t).$$

因此，问题(2.1) 就成为通常的 R 问题：

$$\Psi^+(\tau) = G(\Omega^-(\tau))\Psi^-(\tau) + g(\Omega^-(\tau)), \quad \tau \in \Gamma. \tag{2.30}$$

这样，一切有关通常 R 问题的结论就可直接推广到 SR 问题上来. 特别，引理 7.2.1 现在也得到了完全的证明(注意，这里要引用的粘合定理只涉及该引理前面已证的部分).

习　题

1. 试证：问题(2.1) 与问题(2.30) 的指标相等，且所求的解在 ∞ 处阶数的要求也不变.

2. 设 L 为单位圆周 $|t| = 1$，而

$$\alpha(t) = \frac{t-\beta}{\bar{\beta}t-1},$$

其中 β 为一常数，且 $|\beta| < 1$. 试求保形粘合定理中的$\omega^\pm(z)$.

答 $\omega^+(z)=\alpha^{-1}(z)$，$\omega^-(z)=z$.

7.2.3 其他带位移的边值问题

本段将讨论一些其他类型的带位移边值问题，但有时只指出求解的途径和结果，而不作详细的推导与讨论.

仍设L为一封闭的 Lyapunov 曲线，其内域为D^+，外域为D^-. 考虑下一带共轭的边值问题：求分区解析函数$\Phi(z)$使满足边值条件

$$\Phi^+(\alpha_-(t))=G(t)\overline{\Phi^-(t)}+g(t),\quad t\in L,\tag{2.31}$$

其中$G(t),g(t)\in H$，已给于L上，$G(t)\neq 0$，$\tau=\alpha_-(t)$是一反位移，它把L拓扑地变成自身，但方向相反，且仍设$\alpha'_-(t)\neq 0$，$\in H$.

首先注意，用保形变换立即可以把问题(2.31)中的L改为单位圆周. 事实上，设$z=\omega^\pm(\zeta)$分别把单位圆周Γ：$|\tau|=1$的内域$|\zeta|<1$与外域$|\zeta|>1$保形映射成D^+与D^-，且不妨设$\omega^-(\infty)=\infty$. 令

$$\Psi^+(\zeta)=\Phi^+(\omega^+(\zeta)),\quad |\zeta|<1;$$
$$\Psi^-(\zeta)=\Phi^-(\omega^-(\zeta)),\quad |\zeta|>1.$$

记$t=\omega^-(\tau)$ ($|\tau|=1$)，故

$$\Psi^-(\tau)=\Phi^-(\omega^-(\tau))=\Phi^-(t).$$

另一方面，

$$\Phi^+(\alpha_-(t))=\Phi^+(\alpha_-\omega^-(\tau))=\Psi^+((\omega^+)^{-1}\alpha_-\omega^-(\tau)).$$

因此，问题(2.31)就化为

$$\Psi^+(\beta_-(\tau))=G(\omega^-(\tau))\overline{\Psi^-(\tau)}+g(\omega^-(\tau)),\quad \tau\in\Gamma,\tag{2.31$'$}$$

其中$\beta_-(\tau)=(\omega^+)^{-1}\alpha_-\omega^-(\tau)$，显然它也是$\Gamma$上的反位移，且易见$\beta'_-(\tau)\neq 0$，$\in H$. 又因$G(\omega^-(\tau)),g(\omega^-(\tau))$在$\Gamma$上也满足相应的条件，故(2.31)$'$已是$\Gamma$上的同类型问题.

所以，不失一般性，不妨认为(2.31)中的L就是单位圆周$|t|=1$. 求解时，我们可将未知函数$\Phi^\pm(z)$作如下改造：

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1^+(z)&=\overline{\Phi^-\left(\frac{1}{\bar z}\right)},\quad 当|z|<1;\\ \Phi_1^-(z)&=\overline{\Phi^+\left(\frac{1}{\bar z}\right)},\quad 当|z|>1.\end{aligned}\right\}\tag{2.32}$$

于是，

$$\Phi_1^+(t)=\overline{\Phi^-(t)},\ \Phi_1^-(t)=\Phi^+(\bar t),\quad |t|=1,$$

因此(2.31)成为

$$\Phi_1^-\overline{(\alpha_-(t))}=G(t)\Phi_1^+(t)+g(t),\quad t\in L,$$

这里$\overline{\alpha_-(t)}$已是L上的正位移. 记其逆变换为$\beta(t)$(仍为正位移), 则上式可写成

$$\Phi_1^+(\beta(t))=\frac{1}{G(\beta(t))}\Phi_1^-(t)+\frac{g(\beta(t))}{G(\beta(t))}, \quad t\in L. \tag{2.33}$$

这样, 问题(2.31)就化为前面讨论过的SR问题; 不过要小心, 因(2.32)的关系, $\Phi^-(z)$在$z=\infty$处的性态变成了$\Phi_1(z)$在$z=0$处的性态, 而$\Phi^+(z)$在$z=0$处的性态却变成了$\Phi_1^-(z)$在$z=\infty$处的性态. 注意到了这些, 根据(2.31)在$z=0$与$z=\infty$处的要求, 分别变换成(2.33)在$z=\infty$与$z=0$处的要求, 然后求解就可如前进行, 不再有任何困难了.

对于单边的带位移边值问题

$$\Phi^+(\alpha_-(t))=G(t)\Psi^+(t)+g(t), \quad t\in L, \tag{2.34}$$

其中$\alpha_-(t)$为反位移, 以及另一问题

$$\Phi^+(\alpha(t))=G(t)\overline{\Psi^+(t)}+g(t), \quad t\in L, \tag{2.35}$$

其中$\alpha(t)$为正位移(不失一般性, 仍设L为单位圆周), $G(t),g(t)$条件如前, 而$\Phi^+(t),\Psi^+(t)$是D^+内未知全纯函数的边值, 只要令

$$\Phi^-(z)=\overline{\Psi^+\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},$$

便可化为已讨论过的问题去求解, 这里不再论述.

如果在(2.34)或(2.35)中, 要求$\Phi^+(t)=\Psi^+(t)$是D^+内同一全纯函数$\Phi^+(z)$的边值, 则若对于$\alpha_-(t)$或$\alpha(t)$不另加条件限制, 一般说来问题就不会有解. 因为, 在求得(2.34)或(2.35)的解$\Phi^+(z)$或$\Psi^+(z)$(解中只含有限个常数)后, 要想$\Phi^+(z)=\Psi^+(z)$一般是做不到的.

现在我们来考虑边值问题

$$\Phi^+(\alpha(t))=G(t)\Phi^+(t)+g(t), \quad t\in L, \tag{2.36}$$

其中$\alpha(t)$为反位移(已将$\alpha_-(t)$改写为$\alpha(t)$), 它满足 **Carleman 条件**:

$$\alpha(\alpha(t))=t, \tag{2.37}$$

其他条件同前. 这类边值问题也称为 **Carleman 边值问题**.

(2.36)可用下列方法求解. 在其中将t换为$\alpha(t)$, 注意到条件(2.37), 则有

$$\Phi^+(t)=G(\alpha(t))\Phi^+(\alpha(t))+g(\alpha(t)). \tag{2.38}$$

在(2.36),(2.38)中消去$\Phi^+(\alpha(t))$, 得

$$[1-G(\alpha(t))G(t)]\Phi^+(t)=G(\alpha(t))g(t)+g(\alpha(t)). \tag{2.39}$$

如果$G(\alpha(t))G(t)\neq 1$, 则(2.39)可写成

$$\Phi^+(t)=\frac{G(\alpha(t))g(t)+g(\alpha(t))}{1-G(\alpha(t))G(t)}. \tag{2.40}$$

所以，如果上式右边的确是 D^+ 内某全纯函数$\Phi^+(z)$ 的边值，则已求得问题(2.38) 的解①. 事实上，果若如此，在(2.40) 中把 t 换为 $\alpha(t)$，将所得 $\Phi^+(\alpha(t))$ 以及(2.40) 中的$\Phi^+(t)$ 代入(2.38)，可见其的确满足.

如果

$$G(\alpha(t))G(t) = 1, \tag{2.41}$$

则由(2.39) 很明显，(2.36) 可解的必要条件为

$$G(\alpha(t))g(t) + g(\alpha(t)) = 0. \tag{2.42}$$

这时虽然任何在 D^+ 内全纯的函数$\Phi^+(z)$ 均满足(2.39)，但一般说来并不满足(2.36)，因此还要进一步讨论其求解问题. 我们将看到，这时问题(2.36) 可化为开口弧段上的 R 问题.

首先证明，齐次边值问题

$$\Phi^+(\alpha(t)) = \pm\Phi^+(t), \quad t \in L \tag{2.43}$$

只有常数解(且右边取负号时，常数为0). 其证明方法与引理7.2.1 的证法类似.

然后求解边值问题

$$\omega^+(\alpha(t)) - \omega^+(t) = 0, \quad t \in L, \tag{2.44}$$

其中$\omega^+(z)$ 在 D^+ 内解析，但在某点 $z = z_0$ 处有单极点，且其留数为 1，即

$$\omega^+(z) = \frac{1}{z - z_0} + \Psi^+(z), \tag{2.45}$$

其中 $\Psi(z)$ 已在 D^+ 内全纯. 将(2.45) 代入(2.44)，故问题(2.44) 就化为跳跃问题

$$\Psi^+(\alpha(t)) - \Psi^+(t) = \frac{1}{t - z_0} - \frac{1}{\alpha(t) - z_0}, \quad t \in L. \tag{2.46}$$

求解(2.46) 时，引进新的未知函数 $\psi(t)$，使

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad z \in D^+, \tag{2.47}$$

且要求 $\psi(t)$ 满足条件

$$\psi(t) + \psi(\alpha(t)) = 0 \tag{2.48}$$

[我们马上就要看到，这是可能的]. 利用 Plemelj 公式以及这一条件，可得 $\psi(t)$ 应满足的积分方程

$$\psi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L K(t,\tau)\psi(\tau)d\tau = \frac{1}{\alpha(t) - z_0} - \frac{1}{t - z_0}, \quad t \in L, \tag{2.49}$$

---

① 如果 $1 - G(\alpha(t))G(t)$ 在 L 上有一些零点，而(2.40) 右边分子中也有类似零点，且消去后，如若(2.40) 仍为 D^+ 内全纯函数的边值，则结果相同.

其中$K(t,\tau)$由(2.5)给出. 我们已证过，这是一个(弱) Fredholm方程，对任意右端可解，且解唯一. 易证此解的确满足(2.48). 由此，从(2.47)就得出$\Psi^+(z)$，再由(2.45)便得(2.44)的解$\omega^+(z)$.

由于$\alpha(t)$是反位移，显然L上有两个不动点a,b. 我们把L分成两个开口弧段，依正向分别为$L_1=\widehat{ab}$，$L_2=\widehat{ba}$. 函数$w=\omega^+(z)$把D^+映射到w平面上，使

$$\omega^+(a)=\alpha,\quad \omega^+(b)=\beta,$$

且L_1经$\omega^+(z)$映成w平面上一光滑弧段$\Gamma=\widehat{\alpha\beta}$. 又因$\omega^+(\alpha(t))=\omega^+(t)$，故$L_2$也映成$\Gamma$. 且当$t$从$a$点出发沿$L$正向环行一周时，其像$\tau=\omega^+(t)$先从$\alpha$点沿$\Gamma$正侧至$\beta$，再从$\beta$沿$\Gamma$负侧回到$\alpha$. 记$\omega^+(z)$的反函数为$z(w)$，且分别记其在$\Gamma^\pm$上的边值为$z^\pm(\tau)$. 引进$\Phi_1(w)=\Phi^+(z(w))$. 当$t\in L_1$时，记$t=z^+(\tau)$或即$\tau=\omega^+(t)=\omega^+(\alpha(t))$，故$\alpha(t)=z^-(\tau)$. 同样，当$t\in L_2$时，记$\alpha(t)=z^+(\tau)$或即$\tau=\omega^+(\alpha(t))=\omega^+(t)$，故$t=z^+(\tau)$. 这样，当$t\in L_1$时，(2.36)成为

$$\Phi^+(z^-(\tau))=G(z^+(\tau))\Phi^+(z^+(\tau))+g(z^+(\tau)),\quad \tau\in\Gamma;\tag{2.50}$$

当$t\in L_2$时，则有

$$\Phi^+(z^+(\tau))=G(z^-(\tau))\Phi^+(z^-(\tau))+g(z^-(\tau)),\quad \tau\in\Gamma.\tag{2.51}$$

引进新的未知函数

$$\Phi_1(w)=\Phi^+(z(w)),\tag{2.52}$$

它在w平面中解析，以Γ为跳跃曲线，且$\Phi_1(\infty)$有限. 于是(2.50)成为

$$\Phi_1^-(\tau)=G(z^+(\tau))\Phi_1^+(\tau)+g(z^+(\tau)),\quad \tau\in\Gamma,\tag{2.53}$$

而(2.51)成为

$$\Phi_1^+(\tau)=G(z^-(\tau))\Phi_1^-(\tau)+g(z^-(\tau)),\quad \tau\in\Gamma.\tag{2.54}$$

但由条件(2.41),(2.42)可知，(2.53)与(2.54)实际上是同一边值条件. 这样，整个问题就化为开口弧段Γ上的R问题(2.54)，且要求$\Phi_1(\infty)$有限，$\Phi_1(\alpha),\Phi_1(\beta)$也要有界. 问题提法完全确定，求解方法在第四章中已讲过，此处不再重复论述.

现在讨论边值问题

$$\Phi^+(\alpha(t))=G(t)\,\overline{\Phi^+(t)}+g(t),\quad t\in L,\tag{2.55}$$

其中$\alpha(t)$为正位移，且满足Carleman条件(2.37). 这显然是H问题的推广. 以下恒设$\alpha(t)\neq t$.

在(2.55)中把t换为$\alpha(t)$，利用条件(2.37)，与(2.55)一起消去$\Phi^+(\alpha(t))$，得

$$[1-G(t)\overline{G(\alpha(t))}]\overline{\Phi^+(t)}=\overline{G(\alpha(t))}g(t)+\overline{g(\alpha(t))}.\tag{2.56}$$

如果$\overline{G(t)}G(\alpha(t))\neq 1$，则有

$$\Phi^+(t)=\frac{G(\alpha(t))\overline{g(t)}+g(\alpha(t))}{1-\overline{G(t)}G(\alpha(t))}.\tag{2.57}$$

只要上式右边是 D^+ 内全纯函数的边值，就可证明此函数就是所求解；否则，(2.55) 当然就无解.

如果

$$\overline{G(t)}G(\alpha(t))=1,\tag{2.58}$$

则问题(2.55) 可解的必要条件为

$$G(\alpha(t))\overline{g(t)}+g(\alpha(t))=0.\tag{2.59}$$

今设条件(2.58),(2.59) 均已满足，进一步讨论问题(2.55) 的求解.

与前类似，先证边值问题

$$\Phi^+(\alpha(t))=\pm\overline{\Phi^+(t)},\quad t\in L\tag{2.60}$$

只有常数解，且右边取正号时为实常数，右边取负号时为纯虚数. 这只要用对称延拓的方法将它化为(2.2) 求解便知.

其次，考虑简单的跳跃问题

$$\Phi^+(\alpha(t))-\overline{\Phi^+(t)}=g(t),\quad t\in L,\tag{2.61}$$

这时 $G(t)=1$，条件(2.58) 当然满足，(2.59) 则成为

$$\overline{g(t)}+g(\alpha(t))=0.\tag{2.62}$$

然后证明当(2.62) 满足时，问题(2.61) 确实可解. 方法是，引进新的未知函数 $\varphi(t)$，使

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\alpha(\tau))}{\tau-z}d\tau,\quad z\in D^+,\tag{2.63}$$

且要求

$$\varphi(\alpha(t))+\overline{\varphi(t)}=0.\tag{2.64}$$

用 Plemelj 公式，把(2.63) 代入(2.61)，注意(2.62) 与(2.64)，可得积分方程

$$M\varphi\equiv\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(\tau)\left[\frac{\alpha'(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}-\frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\right]=g(t),$$

它又可改写为

$$M\varphi\equiv\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L M(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=g(t),\quad t\in L,\tag{2.65}$$

其中

$$M(t,\tau)=\left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}-\frac{1}{\tau-t}\right]+\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{1}{\bar{\tau}-\bar{t}}\frac{d\bar{\tau}}{d\tau}\right].$$

注意到 $\bar{\tau}=\dfrac{1}{\tau}$，$\bar{t}=\dfrac{1}{t}$，$\mathrm{d}\bar{\tau}=-\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}$，则可知

$$M(t,\tau)=\frac{1}{\tau}-K(t,\tau).$$

因此(2.65) 也是(弱) Fredholm 方程. 然后再如前，证明 $M\varphi=0$ 只有零解，从而(2.65) 对任何 $g(t)\in H$ 有唯一解；且易证所得解的确满足(2.64). 由此得出的(2.63) 为(2.61) 的一个特解. 再由(2.60) 的解法知，(2.61) 的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\alpha(\tau))}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+a_0,\tag{2.66}$$

其中 $\varphi(t)$ 为(2.65) 的解，a_0 为一任意实常数.

再进一步讨论跳跃问题(2.61)，但允许 $\Phi(z)$ 在 $z=0$ 处有 m 阶极点. 这时可设

$$\Phi(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_{2k-1}+\mathrm{i}a_{2k}}{z^k}+\Psi(z),\tag{2.67}$$

其中 $\Psi(z)$ 已在 D^+ 内全纯(a_{2k-1},a_{2k} 均为实常数). 以此代入(2.61)，便得

$$\Psi^+(\alpha(t))-\overline{\Psi^+(t)}=g(t)+\sum_{k=1}^{2m}a_kh_k(t),\tag{2.68}$$

其中

$$h_{2k-1}(t)=t^k-\frac{1}{\alpha^k(t)},\quad h_{2k}(t)=-\mathrm{i}t^k-\frac{\mathrm{i}}{\alpha^k(t)}.$$

求出 $M\varphi=h_k$ 的解 $\varphi_k(t)$，代入(2.63) 得出 $\Phi_k(z)$，连同(2.66)，则可得所求解为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\alpha(\tau))}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+\sum_{k=0}^{2m}a_k\Phi_k(z),\tag{2.69}$$

这里已令 $\Phi_0(z)=1$，而 a_k 为一些实常数.

现在来考察齐次边值问题

$$\Phi^+(\alpha(t))=G(t)\overline{\Phi^+(t)},\quad t\in L.\tag{2.70}$$

这时条件(2.59) 消失，只剩下(2.58).

如果

$$\kappa=\mathrm{Ind}_L\,G(t)=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L$$

为 0，则只要在(2.70) 中两边取对数后就可求解.

现设 $\kappa\neq0$. 我们先证明 κ 必为一偶数. 事实上，任意取定 $t\in L_1$，设 $\alpha(t_1)=t_2$. 于是由(2.37)，$\alpha(t_2)=t_1$. 设自 t_1 沿 L 正向至 t_2 的弧段为 L_1，

t_2 至 t_1 的弧段为 L_2，则当 t 沿 L_1 正向走遍一次时，$\alpha(t)$ 就沿 L_2 正向走遍一次. 由(2.58)，

$$\arg G(\alpha(t)) - \arg G(t) = 2m\pi, \qquad (*)$$

这里 m 是一整数. 而由连续性知，不论 $t \in L$ 取何值，(*) 式中的 m 是同一整数. 因此

$$\begin{aligned}[\arg G(t)]_{L_1} &= \arg G(t_2) - \arg G(t_1) \\ &= \arg G(\alpha(t_1)) - \arg G(t_1) = 2m\pi.\end{aligned}$$

再由(*) 式便可知

$$[\arg G(t)]_{L_2} = [\arg G(\alpha(t))]_{L_1} = [\arg G(t)]_{L_1}.$$

因此

$$\begin{aligned}[\arg G(t)]_L &= [\arg G(t)]_{L_1} + [\arg G(t)]_{L_2} \\ &= 2[\arg G(t)]_{L_1} = 4m\pi,\end{aligned}$$

亦即

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L = 2m.$$

现在来求解(2.70). 记

$$G(t) = t^m \alpha^m(t) G_0(t),$$

则易见 $\mathrm{Ind}_L G_0(t) = 0$. 故当(2.70) 中的 $G(t)$ 改为 $G_0(t)$ 时可求得解 $X_0(z)$. 再令 $X(z) = z^m X_0(z)$ 时，它就适合(2.70). 于是(2.70) 可改写为

$$\frac{\Phi^+(\alpha(t))}{X^+(\alpha(t))} = \overline{\left(\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}\right)}.$$

因此，如果 $\kappa = 2m \geqslant 0$，则因 $\Phi(z)/X(z)$ 在 $z = 0$ 处有 m 阶极点，故由(2.69)(注意这时 $g(t) = 0$ 所以 $\varphi(t) = 0$) 得(2.70) 的一般解为

$$\Phi(z) = X(z) \sum_{k=0}^{2m} a_k \Phi_k(z); \qquad (2.71)$$

如果 $\kappa = 2m < 0$，显然它只有零解.

最后，一般问题(2.55) 现可写成下一跳跃问题：

$$\frac{\Phi^+(\alpha(t))}{X^+(\alpha(t))} - \overline{\left(\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}\right)} = \frac{g(t)}{X^+(\alpha(t))}.$$

易证，当 $\kappa = 2m \geqslant 0$ 时，它有一般解

$$\Phi(z) = X(z)\left[\Psi(z) + \sum_{k=0}^{2m} a_k \Phi_k(z)\right], \qquad (2.72)$$

其中

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(\alpha(\tau))}{\tau - z} d\tau, \quad M\psi = \frac{g(t)}{X^+(\alpha(t))}, \qquad (2.73)$$

而 a_k 为任意常数；当 $\kappa=2m<0$ 时，则当且仅当满足可解条件

$$\int_L \psi(\alpha(\tau))\tau^{-k}\mathrm{d}\tau=0,\quad k=2,3,\cdots,-\kappa \tag{2.74}$$

时问题有解

$$\Phi(z)=X(z)[\Psi(z)+C_0], \tag{2.75}$$

其中

$$C_0=-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \psi(\alpha(\tau))\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}. \tag{2.76}$$

习　题

1. 求解问题(2.43) 与(2.60)，并验证所得结论.
2. 写出求解齐次问题(2.70) 的所有 $X_0(z)$ 的明显表达式.
3. 详细验证求解问题(2.55) 时所得的结论.

7.2.4　带位移的奇异积分方程

本段略述一种带位移的奇异积分方程，它可化为奇异积分方程组求解.

设要求解方程

$$\begin{aligned}N\varphi\equiv\ & a(t)\varphi(t)+b(t)\varphi(\alpha(t))+\frac{c(t)}{\pi \mathrm{i}}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\\&+\frac{d(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\alpha(t)}\mathrm{d}\tau+\int_L N(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\\=\ &g(t),\quad t\in L,\end{aligned} \tag{2.77}$$

其中 L 仍为一封闭的 Lyapunov 曲线，$a,b,c,d,N\in H$，而 $\alpha(t)$ 为 L 自身的正位移或反位移，且满足 Carleman 条件(2.37). 当 $\alpha(t)$ 为正位移时，并设 $\alpha(t)\not\equiv t$. 仍设 $\alpha'(t)\in H$，$\neq 0$.

在(2.77) 中把 t 换为 $\alpha(t)$，则用条件(2.37)，得

$$\begin{aligned}&a(\alpha(t))\varphi(\alpha(t))+b(\alpha(t))\varphi(t)\\&\quad+\frac{c(\alpha(t))}{\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\alpha(t)}\mathrm{d}\tau+\frac{d(\alpha(t))}{\pi \mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\\&\quad+\int_L N(\alpha(t),\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=g(\alpha(t)).\end{aligned} \tag{2.78}$$

如果记 $\varphi(t)=\rho_1(t)$，$\varphi(\alpha(t))=\rho_2(t)$，则显然

$$\rho_1(\alpha(t))=\rho_2(t). \tag{2.79}$$

这样，(2.77)，(2.78) 可分别写成

$$a(t)\rho_1(t)+b(t)\rho_2(t)+\frac{c(t)}{\pi i}\int_L\frac{\rho_1(\tau)}{\tau-t}d\tau$$
$$+\frac{\lambda d(t)}{\pi i}\int\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\rho_2(\tau)d\tau$$
$$+\int_L N(t,\tau)\rho_1(\tau)d\tau=g(t),$$

$$b(\alpha(t))\rho_1(t)+a(\alpha(t))\rho_2(t)+\frac{d(\alpha(t))}{\pi i}\int\frac{\rho_1(\tau)}{\tau-t}d\tau$$
$$+\frac{\lambda c(\alpha(t))}{\pi i}\int_L\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\rho_2(\tau)d\tau$$
$$+\int_L N(\alpha(t),\tau)\rho_2(\tau)d\tau=g(\alpha(t)),$$

其中$\lambda=+1$或-1视$\alpha(t)$为正位移或反位移而定. 上面二方程是向量$\rho(t)=(\rho_1(t),\rho_2(t))'$的一个奇异积分方程(组):

$$A(t)\rho(t)+\frac{B(t)}{\pi i}\int_L\frac{\rho(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L k(t,\tau)\rho(\tau)d\tau=G(t),\quad t\in L,\tag{2.80}$$

其中

$$A(t)=\begin{pmatrix}a(t) & b(t)\\ b(\alpha(t)) & a(\alpha(t))\end{pmatrix},$$

$$B(t)=\begin{pmatrix}c(t) & \lambda d(t)\\ d(\alpha(t)) & \lambda c(\alpha(t))\end{pmatrix},$$

$$k(t,\tau)=\begin{pmatrix}N(t,\tau) & -\lambda d(t)K(t,\tau)\\ N(\alpha(t),\tau) & -\lambda c(\alpha(t))K(t,\tau)\end{pmatrix},$$

$$G(t)=\begin{pmatrix}g(t)\\ g(\alpha(t))\end{pmatrix},$$

这里$K(t,\tau)$仍由(2.5)给出.

这样，方程(2.77)就化为方程(组)(2.80). 求出(2.80)的解$\rho(t)=(\rho_1(t),\rho_2(t))'$后，还要补充满足条件(2.79)，则$\rho_1(t)=\varphi(t)$就是(2.77)的解. 因此，方程(2.77)的求解问题可完全化为上一章讨论过的奇异积分方程(组)的求解问题.

Carleman 条件(2.37)可作如下推广：记

$$\alpha^0(t)=t,\ \alpha^1(t)=\alpha(t),\ \cdots,\ \alpha^k(t)=\alpha(\alpha^{k-1}(t)),\ \cdots,$$

如果存在一正整数n ($\geqslant 2$)，使

$$\alpha^n(t)\equiv t\tag{2.81}$$

(且n为满足此条件的最小正整数)，则称此条件为**广义 Carleman 条件**. 当(2.81)满足时，用与上面类似的方法，方程(2.77)的求解问题可化为n维向

量的奇异积分方程的求解问题.

关于这些方面的详细研究，可参看[41]，这里不再作进一步介绍.

如果(2.77) 中的系数、核以及位移具有某种解析特性，则也可讨论其直接解法，得出显式结果，可参看[2].

注 以上所考虑的带位移奇异积分方程，其位移都发生在积分曲线 L 本身上面. 当然也可考虑位移到 L 外面的情况. 我们曾对一种如下的特殊带平移的奇异积分方程进行研究：

$$a\varphi(x)+\frac{b}{\pi\mathrm{i}}\int_X\frac{\varphi(t)}{t-x}\mathrm{d}t+\frac{c}{\pi\mathrm{i}}\int_X\frac{\varphi(t)}{t-\alpha(x)}\mathrm{d}t=g(x),\quad x\in X, \tag{2.82}$$

其中 $X=(-\infty,+\infty)$ 为实轴，a,b,c 为常数，$\alpha(x)=x+\alpha+\mathrm{i}\beta\ (\beta\neq 0)$ 为一复平移($\beta>0$ 时称为上平移，$\beta<0$ 时称为下平移)，已知函数 $g(x)$ 和未知函数 $\varphi(x)$ 均 $\in \hat{H}$. 我们甚至还讨论(2.82) 中可含多个上、下平移的情况，还含有共轭函数 $\overline{\varphi(x)}$ 的情况，乃至方程组的情况. 请参看[71] ~ [75].

此外，[76] 中还对某种带变换的边值问题和奇异积分方程进行了讨论.

7.3 卷积型线性方程组

7.3.1 Laurent 变换

无论在理论上或实用上，常会遇到无穷多个未知数的线性代数方程组的求解问题. 本节将讨论其中某些特殊类型的即所谓卷积型方程组的解法. 在一定条件下，它们可化为 R 问题. 在讨论之前，先要引进一种特殊的变换，即 Laurent 变换.

设有一双向无穷数列构成的无穷维向量

$$a=\{a_n\}=\{\cdots,a_{-2},a_{-1},a_0,a_1,a_2,\cdots\}. \tag{3.1}$$

作形式级数

$$A(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kt^k,\quad |t|=1, \tag{3.2}$$

称之为 a 的 **Laurent 变换**，记为 $\boldsymbol{L}a=A$；其逆变换记为

$$\boldsymbol{L}^{-1}A=a.$$

我们设(3.2) 在 $|t|=1$ 上绝对收敛，即设 $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|$ 收敛，并设 $A(t)\in H$. 这时也称 $a\in h$. 以后恒设考虑的向量 $\in h$.

在(3.1)中令 $t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta},\tag{3.3}$$

因此(3.3)右边实际上是 $A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 的 Fourier 展式，而 a_k 是它的 Fourier 系数：

$$a_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|t|=1}\frac{A(t)}{t^{k+1}}\mathrm{d}t,$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots.\tag{3.4}$$

现在记

$$\left.\begin{aligned}A^+(z)&=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k,\quad |z|\leqslant 1;\\ A^-(z)&=-\sum_{k=-1}^{-\infty}a_kz^k,\quad |z|\geqslant 1.\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

它们分别在 $|z|<1$ 与 $|z|>1$ 中全纯，$A^-(\infty)=0$，且在 $|t|=1$ 上分别有边值 $A^+(t),A^-(t)\in H$，又

$$A(t)=A^+(t)-A^-(t),\quad |t|=1.\tag{3.6}$$

如果我们记

$$a_k^+=\begin{cases}a_k, & 当\ k\geqslant 0;\\ 0, & 当\ k<0,\end{cases}\qquad a_k^-=\begin{cases}0, & 当\ k\geqslant 0;\\ -a_k, & 当\ k<0,\end{cases}$$

并记 $a^+=\{a_k^+\}$，$a^-=\{a_k^-\}$，则 $a=a^+-a^-$，且

$$La^+=A^+(t),\quad La^-=A^-(t).$$

我们还引进卷积的概念.

定义 7.3.1 设 $a=\{a_k\}$，$b=\{b_k\}$，记

$$c_n=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_{n-k}b_k,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\tag{3.7}$$

则称 $c=\{c_k\}$ 为 a 与 b 的**卷积**，记为 $c=a*b$（当然要设(3.7)右边的级数收敛）.

我们将证明：

引理 7.3.1 如果 $a,b\in h$，则 $c=a*b\in h$，且

$$C(t)=A(t)B(t),$$

其中 A,B,C 分别为 a,b,c 的 Laurent 变换.

证 因 $a,b\in h$，故 $A(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kt^k$，$B(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_kt^k$ 在 $|t|=1$ 上绝

对收敛，所以

$$A(t)B(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k}b_k t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^n = C(t).$$

且因 $A(t), B(t) \in H$，故 $C(t) \in H$. 易见，$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k$ 也绝对收敛，故 $c \in h$.

□

此外，还易看出

$$a * b = b * a.$$

7.3.2 (A) 型方程组

设要求解下列无穷个元的线性代数方程组：

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n-k} z_k + \sum_{k=-1}^{-\infty} b_{n-k} z_k = c_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{3.8}$$

其中 $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}$ 均 $\in h$. 未知向量 $\{z_k\}$ 也要求 $\in h$. 我们称(3.8) 为**(A) 型方程组**，它可化为 R 问题求解.

引进向量 $z^+ = \{z_k^+\}$，$z^- = \{z_k^-\}$ 如前，则(3.8) 可改写为

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} z_k^+ - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{n-k} z_k^- = c_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{3.9}$$

在(3.9) 两边取 Laurent 变换，并引用引理 7.3.1，则得

$$A(t)Z^+(t) - B(t)Z^-(t) = C(t), \quad |t| = 1, \tag{3.10}$$

其中 $A(t), B(t), C(t)$ 分别为 $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}$ 的 Laurent 变换，它们都 $\in H$，而

$$Z^+(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} z_k t^k, \quad Z^-(t) = -\sum_{k=-1}^{-\infty} z_k t^k$$

分别为 $|z| < 1$ 与 $|z| > 1$ 中全纯函数的边值，且 $Z^-(\infty) = 0$.

我们只考虑正则型情况，即设 $A(t) \neq 0$，$B(t) \neq 0$，则(3.10) 可写成

$$Z^+(t) = \frac{B(t)}{A(t)} Z^-(t) + \frac{C(t)}{A(t)}, \quad |t| = 1, \tag{3.11}$$

这便是 R 问题，且应在 R_{-1} 中求解. 一旦求出(3.11) 的解，则由

$$Z(t) = Z^+(t) - Z^-(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k t^k,$$

便得 $\{z_k\} = \boldsymbol{L}^{-1} Z$ 就是所求解. 由(3.4)，还可写成

$$z_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{Z^+(t) - Z^-(t)}{t^{k+1}} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{3.12}$$

这便是方程组(3.8)的解[①]. 且可看出，方程组(3.8)解的自由度(由解中任意常数的个数与可解条件的个数确定)与 R_{-1} 问题(3.11)的相同.

7.3.3 (B)型方程组

现在来求解另一类型无穷个元的线性代数方程组

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} z_k = c_n, \quad \text{当 } n \geqslant 0; \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{n-k} z_k = c_n, \quad \text{当 } n < 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

其中 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{c_k\}$, $\{z_k\}$ 条件均同前. 我们称(3.13)为**(B)型方程组**. 它也可化为 R 问题求解.

(3.13)中第一式本是指 $n \geqslant 0$ 而言，但当 $n<0$ 时其左边仍有意义，因此可将它改写为

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} z_k = c_n + \varphi_n^-, \tag{3.14}$$

这里 φ_n^- 为未知常数(当 $n \geqslant 0$ 时为零). 同样，可把(3.13)的第二式改写为

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{n-k} z_k = c_n + \varphi_n^+, \tag{3.15}$$

其中 φ_n^+ 当 $n<0$ 时为零. 把(3.14),(3.15)进行 Laurent 变换，得

$$\left.\begin{aligned} A(t)Z(t) = C(t) + \Phi^-(t), \\ B(t)Z(t) = C(t) + \Phi^+(t), \end{aligned}\right\} \quad |t| = 1, \tag{3.16}$$

其中 $\Phi^\pm(t)$ 分别为 $|z|<1$ 与 $|z|>1$ 中全纯函数 $\Phi^\pm(z)$ 的边值，且 $\Phi^-(\infty) = 0$.

我们也只考虑正则型情况，即设 $A(t) \neq 0$, $B(t) \neq 0$. 在(3.16)两式中消去 $Z(t)$，例如由第一式可得

$$Z(t) = \frac{C(t) + \Phi^-(t)}{A(t)}, \tag{3.17}$$

把它代入后一式，便得 R 问题

$$\Phi^+(t) = \frac{B(t)}{A(t)}\Phi^-(t) + \frac{B(t)-A(t)}{A(t)}C(t), \quad |t| = 1, \tag{3.18}$$

---

① 为了要 $\{z_k\} \in h$，还应验证 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|$ 收敛. 但若不作此要求，可直接验证(3.9)是否成立.

且应要求$\Phi^{-}(\infty)=0$. 这样，(B) 型方程组(3.13) 就化为 R_{-1} 问题(3.18).

一旦求得(3.18) 在 R_{-1} 中的解，代入(3.17) 便得 $Z(t)$，于是$\{z_k\}=\boldsymbol{L}^{-1}Z$，亦即

$$z_k=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|t|=1}\frac{Z(t)}{t^{k+1}}\mathrm{d}t,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{3.19}$$

便是方程组(3.13) 的解. 且其自由度也与(3.18) 在 R_{-1} 中解的自由度相同.

本节所讨论的方程组(A) 与(B) 实际上都是所谓卷积型积分方程的离散情况. 卷积型积分方程也与 R 问题有密切联系，详情可参看专著[37]. 本节内容也是采自该书(略有修改).

习　题

试讨论(A) 型方程组和(B) 型方程组与其相应的 R_{-1} 问题之间的等价性.

7.4 Cauchy 主值积分的近似计算

7.4.1 奇点分离法

在实际应用解析函数边值问题或奇异积分方程的结果时，常常不可避免地要考虑 Cauchy 主值积分的近似计算. 在[40] 与[45] 中，在这方面有较详细的叙述. 本节将介绍著者提出或总结的某些简单易行的方法与结果.

设要计算 Cauchy 主值积分

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t,\quad t_0\in L, \tag{4.1}$$

其中 $\varphi(t)\in H$ 于 L 上，而 L 为一光滑(或分段光滑) 的开口或封闭曲线. 为要近似计算 $\Phi(t_0)$，可把(4.1) 改写为

$$\begin{aligned}\Phi(t_0)&=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\mathrm{d}t+\frac{\varphi(t_0)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}\\&=\Phi_1(t_0)+\Phi_2(t_0),\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $\Phi_2(t_0)$ 已可具体精确求出，而

$$\Phi_1(t_0)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int\varphi_1(t)\mathrm{d}t, \tag{4.3}$$

其中

$$\varphi_1(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\in H^*.$$

所以(4.3)已是一通常的反常积分. 因此，问题已化为反常积分的近似计算. 如果改用 L 的弧长参数作为积分变量，(4.3)就可化为实变量函数的反常积分的近似计算(如果 L 可用实参数写出参数方程也是一样)，因而有许多经典结果可资应用. 如果 $\varphi(t)\in H^1$，从而 $\varphi_1(t)$ 为有界函数，因而(4.3)是正常积分，更有许多经典结果可以引用. 以上这种方法称为**奇点分离法**.

特别，如果 L 本身是一直线段，例如实轴上的一段，则积分变量本身就是实的，或者 L 是单位圆周或其一弧段，用 $t=e^{i\theta}$ 立即可化为实变量 θ 的积分，这时以上方法将更为简便. 本段及下段中将只讨论 L 为实轴上一段的情况.

当 $\varphi(t)$ 具有较高阶的光滑性时，则 $\varphi_1(t)$ 将会有低 1 阶的光滑性. 实际上，我们有下面的

引理7.4.1 设 $g(x)\in C^{n+1}[a,b]$，$n\geqslant 0$ (即在区间 $[a,b]$ 上 $g^{(n+1)}(x)$ 连续)，又 $a\leqslant x_0\leqslant b$；令

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}, & \text{当 } x\neq x_0;\\ g'(x_0), & \text{当 } x=x_0,\end{cases}$$

则有

$$G^{(k)}(x)=\begin{cases}\dfrac{g^{(k+1)}(\xi_k)}{k+1}, & \text{当 } x\neq x_0;\\ \dfrac{g^{(k+1)}(x_0)}{k+1}, & \text{当 } x=x_0,\end{cases}\qquad k=0,1,\cdots,n,\tag{4.4}$$

其中 ξ_k 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证 对于 $x\neq x_0$，由归纳法易证

$$G^{(k)}(x)=\frac{k!}{(x_0-x)^{k+1}}\Big[g(x_0)-g(x)-g'(x)(x_0-x)-\cdots-\frac{1}{k!}g^{(k)}(x)(x_0-x)^k\Big].\tag{4.5}$$

由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式，立即可得(4.4). 再令 $x\to x_0$，便可得(4.4)中 $x=x_0$ 的情况. □

所以，如果 $\varphi(t)$ 的光滑度较高，积分近似计算中的许多经典公式以及误差估计均可移到 Cauchy 主值积分上来.

如果(4.1)的被积式中有一权函数 $w(x)\geqslant 0$，它在 L 的某些点例如端点

处可能有可积奇异性，亦即

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} w(t)\,\mathrm{d}t, \quad t_0 \in L, \tag{4.6}$$

则以上方法仍适用，只要把(4.6)写成

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \varphi_1(t) w(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\varphi(t_0)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{w(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t, \tag{4.7}$$

而右边第二项的积分在某些情况下可精确求出①.

7.4.2 Gauss-Chebyshev 型求积公式

作为上述原则方法的一个具体应用，我们来考虑下一 Cauchy 主值积分的近似计算：

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{t-x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 < x < 1, \tag{4.8}$$

其中 $g(x)$ 有充分高阶的光滑性，这里权函数

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

这一积分的近似计算公式对第一类奇异积分方程即

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} k(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(x), \quad -1 < x < 1 \tag{4.9}$$

在 h_0 类中用数字方法求解时就很有用，这里 $k(x,t)$ 为二元函数，$\in H$.

应用上段中方法时，要先求出(4.8)当 $g(t)\equiv 1$ 时的结果. 可以证明，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} = 0, \quad -1 < x < 1. \tag{4.10}$$

为证明此式，作一围线 γ 将线段 $-1\leqslant x\leqslant 1$ $(y=0)$ 围在其内域中. 任取 z 位于 γ 的外域，则由留数定理，易证

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma^-} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}(\zeta-z)} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

(γ^- 为 γ 取顺时针向)，其中 $\sqrt{1-\zeta^2}$ 是 $-1<x<1$ 上岸的正值函数 $\sqrt{1-x^2}$ 的解析延拓. 然后令 γ 向 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 收缩，便得

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-z)} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad z \overline{\in} [-1,1].$$

---

① 或者，如果用本方法能近似算出这个积分也可，但这就相当于把 $\varphi(t)w(t)$ 看成一个函数了，不过它可能在某些点处有不到一阶的奇异性.

在上式中令 z 从$(-1,1)$ 的上岸(或下岸) 趋于 x，利用 Plemelj 公式，便可证得(4.10).

这样，(4.8) 中的 $I(x)$ 就可改写为

$$I(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{4.8$'$}$$

但我们知道(例如，参看[28])，如果 $f(t)\in C^{2n}[-1,1]$，则有 Gauss-Chebyshev 积分近似公式

$$I\equiv I[f]=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(t_k), \tag{4.11}$$

其中t_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 为第一种 n 次 Chebyshev 多项式 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 的零点，即

$$t_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

且(4.11) 的余项误差为

$$R_n[I]=\frac{1}{(2n)!\,2^{2n-1}}f^{(2n)}(\xi),\quad -1<\xi<1. \tag{4.12}$$

令 $f(t)=\dfrac{g(t)-g(x)}{t-x}$，代入(4.11)，便得近似公式

$$I(x)\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{g(t_k)}{t_k-x}+\frac{g(x)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-t_k},\quad -1<x<1,\ x\neq t_k. \tag{4.13}$$

但因

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-t_k}=\frac{T_n'(x)}{T_n(x)},$$

又易见 $T_n'(x)=nU_{n-1}(x)$，其中

$$U_{n-1}(x)=\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

为第二种 $n-1$ 次 Chebyshev 多项式，故上式又可写成

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-t_k}=\frac{nU_{n-1}(x)}{T_n(x)},$$

于是(4.13) 可写成

$$I(x)\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{g(t_k)}{t_k-x}+g(x)\frac{U_{n-1}(x)}{T_n(x)},\quad -1<x<1,\ x\neq t_k.\text{①} \tag{4.14}$$

---

① 如果想得到 $x=t_k$ 时的近似公式，只要在(4.14) 中令 $x\to t_k$ 求极限即可(参看[23]).

此公式首先由 M. M. Chawla-T. R. Ramakrishnan[31] 用不同的较繁方法获得，称为**Gauss-Chebyshev 型求积公式**. 但他们并未得出下面的简洁的余项误差公式. 根据引理 7.4.1，公式(4.14) 的余项立即可知为

$$R_n(I(x))=\frac{1}{(2n)!2^{2n-1}}G^{(2n)}(\xi)=\frac{1}{(2n+1)!2^{2n-1}}g^{(2n+1)}(\xi'),\quad (4.15)$$

其中 $-1<\xi'<1$，条件是 $g^{(2n+1)}(x)$ 连续. 由此可见，如果 $g(x)$ 是 $2n$ 次多项式，则(4.14) 是精确公式.

特别，如果取 $x=x_j$ 为 $U_{n-1}(x)$ 的零点，即

$$x_j=\cos\frac{j}{n}\pi,\quad j=1,2,\cdots,n-1,\quad (4.16)$$

则公式(4.14) 变得特别简单：

$$I(x_j)\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{g(t_k)}{t_k-x_j},\quad j=1,2,\cdots,n-1.\quad (4.17)$$

利用(4.17)，就可把方程(4.9) 近似地离散化为线性代数方程而求解.

如果方程(4.9) 要在 h_2 类中、$h(+1)$ 类中或 $h(-1)$ 类中求解，则就要分别讨论积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t,\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{t-x}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

或

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{t-x}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t$$

的近似计算公式. 这些都可用同一原则方法类似地去做，且还可得出包括(4.8) 在内的其他各种类型的求积公式. 详见著者[23].

沿这个方向，杜金元等在[4]～[7],[77],[78] 中曾作出包括高阶奇异积分的求积公式的系统研究；并以此为基础，对奇异积分方程数值解法作了深入的讨论，参看[79]～[85].

7.4.3 用分段线性函数逼近 Cauchy 主值积分

前已提到，近似计算(4.1) 时可用弧长参数 s 作变量来讨论. 但实际上对一般的 L 来说，由于其复杂性，这是困难的；即使不用 s 而另取一实参数作变量一般说来也是困难的. 因而自然就产生这样的问题：能否避开 L 的复杂性而直接寻求复主值积分(4.1) 的近似公式. 可以看到，用分段线性函数来逼近核密度时是可以达到这一目的的.

为此，我们首先来讨论用分段线性函数来逼近复函数 $f(t)$，并估计其误差.

为确定起见，设$L=\widehat{ab}$为一开口光滑弧段，已给$f(t)\in H^{\alpha}(0<\alpha\leqslant 1)$于$L$上. 作$L$的一分法$\Delta$: $t_1=a,t_2,\cdots,t_{N+1}=b$，把$L$分成$N$段. 记($\Delta t_j=t_{j+1}-t_j$)

$$L_j=\widehat{t_jt_{j+1}},\ y_j=f(t_j),\ \Delta y_j=y_{j+1}-y_j,\ D_j=\frac{\Delta y_j}{\Delta t_j}.$$

在L上作一分段线性连续函数$S_\Delta(t)$，使得$S_\Delta(t_j)=y_j$. 亦即

$$S_\Delta(t)\equiv S_j(t)=y_j+D_j(t-t_j),\quad t\in L_j,\ j=1,2,\cdots,N.\tag{4.18}$$

记误差$f(t)-S_\Delta(t)=e_\Delta(t)$，并记$\delta=\max\limits_j|\Delta t_j|$. 于是，当$t\in L_j$时，

$$\begin{aligned}|e_\Delta(t)|&=|f(t)-S_j(t)|\leqslant|f(t)-y_j|+|D_j||t-t_j|\\&\leqslant C|t-t_j|^{\alpha}+\frac{C}{|\Delta t_j|^{1-\alpha}}|t-t_j|\leqslant C\delta^{\alpha},\end{aligned}\tag{4.19}$$

其中C为某常数(在不同地方出现，可表示不同常数，下同)；这里应用了不等式

$$|t-t_j|\leqslant|\widehat{tt_j}|\leqslant C|\Delta t_j|.$$

由(4.19)可见，若$\{t_j\}$取得相当细密，因而δ可充分小，则误差$e_\Delta(t)$可任意小.

现在转而讨论用$\int_L\frac{S_\Delta(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau$以替代$\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau$时的误差，亦即要估计

$$\begin{aligned}\int_L\frac{e_\Delta(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau&=\int_L\frac{e_\Delta(\tau)-e_\Delta(t)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+e_\Delta(t)\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}\\&=I_1(t)+I_2(t).\end{aligned}$$

由(4.19)，

$$|I_2(t)|\leqslant C|e_\Delta(t)|\leqslant C\delta^{\alpha}.\tag{4.20}$$

为了估计$|I_1(t)|$，先来估计$|e_\Delta(\tau)-e_\Delta(t)|$.

当τ,t属于同一L_j时，显然

$$|e_\Delta(\tau)-e_\Delta(t)|\leqslant C|\tau-t|^{\alpha}\leqslant C\delta^{\alpha-\varepsilon}|\tau-t|^{\varepsilon},\tag{4.21}$$

其中ε为任意小的正数($0<\varepsilon<\alpha$). 如果$t\in L_{j-1}$，$\tau\in L_k$，且不妨设$j\leqslant k$，则因$e_\Delta(t_j)=e_\Delta(t_k)=0$，故

$$\begin{aligned}|e_\Delta(\tau)-e_\Delta(t)|&\leqslant|e_\Delta(\tau)|+|e_\Delta(t)|\\&=|e_\Delta(\tau)-e_\Delta(t_k)|+|e_\Delta(t)-e_\Delta(t_j)|\\&\leqslant C(|\tau-t_k|^{\alpha}+|t-t_j|^{\alpha})\\&\leqslant C\delta^{\alpha-\varepsilon}(|\tau-t_k|^{\varepsilon}+|t-t_j|^{\varepsilon})\\&\leqslant C\delta^{\alpha-\varepsilon}(|\widehat{t_k\tau}|^{\varepsilon}+|\widehat{tt_j}|^{\varepsilon})\leqslant C\delta^{\alpha-\varepsilon}|\widehat{t\tau}|^{\varepsilon}\\&\leqslant C\delta^{\alpha-\varepsilon}|\tau-t|^{\varepsilon}.\end{aligned}$$

总之，不论 t,τ 如何，(4.21) 恒成立(对某常数 C). 于是

$$\begin{aligned}|I_1(t)| &\leqslant C\delta^{\alpha-\varepsilon}\int_L |\tau-t|^{-1+\varepsilon}|\mathrm{d}\tau| \\ &\leqslant C\delta^{\alpha-\varepsilon}\int_0^L s^{-1+\varepsilon}\mathrm{d}s \leqslant C_\varepsilon\delta^{\alpha-\varepsilon},\end{aligned} \tag{4.22}$$

其中 C_ε 为依赖于 ε 的一常数(当 $\varepsilon\to 0$ 时，一般 $C_\varepsilon\to+\infty$).

这样，结合(4.21),(4.22)，我们最后得到

$$\left|\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau-\int_L \frac{S_\Delta(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\right| \leqslant C_\varepsilon\delta^{\alpha-\varepsilon} \quad (0<\varepsilon<\alpha). \tag{4.23}$$

我们可以任意取定 ε. 由此可看出，当分法 Δ 充分细密时即 δ 充分小时，便可使(4.23)左边任意小. 这就是说，用 $S_\Delta(t)$ 来近似代替Cauchy主值积分的核密度 $f(t)$ 时，可使积分本身任意接近. 因 $S_\Delta(t)$ 是一分段线性函数，从而

$$\int_L \frac{S_\Delta(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau = \sum_{j=1}^{N}\int_{L_j} \frac{S_j(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau \tag{4.24}$$

可立即算出为初等函数，所以可作为 Cauchy 型主值积分的近似计算的一种有效方法.

本段所论，对于 L 为封闭曲线情况完全适用. 后一情况正是 K. Atkinson [29] 中所考虑的. 这里大大简化了他的论证.

如果用分段高次(例如三次、四次) 多项式函数来替代分段线性函数，会得出更好的近似效果. 有兴趣的读者可参考著者的论文[22],[24].

此外，王小林[86] 还讨论了奇异积分方程的样条逼近解法.

又，与奇异积分方程近似解法密切相关的是：积分曲线本身也是近似的情况(这在应用中常见). 因此，探索奇异积分值和奇异积分方程解对积分曲线的稳定性也很有意义. 在这方面，王小林、龚亚方在[87],[88]中已有所讨论；后来，王传荣等对此以及解析函数的各种边值问题关于曲线的稳定性又有许多讨论，见[89] ~ [92].

7.5 带根号的边值问题

7.5.1 带根号的 Riemann 边值问题

我们将讨论下面一种特殊的非线性Riemann边值问题(参看[93],[94])：

$$\sqrt{\Psi^+(t)} = G(t)\sqrt{\Psi^-(t)} + g(t), \quad t\in L, \tag{5.1}$$

其中 L 是复平面中一封闭光滑曲线，以反时针向为正向，其内部和外部区域分别记为 S^+ 和 S^-，已知函数 $G(t), g(t) \in H(L)$，$\Psi(z)$ 是以 L 为跳跃曲线的分区全纯函数，在 $z=\infty$ 处有有限阶，要求 $\sqrt{\Psi^{\pm}(t)}$ 在 L 上连续、单值. 只讨论正则型情况：$G(t) \neq 0$ 于 L 上. 与通常一样，定义(5.1) 的指标为

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L. \tag{5.2}$$

在求解(5.1) 之前，先来分析一下未知函数 $\Psi(z)$ 的结构.

如果 $\Psi^+(z)$ 在 S^+ 内有偶数个奇数阶零点 $a_1, a_2, \cdots, a_{2m}$ $(m \geqslant 0)$，它们是 $\sqrt{\Psi^+(z)}$ 在 S^+ 内仅有的(二阶) 支点，则我们可以写

$$\Psi^+(z) = \Pi_a(z)\Phi_0^+(z)^2, \quad z \in S^+, \tag{5.3}$$

其中

$$\Pi_a(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2m}) \tag{5.4}$$

(若 $\Psi^+(z)$ 在 S^+ 中没有奇数阶零点，则令 $\Pi_a(z) \equiv 1$). 于是 $\Phi_0^+(z)$ 在 S^+ 内全纯，连续到 L 上. 在 $a_1, a_2, \cdots, a_{2m}$ 中任意取定 m 点对，并把每一点对在 S^+ 内用一弧连接(但各不相交)，然后将复平面用这 m 条弧剖开，并取定 $\sqrt{\Pi_a(z)}$ 为其一个确定分支. 这样，我们便有

$$\sqrt{\Psi^+(z)} = \sqrt{\Pi_a(z)}\Phi_0^+(z), \quad z \in S^+. \tag{5.5}$$

如果 $\Psi^+(z)$ 在 S^+ 内有奇数个奇数阶零点 $a_1, a_2, \cdots, a_{2m-1}$ $(m \geqslant 1)$，则 $\Psi^+(t)$ 在 L 上必(至少) 有一零点 a_{2m}，因为 $\sqrt{\Psi^+(t)}$ 在 L 上单值. 因此，我们仍有(5.3)，而 $\sqrt{\Pi_a(z)}$ 仍如(5.5) 定义. 这时，$\Phi_0(z)$ 在 $z = a_{2m}$ 处可能有不到 1/2 阶的奇异性.

再来分析 $\sqrt{\Psi^-(z)}$ 的结构. 设 $\Psi^-(z)$ 在 S^- 内有 N $(\geqslant 0)$ 个奇数阶零点 $b_1, b_2, \cdots, b_N$，而在 $z=\infty$ 处为(整数) K 阶. 考虑以下情况：

(ⅰ) $N = 2n$ 与 $K = 2k$ 均为偶数. 这时可写

$$\Psi^-(z) = \Pi_b(z)\Phi_0^-(z)^2, \quad z \in S^-, \tag{5.6}$$

其中

$$\Pi_b(z) = (z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_{2n}) \tag{5.7}$$

(若 $n=0$ 则 $\Pi_b(z) \equiv 1$)，$\Phi_0^-(z)$ 在 S^- 中全纯，连续到 L 上，在 $z=\infty$ 处有 $k-n$ 阶. 这样，我们有

$$\sqrt{\Psi^-(z)} = \sqrt{\Pi_b(z)}\Phi_0^-(z), \quad z \in S^-, \tag{5.8}$$

其中 $\sqrt{\Pi_b(z)}$ 是一确定分支，当复平面以类似方式被 S^- 中 n 条互不相交的弧剖开后.

（ⅱ） $N=2n$ 是偶数，$K=2k+1$ 是奇数. 则因$\sqrt{\Psi^{-}(t)}$ 单值，故 $\sqrt{\Psi^{-}(t)}$ 在 L 上必(至少) 有一零点 b_{2n+1}. 所以仍有(5.6)，其中 $\Pi_b(z)$ 不由(5.7) 而改用下式定义：

$$\Pi_b(z)=(z-b_1)\cdots(z-b_{2n})(z-b_{2n+1}), \qquad (5.7)'$$

而(5.8) 仍成立(当平面适当剖开后). 这时，$\Phi_0^{-}(z)$ 在 b_{2n+1} 处可能有不到 1/2 阶的奇异性，在 ∞ 处仍有 $k-n$ 阶.

（ⅲ） $N=2n-1$ 是奇数，$K=2k$ 是偶数. 如前，易见$\Psi^{-}(t)$ 在 L 上必有零点 b_{2n}. 因此，仍可写 $\Pi_b(z)$ 如(5.8)，其中 $\Pi_b(z)$ 仍由(5.7) 给出；又可看到，$\Phi_0^{-}(z)$ 在$b_{2n}\in L$处可能有不到1/2阶的奇异性，且在∞处有 $k-n$ 阶.

（ⅳ） $N=2n+1$ 与 $K=2k+1$ 均为奇数. 这时，仍可写(5.8)，其中 $\Pi_b(z)$ 由(5.7)$'$ 给出，且 $\Phi_0^{-}(z)$ 在 ∞ 处有 $k-n$ 阶.

现在来求解(5.1)，为确定起见，我们要求$\Psi^{-}(z)$ 在无穷远处至多有偶数阶 $K=2k$ 或奇数阶 $K=2k+1$ (k 为一确定整数). 关于前述诸支点 a_j 和 b_j 其个数与位置以及所用的剖线均为任意的. 所以，在任何情况下，可以写(5.5) 与(5.8)，其中 $\Phi_0(z)$ 分区全纯，$\Phi_0^{+}(t)$ 和 $\Phi_0^{-}(t)$ 分别在 $a_{2n}\in L$ 和b_{2n} 或 $b_{2n+1}\in L$处可能有$<1/2$阶的奇异性，在$z=\infty$处至多有$k-n$阶. 这样，(5.1) 可改写为

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+\frac{g(t)}{\sqrt{\Pi(t)}},\quad t\in L, \qquad (5.9)$$

其中

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{\Phi_0^{+}(z)}{\sqrt{\Pi_b(z)}}, & \text{当 } z\in S^{+};\\[2ex] \dfrac{\Phi_0^{-}(z)}{\sqrt{\Pi_a(z)}}, & \text{当 } z\in S^{-}\end{cases} \qquad (5.10)$$

分区全纯，在 a_j,b_j 处可能有 $<1/2$ 阶的奇异性. 我们暂时假定，在 L 上 $a_{2m}\neq b_{2n}$ 或b_{2n+1}，而$\sqrt{\Pi(z)}$ 是确定的分支：

$$\sqrt{\Pi(z)}=\sqrt{\Pi_a(z)}\sqrt{\Pi_b(z)}. \qquad (5.11)$$

显然，$\Phi^{-}(z)$ 在 $z=\infty$ 处至多为 $k-m-n$ 阶.

(5.9) 是一典型的正则型 R_{k-m-n} 问题，其指标为 κ. 任取$z_0\in S^{+}$，定义典则函数 $X(z)$ 如第二章(2.14) 式，并记

$$c=(k+\kappa)-(m+n). \qquad (5.12)$$

根据一般理论(见 2.2.2 段)，我们有

(a) 若 $c\geqslant-1$，即 $k+\kappa\geqslant m+n-1$，则 R_{k-m-n} 问题(5.1) 有一般解

$$\Phi(z)=X(z)\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)\sqrt{\Pi(t)}(t-z)}+P_c(z)\right],$$

$$z\overline{\in}L, \qquad (5.13)$$

其中$P_c(z)$是c次任意多项式($P_{-1}\equiv 0$). 因此，由(5.5),(5.8)与(5.10)，得(5.1)的一般解

$$\sqrt{\Psi(z)}=\sqrt{\Pi(z)}X(z)\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)\sqrt{\Pi(t)}(t-z)}+P_c(z)\right],$$

$$z\overline{\in}L. \qquad (5.14)$$

(b) 若$c<-1$，即$k+\kappa<m+n-1$，则(5.1)有唯一解(5.14)($P_c\equiv 0$)当且仅当下列可解条件满足：

$$\int_L \frac{g(t)t^r}{X^+(t)\sqrt{\Pi(t)}}\mathrm{d}t=0, \quad r=0,1,\cdots,-c-2. \qquad (5.15)$$

我们来验证，在$a_{2m}\in L$情况下，积分

$$I(z)=\int_L \frac{g(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)\sqrt{\Pi(t)}(t-z)} \qquad (5.16)$$

在该处确有$<1/2$阶的奇异性从而确有$\Psi^+(a_{2m})=0$. 为此，令

$$g_1(t)=\frac{g(t)}{X^+(t)\sqrt{\Pi_b(t)}}.$$

于是

$$I(z)=\int_L \frac{g_1(t)-g_1(a_{2m})}{\sqrt{\Pi_a(t)}(t-z)}\mathrm{d}t+g_1(a_{2m})\int_L \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\Pi_a(t)}(t-z)}$$

$$=I_1(z)+g_1(a_{2m})I_2(z).$$

显然，$I_1(z)$在$z=a_{2m}$处的阶$<1/2$. $I_2(z)$中被积式作为t的函数在S^-中全纯(固定$z\in S^+$)，连续到L上，但在a_{2m}处有1/2阶奇异性，且在$t=\infty$处留数为0，故$I_2(z)=0$，$z\in S^+$. 这就证实了我们的论断. 同样，可以证实在$b=b_{2n+1}$或$b_{2n}\in L$时，确有$\Psi^-(b)=0$.

也易于验证$\Psi^-(a_{2m})$与$\Psi^+(b)$均有限. 这样，我们的问题已解决.

以下作几点说明：

1° 此前已设$a_{2m}\in L$不等于b_{2n}或$b_{2n+1}\in L$. 如果它们彼此相等，则$g(t)$必然在此点等于零. 在这种情况下，虽然$1/\sqrt{\Pi(t)}$在此处有1阶奇异性，但当z不论从S^+或S^-趋于该点时，均有$\sqrt{\Psi(z)}\to 0$，这是因为由(5.16)定义的$I(z)$在该处有不到1阶的奇异性的缘故. 所以所得结果这时仍有效.

2° 可解条件(5.15) 与确定$\sqrt{\Pi_a(z)}$ 和 $\sqrt{\Pi_b(z)}$ 分支的剖线无关，因为$\sqrt{\Pi(t)}$ 的值，不论剖线怎样选取都是一意确定的(至多差一符号).

3° 在很多情况下，在求解(5.1)时要求$\Psi^-(z)$在$z=\infty$处至多有一确定的阶K. 这相当于要求它在$z=\infty$处至多有一偶(奇)数阶K或者至多有一奇(偶)数阶$K-1$.

4° 此前假定了$\sqrt{\Pi_a(z)}$ 和$\sqrt{\Pi_b(z)}$ 的支点的个数与位置均未事先指定，因此求解(5.1)时一般有很高的自由度. 我们也可求解(5.1)而对它们有一些限制，则相应自由度就会减少. 但是，正如[89]中指出的，在某些特殊情况下，即使部分地保留选择它们的任意性，(5.1)仍会没有解.

5° 在[95]中，我们将(5.1)推广到把$\sqrt{\Psi^+(t)}$ 和$\sqrt{\Psi^-(t)}$ 分别换作$\sqrt[p]{\Psi^+(t)}$ 和$\sqrt[q]{\Psi^-(t)}$ 的情形，其中 p,q 为任意正整数.

7.5.2 应用于一种非线性奇异积分方程

我们将应用上段结果求解下列非常特殊的非线性奇异积分方程(一切记号均同前)：

$$a\varphi^2(t)+\frac{b}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+c=0,\quad t\in L,\tag{5.17}$$

其中a,b,c为已知常数($a,b\neq0$). 我们将看到，(5.17)除以$ar^2+br+c=0$的根为其平凡解外，一般还有非平凡解(本段内容取自[96]).

如通常那样，记算子

$$S\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\quad t\in L.$$

于是(5.17)可写为

$$a\varphi^2+bS\varphi+c=0.\tag{5.18}$$

熟知$S^2=I$(恒等算子)且$Sc=c$，所以

$$aS^2\varphi+b\varphi+c=0.\tag{5.19}$$

将(5.18)与(5.19)相加，得

$$(S+I)(a\varphi^2+b\varphi+c)=0.\tag{5.20}$$

定义

$$\omega(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{a\varphi^2(\tau)+b\varphi(\tau)+c}{\tau-z}d\tau,\quad z\,\overline{\in}\,L.\tag{5.21}$$

由 Plemelj 公式，从(5.20)知$\omega^+(t)=0\ (t\in L)$，从而$\omega(z)\equiv0$，$z\in\overline{S^+}$，且

$$a\varphi^2(t)+b\varphi(t)+c=\omega^-(t),\quad t\in L.\tag{5.22}$$

此外，$\omega(\infty)=0$. 所以

$$\varphi(t)=\frac{1}{2a}[-b\pm\sqrt{\Delta+4a\omega^{-}(t)}],$$

其中 $\Delta=b^2-4ac$ 为(5.18) 的判别式.

记$\Psi^{-}(z)=\Delta+4a\omega(z)$，$z\in S^{-}$，它在$S^{-}$ 中全纯，其边值$\Psi^{-}(t)=\Delta+4\omega^{-}(t)$，$t\in L$，且$\Psi^{-}(\infty)=\Delta$. 因此

$$\varphi(t)=\frac{1}{2a}[-b\pm\sqrt{\Psi^{-}(t)}],\quad t\in L.$$

因为要求$\varphi(t)$在L上连续、单值，故$\sqrt{\Psi^{-}(t)}$也是如此，只要$\sqrt{\Psi^{-}(z)}$在L上取定一分支，即要求$\sqrt{\Psi^{-}(\infty)}=\sqrt{\Delta}$或$-\sqrt{\Delta}$($\sqrt{\Delta}$是$\Delta$ 的一确定平方根) 的分支. 这样，上面的方程可简写为

$$\varphi(t)=\frac{1}{2a}[-b+\sqrt{\Psi^{-}(t)}],\quad t\in L,\tag{5.23}$$

其中$\sqrt{\Psi^{-}(t)}$是$\sqrt{\Psi^{-}(z)}$在L上的分支，具有

$$\sqrt{\Psi^{-}(\infty)}=\sqrt{\Delta}\text{ 或 }-\sqrt{\Delta}\tag{5.24}$$

(当$\Delta=0$时，$\sqrt{\Psi^{-}(t)}$可任取$\sqrt{\Psi^{-}(z)}$在L上的一分支).

同样，由(5.19) 减去(5.21)，可得

$$(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I})(a\varphi^2-b\varphi)=0.\tag{5.25}$$

定义

$$\omega_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{a\varphi^2(\tau)-b\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\overline{\in}L.\tag{5.26}$$

由同样的推理可知$\omega_1(z)=0$，$z\in\overline{S^{-}}$，且

$$a\varphi^2(t)-b\varphi(t)=\omega_1^{+}(t),$$

因而

$$\varphi(t)=\frac{1}{2a}[b\pm\sqrt{b^2+4a\omega_1^{+}(t)}].$$

令$\Psi^{+}(z)=b^2+4a\omega_1(z)$，$z\in S^{+}$，则$\Psi^{+}(z)$在$S^{+}$内全纯，有边值

$$\Psi^{+}(t)=b^2+4a\omega_1^{+}(t),$$

且可简单地写成

$$\varphi(t)=\frac{1}{2a}[b+\sqrt{\Psi^{+}(t)}],\quad t\in L,\tag{5.27}$$

其中$\sqrt{\Psi^{+}(t)}$可取$\sqrt{\Psi^{+}(z)}$在L上的任一连续分支.

将(5.27) 与(5.26) 比较，可以看出，

$$\sqrt{\Psi^{+}(t)}=\sqrt{\Psi^{-}(t)}-2b,\quad t\in L,\tag{5.28}$$

其中 $\Psi(z)$ 是一分区全纯函数，其边值$\sqrt{\Psi^{\pm}(t)}$ 都是单值的，$\in H(L)$，且要求(5.24) 满足. 这是一个典型的上段讨论过的带平方根的 Riemann 边值问题，要求其解当 $\Delta \neq 0$ 时满足(5.24) 且在 $z=\infty$ 处恰好为零阶，而当 $\Delta=0$ 时要求$\Psi^{-}(\infty)=0$ (即在 $z=\infty$ 处$\Psi^{-}(z)$ 至多为 -1 阶). 注意问题(5.28) 的指标 $\kappa=0$. 以下分两种情况讨论.

(i) $\Delta \neq 0$. 这时应在 R_0 中求解(5.28). 由上段3°知，只须考虑$\Psi^{-}(z)$ 有偶数阶(至多为) $K=0$ 的情况.

这时，$\Psi^{+}(z)$ 在 S^{+} 内可以有偶数个奇数阶零点 $a_1, a_2, \cdots, a_{2m}$ 或者有奇数个这种零点 $a_1, a_2, \cdots, a_{2m-1}$ 再加上(至少) 一个零点 $a_{2m} \in L$ (这里 m 以及这些不同点的位置都可任意取定). 记$\Pi_a(z)$ 如(5.4). 同样，$\Psi^{-}(z)$ 在 S^{-} 内可以有偶数个奇数阶零点 $b_1, b_2, \cdots, b_{2n}$ 或者有奇数个这种零点 $b_1, b_2, \cdots, b_{2n-1}$ 以及(至少) 一个零点 $b_{2n} \in L$ (这里 n 和这些零点的位置也完全任意)，记 $\Pi_b(z)$ 如(5.7). 注意，当 a_{2m} 与 b_{2n} 均 $\in L$ 时，由(5.28)，必然 $a_{2m} \neq b_{2n}$. 考虑以下子情况：

(1) $m=n=0$. 则(5.28) 的所求解为

$$\sqrt{\Psi(z)}=-\frac{b}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\mathrm{d} t}{t-z} \pm \sqrt{\Delta}, \quad z \overline{\in} L,$$

由此立得

$$\sqrt{\Psi^{+}(z)}=-2 b \pm \sqrt{\Delta}, \quad \sqrt{\Psi^{-}(z)}=\pm \sqrt{\Delta}.$$

于是，由(5.23) 或(5.27)，

$$\varphi(t)=\frac{1}{2 a}(-b \pm \sqrt{\Delta}).$$

这是(5.17) 的两个平凡解.

这个结论也可直接从(5.28) 由 Liouville 定理获得.

(2) $m>0$，$n=0$，或 $m=0$，$n>0$. 当 $m>0$，$n=0$ 时，(5.28) 在 R_0 问题中可能的解是

$$\sqrt{\Psi(z)}=-\sqrt{\Pi_a(z)} \frac{b}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\mathrm{d} t}{\sqrt{\Pi_a(t)}(t-z)}, \quad z \overline{\in} L,$$

它在 S^{+} 内恒等于零，这和 $m>0$ 矛盾. 同样，当 $m=0$，$n>0$ 时，$\sqrt{\Psi^{-}(z)}$ 在 S^{-} 内恒等于零，和 $n>0$ 矛盾. 这样，在这一子情况下，我们的问题无解，从而方程(5.17) 也无解.

(3) $m>0$，$n>0$. 这时问题(5.28) 在附加条件(5.24) 下有唯一解

$$\sqrt{\Psi(z)}=-\sqrt{\Pi(z)} \frac{b}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\mathrm{d} t}{\sqrt{\Pi(t)}(t-z)}, \quad z \overline{\in} L \tag{5.29}$$

(其中$\sqrt{\Pi(z)}$由(5.11)定义)，只要下列可解条件满足：

$$\int_L \frac{t^r}{\sqrt{\Pi(t)}}\mathrm{d}t = 0, \quad r = 0,1,\cdots,m+n-2, \tag{5.30}$$

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{t^{m+n-1}}{\sqrt{\Pi(t)}}\mathrm{d}t = \sqrt{\Delta}\ \text{或}\ -\sqrt{\Delta}. \tag{5.31}$$

当它们都满足时，由 Plemelj 公式，

$$\sqrt{\Psi^{\pm}(t)} = \mp b - \frac{b}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\Pi(\tau)}(\tau - t)}, \quad t \in L.$$

最后，由(5.23)或(5.27)，便得

$$\varphi(t) = -\frac{b\sqrt{\Pi(t)}}{2a\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\Pi(\tau)}(\tau - t)}, \quad t \in L. \tag{5.32}$$

只要对取定的 $a_1,a_2,\cdots,a_{2m}$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_{2n}$ ($m>0$, $n>0$)，(5.30) 和(5.31)均满足，这便是(5.17)当$\Delta \neq 0$时的解.

(ⅱ) $\Delta = 0$. 这时(5.28)应该在 R_{-1} 问题中求解，或即，根据上段 3° 知，$\Psi_0^-(z)$在$z=\infty$处应有奇数阶$K=-1$或者有偶数阶(至多为)$K=-2$.

当$K=-2$时，推理与结果均同(ⅰ)中(1). 这时，可解条件(5.30)，(5.31)可合并写成统一形式：

$$\int_L \frac{t^r}{\sqrt{\Pi(t)}}\mathrm{d}t = 0, \quad r = 0,1,\cdots,m+n-1. \tag{5.33}$$

当$K=-1$时，仍记$\Pi_a(z)$如(5.4)，而$\Pi_b(z)$则由(5.7)′定义(其中$b_{2n+1} \in L$). 当$m=0$时，(5.17)无解如前. 当$m>0$时，相仿地可得(5.17)的解由(5.32)给出，只要下列可解条件满足：

$$\int_L \frac{t^r}{\sqrt{\Pi(t)}}\mathrm{d}t = 0, \quad r = 0,1,\cdots,m+n. \tag{5.34}$$

总之，(5.17)的非平凡解由(5.32)给出，而可解条件依赖于a_j和b_k的总数$2m+2n$或$2m+2n+1$以及它们的位置，但与使$\sqrt{\Pi_a(z)}$和$\sqrt{\Pi_b(z)}$成为单值分支的剖线所选的方式和形状无关，而可解条件的总数分别为$m+n$或$m+n+1$. 这表明方程(5.17)一般说来有许多非平凡解，即便事先指定了m与n也是如此.

但在某些特殊情况下，与上段4°中所述类似，即使a_j与b_k中有$m+n$个点任意取定，(5.17)还可以没有非平凡解. 例如，设$\Delta \neq 0$，$O \in S^+$，且L对O点对称. 让$a_1,a_2,\cdots,a_m \in S^+$与$b_1,b_2,\cdots,b_n \in S^-$随意取定，而取

$$a_{m+j} = -a_j \quad (j = 1,2,\cdots,m),$$

$$b_{n+k} = -b_k \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

这时

$$\Pi_a(z)=\prod_{j=1}^{m}(z^2-a_j^2),\quad \Pi_b(z)=\prod_{k=1}^{n}(z^2-b_k^2).$$

令$\sqrt{\Pi(t)}$是L上一确定分支. 易见，当$t'=-t\in L$时，

$$\sqrt{\Pi(t')}=(-1)^m\sqrt{\Pi(t)},$$

且当t沿L正向环行一周时，$t'=-t$也以同向环行一周. 于是(5.31)中的积分

$$\begin{aligned}I&=\int_L\frac{t^{m+n-1}}{\sqrt{\Pi(t)}}\mathrm{d}t=\int_L\frac{(t')^{m+n-1}}{\sqrt{\Pi(t')}}\mathrm{d}t'\\&=\int_L\frac{(-1)^{m+n-1}}{(-1)^m\sqrt{\Pi(t)}}\mathrm{d}(-t)\\&=(-1)^nI.\end{aligned}$$

所以，当n是奇数时$I=0$. 这就说明(5.31)(其中$\Delta\neq0$)对任何取定的a_1，$a_2,\cdots,a_m$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$不能满足. 因此，在这种情况下，(5.17)没有非平凡解.

当L对O点不对称时也是一样，因为可以把L连续变形但不通过任何a_j和b_k，使与O点对称，这不会影响(5.31)中积分的值.

注 当方程(5.17)中的常数项c改为任一多项式$P(t)$时，用与此类似的方法也可以求解(参看[97]).

7.5.3 带根号的 Hilbert 边值问题

利用7.5.1段中结果，可以求解下列带根号的Hilbert边值问题：

$$\mathrm{Re}[\lambda(t)\sqrt{\Psi^+(t)}]=c(t),\quad t\in L \tag{5.35}$$

(L等记号同前)，其中$\lambda(t)\neq0$与$c(t)$均$\in H(L)$. 与前一样，虽然未知函数$\Psi^+(z)$在S^+内全纯，但$\sqrt{\Psi^-(z)}$一般说来未必如此(参看[98]). 如2.6.1段，不失一般性，将设L是单位圆周$|t|=1$，并令

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}[\arg\overline{\lambda(t)}]_L. \tag{5.36}$$

我们设$\Psi^+(z)$在S^+内共有N个奇数阶的不同零点$a_1,a_2,\cdots,a_N$，其中N连同$a_1,a_2,\cdots,a_N$的位置均预先任意指定. 今后会看到，N为奇或偶时情况不一样，因此要分别讨论.

(ⅰ) $N=2m$是偶数. 记

$$\Pi(z)=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2m}), \tag{5.37}$$

而取$\sqrt{\Pi(z)}$是$\overline{S^-}$中的任一连续分支. 于是$\Psi^+(z)/\Pi(z)$在S^+内全纯，在L上

连续，且在 S^+ 内无奇数阶零点，所以

$$\sqrt{\Psi^+(z)}=\sqrt{\Pi(z)}\,\Phi^+(z), \tag{5.38}$$

其中$\Phi^+(z)$ 在 S^+ 内全纯，连续到 L 上，而(5.37) 成为

$$\mathrm{Re}[\lambda(t)\sqrt{\Pi(t)}\,\Phi^+(t)]=c(t),\quad t\in L. \tag{5.39}$$

这是一个典型的 H 问题，具有 Hölder 连续系数，其指标为

$$K=\frac{1}{\pi}[\arg\overline{\lambda(t)}]_L+\frac{1}{\pi}[\arg\overline{\sqrt{\Pi(t)}}]_L=2(\kappa-m). \tag{5.40}$$

设 $X(z)$ 为此问题规范化的典则函数，亦即满足 $\overline{X}\left(\frac{1}{z}\right)=z^KX(z)$ 者(见 2.6.3 段)，则有下列结果：

1° 当 $K>0$，即 $m\leqslant\kappa$ 时，(5.39) 有一般解

$$\Phi^+(z)=X^+(z)[F(z)+C_0z^K+C_1z^{K-1}+\cdots+C_K], \tag{5.41}$$

其中

$$\begin{aligned}F(z)=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{c(\tau)\mathrm{d}\tau}{\lambda(\tau)\sqrt{\Pi(\tau)}\,X^+(\tau)(\tau-z)}\\&+\frac{z^K}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\tau^{-K}c(\tau)\mathrm{d}\tau}{\lambda(\tau)\sqrt{\Pi(\tau)}\,X^+(\tau)(\tau-z)}\\&-\frac{z^K}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\tau^{-K-1}c(\tau)\mathrm{d}\tau}{\lambda(\tau)\sqrt{\Pi(\tau)}\,X^+(\tau)},\end{aligned} \tag{5.42}$$

而 $C_0,C_1,\cdots,C_K$ 为满足下列条件的任意(复) 常数：

$$C_{K-k}=\overline{C_k},\quad k=0,1,\cdots,K, \tag{5.43}$$

这里实际上有 $K+1=2(\kappa-m)+1$ 个任意实常数.

2° 当 $K\leqslant-2$，即 $m\geqslant\kappa+1$ 时，(5.39) 有（唯一）解 $\Phi^+(z)=X^+(z)F(z)$ 当且仅当下列 $-K-1$ 个(复) 条件满足时：

$$\int_L\frac{t^kc(t)}{\lambda(t)\sqrt{\Pi(t)}\,X^+(t)}\mathrm{d}t=0,\quad k=0,1,\cdots,-K-2. \tag{5.44}$$

当$\Phi^+(z)$ 求得后，H 问题(5.35) 的解可由(5.38) 给出.

(ii) $N=2m-1$ 是奇数. 这时$\Psi^+(t)$ 必定在 L 上有零点，任取其一：$t=a_0$. 显然 a_0 也必定是 $c(t)$ 的零点：$c(a_0)=0$. 现在记

$$\Pi(z)=(z-a_0)(z-a_1)\cdots(z-a_{2m-1}), \tag{5.45}$$

并再写(5.38)，这里$\Psi^+(z)$ 在 S^+ 内全纯，其边值除在 a_0 处可能有不到 1/2 阶的奇异性外，在 L 上连续.

我们的问题仍转化为(5.39)，并可改写为

$$\Phi^+(t)=G(t)\overline{\Phi^+(t)}+g(t),\quad t\in L, \tag{5.46}$$

其中

$$G(t)=\frac{\overline{\lambda(t)}\,\overline{\sqrt{\Pi(t)}}}{\lambda(t)\sqrt{\Pi(t)}},\quad g(t)=\frac{2c(t)}{\lambda(t)\sqrt{\Pi(t)}}. \tag{5.47}$$

注意，虽然 $\Pi(t)$ 在 L 上有零点 $t=a_0$，仍然 $G(t)\neq 0$ 于 L 上，且 $\in H_0$ 但有一节点 a_0，在该处可能有 $<1/2$ 阶的奇异性. 因为

$$\overline{\Phi^+(t)}=\overline{\Phi}^-\left(\frac{1}{t}\right),$$

其中$\overline{\Phi}^-(z)$ 在 S^- 中全纯，且在 ∞ 处有限，所以(5.46) 是一典型的正则型 R 问题，在唯一节点 a_0 处有间断系数. 我们要在 h_0 类中求解，且要求$\overline{\Phi}^-(\infty)$ 有限. 易见

$$\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L=2\kappa-(2m-1)-\frac{1}{2}=2(\kappa-m)+\frac{1}{2}.$$

故此问题在 h_0 类中的指标是奇数：

$$K=2(\kappa-m)+1. \tag{5.48}$$

令 $X(z)$ 为(5.46) 在 h_0 类中的规范化典则函数. 我们有下列结果：

1° 设 $K\geqslant 1$，即 $m\leqslant\kappa$. 这时(5.46) 在 h_0 类中的一般解仍由(5.41) 给出，其中常数 C_j 要满足(5.43)，$F(z)$ 由(5.42) 给出. 由 Plemelj 公式

$$F^+(t)=\frac{c(t)}{\lambda(t)\sqrt{\Pi(t)}\,X^+(t)}+F(t), \tag{5.49}$$

这里 $F(t)$ 含有连续核密度的奇异积分项.

因为$\sqrt{\Pi(t)}\,X^+(t)$ 在 $t=a_0$ 附近有界，且 $\neq 0$，上式右端的第一项，由于 $c(a_0)=0$，它也等于0. 所以，$F^+(t)$ 在 $t=a_0$ 处可能有不到1/2 阶的奇异性当且仅当

$$C_0a_0^K+C_1a_1^{K-1}+\cdots+C_K+F(a_0)=0\quad (C_{K-k}=\overline{C_k}). \tag{5.50}$$

这样，在(5.39) 或(5.35) 的一般解中，实任意常数的个数，由(5.50) 之故，减为 $K-1=2(\kappa-m)$.

例如，当 $K=1$ 或即 $m=\kappa$ 时，问题(5.39) 就有唯一解$X^+(z)F(z)$.

2° 设 $K\leqslant -1$，即 $m-\kappa\geqslant 1$. 则(5.39) 有唯一解$X^+(z)F(z)$ 当且仅当 $-K-1$ 个条件(5.44) 以及附加条件 $F(a_0)=0$ (亦即(5.50) 现在的形式) 均满足. 这些条件的总数为 $-K$.

$\Phi^+(z)$ 求得后，(5.35) 的解仍由(5.38) 给出①.

---

① 当 $K\leqslant -1$ 时，如果问题有(唯一) 解，如 2.6.3 段所述，解的表达式还可大大简化，从而条件 $F(a_0)=0$ 也可简化. 这些都留给读者考虑.

注 (1) 当 $c(t)$ 在 L 上处处 $\neq 0$ 时，若取 N 为奇数，则问题(5.35)无解.

(2) 当 $\lambda(t)$ 与 $c(t)$ 本身 $\in H_0(L)$，以上方法仍有效(利用[42]，§3中结果).

(3) 若(5.35)中的 $\sqrt{\Psi^+(t)}$ 换为 $\sqrt[p]{\Psi^+(t)}$，$p>2$ 为任何正整数，以上方法原则上仍有效，但情况要复杂些，需另行仔细讨论(详见[99]).

7.5.4 开口弧上的带根号 Riemann 边值问题

在本段中，我们将把 7.5.1 段中的问题推广到 L 为一开口弧的情况(见[101]). 亦即，设 $L=\widehat{ab}$ $(a\neq b)$ 为复平面中一开口光滑弧段，已取定 a 至 b 为其正向，我们要求在复平面被 L 剖开后的区域 S 中的全纯函数 $\Psi(z)$，满足边值条件

$$\sqrt{\Psi^+(t)}=G(t)\sqrt{\Psi^-(t)}+g(t),\quad t\in L,\ t\neq a,b,\tag{5.51}$$

其中 $G(t),g(t)\in H(L)$，$G(t)\neq 0$（正则型情况)，并要求 $\sqrt{\Psi^\pm(t)}$ 在 $L\setminus\{a,b\}$，且 $\Psi(z)$ 在 $z=\infty$ 处(至多)为 K 阶(K 为一任何确定的整数，为正、负或零均可).

为简明起见，我们要求 $\sqrt{\Psi(z)}\in h_0$，亦即，它在 a 与 b 处可能有不到 1 阶的奇异性. 注意，我们现在对普通端点和特殊异端点不加区别，因为对数奇异性也是不到 1 阶的奇异性.

暂时对 $\Psi(z)$ 在 $z=\infty$ 处的要求稍作修改：要求 $\Psi(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶可为 $K,K-2,K-4,\cdots$. 这种问题(5.51)将记为 $\widetilde{\mathrm{R}}_K$. 显然，R_K 问题的解集由所有 $\widetilde{\mathrm{R}}_K$ 问题的解和 $\widetilde{\mathrm{R}}_{K-1}$ 问题的解组成. 因此，以下的讨论只限于 $\widetilde{\mathrm{R}}_K$ 问题.

设 $\widetilde{\mathrm{R}}_K$ 问题(5.51)的解 $\Psi(z)$ 在区域 S 中的奇数阶零点为 $c_1,c_2,\cdots,c_N$，并记

$$\Pi(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_N),\tag{5.52}$$

这里非负整数 N 以及 $c_1,c_2,\cdots,c_N$ 的位置可以任意指定(如设无此种零点即 $N=0$，则记 $\Pi(z)\equiv 1$).

考虑下列不同情况.

Ⅰ. $K=2r$ 与 $N=2m$ 均为偶数或者 $K=2r-1$ 与 $N=2m-1$ 均为奇数. 这时 $\Psi(z)/\Pi(z)$ 在 $z=\infty$ 处有偶数阶，至多为 $2(r-m)$ 阶. 由单值化定理(参看[102])，可以写

$$\Psi(z) = \Pi(z)\Phi(z)^2, \quad z \in S,$$

或即

$$\sqrt{\Psi(z)} = \sqrt{\Pi(z)}\Phi(z), \quad z \in S, \tag{5.53}$$

其中 $\Phi(z)$ 在 S 中全纯，在 $z=\infty$ 处至多为 $r-m$ 阶，而$\sqrt{\Psi(z)}$ 为在复平面将 $c_1, c_2, \cdots, c_N$ 中成对地用互不相交、也不与 L 相交的弧段联结后剖开的区域中取定的一连续分支. 这样，我们的问题就转化为 $\Phi(z)$ 在 h_0 类中的经典 R_{r-m} 问题

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + \frac{g(t)}{\sqrt{\Pi(t)}}, \quad t \in L\setminus\{a,b\}. \tag{5.54}$$

当求出此问题的解(以及可能出现的可解条件满足)后，我们所要的解就由(5.53) 给出.

设 $G(t)$ 在 h_0 类中的典则函数为 $X(z)$，指标为 κ，并记

$$k = \kappa + r - m, \tag{5.55}$$

于是由一般理论知：

(ⅰ) 当 $k(=\kappa+r-m)\geqslant -1$ 时，问题(5.54) 在 h_0 类中的一般解为

$$\Phi(z) = X(z)[F(z) + P_k(z)], \quad z \overline{\in} L, \tag{5.56}$$

其中

$$F(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{\Pi(t)}\ X^+(t)(t-z)}, \quad z \overline{\in} L, \tag{5.57}$$

而 $P_k(z)$ 为 k 次任意多项式($P_{-1}(z)\equiv 0$). 于是，由(5.53)，$\tilde{\mathrm{R}}_K$ 问题(5.51) 在 h_0 类中的一般解为

$$\sqrt{\Psi(z)} = \sqrt{\Pi(z)}X(z)[F(z) + P_k(z)], \quad z \overline{\in} L. \tag{5.58}$$

(ⅱ) 当 $k<-1$ 时，所论问题在 h_0 类中有唯一解(5.58) (其中 $P_k(z)\equiv 0$) 当且仅当满足可解条件

$$\int_L \frac{t^j g(t)}{\sqrt{\Pi(t)}\ X^+(t)}\mathrm{d}t = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, -k-2. \tag{5.59}$$

Ⅱ. $K=2r-1$ 为奇数且 $N=2m$ 为偶数，或者 $K=2r$ 为偶数且 $N=2m-1$ 为奇数. 这时可写

$$\Psi(z) = \Pi(z)\Omega(z), \tag{5.60}$$

其中 $\Omega(z)$ 不可能是区域 S 中某全纯函数的平方，因为它在 $z=\infty$ 处有奇数阶 $2(r-m)-1$ (至多). 这时，我们要引进一辅助函数 $\omega(z)$ 满足下列条件：

1° $\omega(z)$ 在 S 中全纯，在 a 与 b 附近有界，在 S 中无零点，且连续到 L 的两侧，从而$\omega^\pm(t)$ 连续；

2° $\omega(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶数确切为 1；

3° 当 S 被适当剖分后，我们有

$$\sqrt{\omega^+(t)} = \lambda(t)\sqrt{\omega^-(t)}, \quad t \in L, \tag{5.61}$$

其中 $\lambda(t) \in H, \neq 0$.

令

$$\Psi_1(z) = \omega(z)\Psi(z) = \Pi(z)\omega(z)\Omega(z), \tag{5.62}$$

因而

$$\Psi_1(z) = \Pi(z)\Phi_1(z)^2, \tag{5.63}$$

其中 $\Phi_1(z)$ 在 S 中全纯，在 $z=\infty$ 处至多为 $r-m$ 阶. 现在我们可以写

$$\sqrt{\Psi(z)} = \frac{\sqrt{\Pi(z)}}{\sqrt{\omega(z)}}\Phi_1(z) \tag{5.64}$$

以及

$$\sqrt{\Psi^\pm(t)} = \frac{\sqrt{\Pi(t)}}{\sqrt{\omega^\pm(t)}}\Phi_1^\pm(t). \tag{5.65}$$

由(5.65)和(5.61)，条件(5.51)成为

$$\Phi_1^+(t) = G_1(t)\,\Phi_1^-(t) + g_1(t), \tag{5.66}$$

这里已令

$$G_1(t) = \lambda(t)G(t), \quad g_1(t) = \frac{g(t)\sqrt{\omega^+(t)}}{\sqrt{\Pi(t)}}.$$

当 R_{r-m} 问题(5.66)在 h_0 类中求解后，相应的 $\widetilde{\mathrm{R}}_K$ 问题(5.61)在 h_0 类中的解就可由(5.64)或即(5.65)给出，当然可能还要有补充的可解条件以保证 $\sqrt{\Psi(z)}$ 包括 $\sqrt{\Psi^\pm(t)}$ 在 L 的端点 a 和 b 附近有不到 1 阶的奇异性.

下面我们举出几个对于不同 $\omega(z)$ 的例子.

例 1 取 $\omega(z) = z-c$, $c \in L\setminus\{a,b\}$，且区域被光滑曲线 Γ_c 剖开：Γ_c 从 c 点出发，连续地延伸到无穷远点，且除 c 点外不再与 L 相交(在后面的例子中，同样地定义 Γ_a 与 Γ_b). 取 $\sqrt{\omega(z)} = \sqrt{z-c}$ 为剖开的区域 $S\setminus\Gamma_c$ 中的任一连续分支，则有

$$\sqrt{\omega^+(t)} = \sqrt{\omega^-(t)}\ (\text{记为}\sqrt{\omega(t)}), \quad t \in L, \tag{5.67}$$

亦即，在本例中，$\lambda(t)=1$, $G_1(t)=G(t)$.

这样，在本例中，$G_1(t)=G(t)$ 的典则函数 $X(z)$ 和指标 κ 均不变，R_{r-m} 问题(6.66)仍应在 h_0 类中求解. 此外，在求得 $\Phi_1(z)$ 后，由(5.64)与(5.65)，还应补充要求

$$\Phi_1(z) = O(|z-c|^{\frac{1}{2}}) \quad (z \to c), \tag{5.68}$$

且

$$\Phi_1^{\pm}(t) = O(|t-c|^{\frac{1}{2}}), \quad t \in L \ (t \to c). \tag{5.69}$$

k 仍由(5.55) 定义. 考虑以下诸情况：

（i） $k = \kappa + r - m \geqslant 0$. 这时，$\mathrm{R}_{r-m}$ 问题(5.66) 在 h_0 类中有一般解

$$\Phi_1(z) = X(z)[(z-c)P_{k-1}(z) + C + F_1(z)], \tag{5.70}$$

其中

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\sqrt{\tau - c}\, g(\tau)}{\sqrt{\Pi(\tau)}\, X^+(\tau)(\tau - z)} \mathrm{d}\tau, \tag{5.71}$$

$P_{k-1}(z)$ 为 $k-1$ 次任意多项式($P_{-1}(z) \equiv 0$)，而 C 为一任意常数.

为要(5.68) 满足，必须

$$C = -F_1(c). \tag{$*$}$$

此条件还是充分的. 实际上，由直接计算可知，

$$\begin{aligned} F_1(z) + C &= F_1(z) - F_1(c) \\ &= \frac{z-c}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(\tau)\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\tau - c}\sqrt{\Pi(\tau)}\, X^+(\tau)(\tau - z)} \\ &= O(|z-c|^{\frac{1}{2}}), \end{aligned} \tag{5.72}$$

因为上式中的积分在 $z=c$ 处至多有 1/2 阶的奇异性(这一点由 4.1.3 段中的结果自明)；且当(5.72) 中的 z 换为 $t \in L \setminus \{a,b\}$ 时它也成立(由 4.1.4 段中的结果). 于是，条件(5.69) 也就满足，因为

$$\begin{aligned} F_1^{\pm}(t) &= \pm \frac{\sqrt{t-c}\, g(t)}{\sqrt{\Pi(t)}\, X^+(t)} + F_1(t) \\ &= F_1(t) + O(|t-z|^{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \tag{5.73}$$

所以，由(5.70) 和(5.64) 知，

$$\begin{aligned} \sqrt{\Psi(z)} = \sqrt{z-c}\sqrt{\Pi(z)}X(z)\Big[& P_{k-1}(z) \\ & + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(\tau)\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\tau - c}\sqrt{\Pi(\tau)}\, X^+(\tau)(\tau - z)}\Big] \end{aligned}$$

或即

$$\sqrt{\Psi(z)} = \sqrt{\Pi_1(z)}X(z)[P_{k-1}(z) + F^*(z)], \tag{5.74}$$

其中

$$F^*(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{g(\tau)\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\Pi_1(\tau)}\, X^+(\tau)(\tau - z)}, \tag{5.75}$$

$$\Pi_1(z) = (z-c)\Pi(z), \tag{5.76}$$

且已取定

$$\sqrt{\Pi_1(z)} = \sqrt{z-c}\sqrt{\Pi(z)}.$$

（ⅱ） $k=-1$. 这时，(5.70) 成为

$$\Phi_1(z) = X(z)F_1(z),$$

而条件(5.68) 或(*) 成为 $F_1(c)=0$. 于是我们的问题有唯一解

$$\sqrt{\Psi(z)} = \sqrt{\Pi_1(z)}X(z)F^*(z) \tag{5.77}$$

当且仅当下一条件满足：

$$\int_L \frac{g(\tau)}{\sqrt{\Pi_1(\tau)}\,X^+(\tau)}\mathrm{d}\tau = 0. \tag{5.78}$$

（ⅲ） $k<-1$. 显然，我们的问题有(唯一) 解(5.77) 的可解条件为

$$\int_L \frac{t^j\sqrt{t-c}\,g(t)}{\sqrt{\Pi_1(t)}\,X^+(t)}\mathrm{d}t = 0, \quad j=0,1,\cdots,-k-2, \tag{5.79}$$

以及(5.78)；且易见(5.79) 与(5.78) 可统一写成

$$\int_L \frac{t^j g(t)}{\sqrt{\Pi_1(t)}\,X^+(t)}\mathrm{d}t = 0, \quad j=0,1,\cdots,-k-1. \tag{5.80}$$

例 2 取 $\omega(z)=z-a$，S 被曲线 Γ_a 剖开，并取定 $\sqrt{\omega(z)}$ 在区域 $S\backslash\Gamma_a$ 中的一连续分支. 于是仍有(5.67)，即仍有 $\lambda(t)=1$，$G_1(t)=G(t)$，典则函数 $X(z)$ 和指标 κ 仍同前，仍要求 R_{r-m} 问题(5.66) 在 h_0 类中的解. 由一般理论，这时

$$\left.\begin{aligned} X(z) &= \frac{\chi_a(z)}{(z-a)^\nu} = O(|z-a|^{-\nu}), \\ X^\pm(t) &= \frac{\chi_a^\pm(t)}{(t-a)^\nu} = O(|t-a|^{-\nu}), \end{aligned}\right\} \quad 0\leqslant\nu<1, \tag{5.81}$$

其中 $\chi_a(z)$ 与 $1/\chi_a(z)$ (包括 $\chi_a^\pm(t)$ 与 $1/\chi_a^\pm(t)$) 在 $N_a\backslash L$ 中有界且 $\neq 0$，这里 N_a 为 a 点的一邻域.

1° 如果 $0\leqslant\nu<\frac{1}{2}$，则由(5.71) 给出的 $F_1(z)$ 在 $z=a$ 附近有界，且

$$\frac{X(z)}{\sqrt{z-a}} = O(|z-a|^{-(\nu+\frac{1}{2})}).$$

（ⅰ） 当 $k\geqslant-1$ 时，我们的问题有解

$$\sqrt{\Psi(z)} = \frac{\Phi_1(z)\sqrt{\Pi(z)}}{\sqrt{z-a}} = \frac{X(z)}{\sqrt{z-a}}\sqrt{\Pi(z)}[P_k(z)+F_1(z)], \tag{5.82}$$

其中

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\sqrt{\tau-a}\,g(\tau)}{\sqrt{\Pi(\tau)}\,X^+(\tau)(\tau-z)}\mathrm{d}\tau. \tag{5.83}$$

易于验证$\sqrt{\Psi(z)} \in h_0$.

（ⅱ） 当$k < -1$时，我们的问题当且仅当

$$\int_L \frac{t^j \sqrt{t-a} g(t)}{\sqrt{\Pi(t)}\, X^+(t)} \mathrm{d}t = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, -k-1 \tag{5.84}$$

满足时有(唯一) 解(5.82) ($P_k(z) \equiv 0$).

2° 如果$\frac{1}{2} \leqslant \nu < 1$亦即$\nu = \frac{1}{2} + \varepsilon$ $(0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2})$，则$\frac{X(z)}{\sqrt{z-a}} = O(|z-a|^{-(1+\varepsilon)})$，而

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\sqrt{\tau - a}\, g(\tau)}{\sqrt{\Pi(\tau)} (\tau - a)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \chi_a^+(\tau)(\tau - z)} \mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{(\tau - a)^{1+\varepsilon} g(\tau)}{\sqrt{\Pi(\tau)} \chi_a^+(\tau)(\tau - z)} \mathrm{d}\tau. \tag{5.85}$$

（ⅰ） 当$k \geqslant 0$时，由(5.82),可以写

$$\sqrt{\Psi(z)} = \frac{X(z)\sqrt{\Pi(z)}}{\sqrt{z-a}} = [(z-a)P_{k-1}(z) + C + F_1(z)].$$

为要$\Psi(z) \in h_0$，必须要求(*)满足:$C = -F_1(a)$. 所以

$$C + F_1(z) = F_1(z) - F_1(a)$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{(\tau - a)^{1+\varepsilon} g(\tau)}{\sqrt{\Pi(\tau)} \chi_a^+(\tau)(\tau - z)} \mathrm{d}\tau - F_1(a)$$

$$= \frac{z-a}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{(\tau - a)^{1+\varepsilon} g(\tau)}{\sqrt{\Pi(\tau)} \chi_a^+(\tau)(\tau - z)} \mathrm{d}\tau.$$

于是，

$$\sqrt{\Psi(z)} = \sqrt{z-a}\, X(z)\sqrt{\Pi(\tau)} \left[P_{k-1}(z) + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{(\tau - a)^{\varepsilon} g(\tau) \mathrm{d}\tau}{\sqrt{\Pi(\tau)} \chi_a^+(\tau)(\tau - z)} \right], \tag{5.86}$$

这就是在这一情况下我们问题的一般解(当$k = 0$时$P_{k-1}(z) \equiv 0$，它还是唯一解).

（ⅱ） 当$k = -1$时，条件(*)成为$F_1(a) = 0$，即

$$\int_L \frac{(t-a)^{\varepsilon} g(t)}{\sqrt{\Pi(t)} \chi_a^+(t)} \mathrm{d}t = 0. \tag{5.87}$$

当此条件满足时，我们的问题有唯一解

$$\sqrt{\Psi(z)} = \frac{X(z)\sqrt{\Pi(z)}}{\sqrt{z-a}} F_1(z), \tag{5.88}$$

其中 $F_1(z)$ 由(5.85)给出.

(ⅲ) 当 $k<-1$ 时，当且仅当

$$\int_L \frac{t^j(t-a)^{1+\varepsilon}g(t)}{\sqrt{\Pi(t)}\,\chi_a(t)}\mathrm{d}t=0,\quad j=0,1,\cdots,-k-2, \tag{5.89}$$

以及(5.87)满足时，问题有唯一解(5.88). 不难验证，(5.89)与(5.87)可统一写成

$$\int_L \frac{t^j(t-a)^{\varepsilon}g(t)}{\sqrt{\Pi(t)}\,\chi_a^+(t)}\mathrm{d}t=0,\quad j=0,1,\cdots,-k-1. \tag{5.90}$$

例 3 仍取 $\omega(z)=z-a$，但 S 被曲线 Γ_b 剖开，并取 $\sqrt{z-a}$ 为其中一连续分支，因而

$$\sqrt{\omega^+(t)}=-\sqrt{\omega^-(t)}, \tag{5.91}$$

亦即 $\lambda(t)=-1$, $G_1(t)=-G(t)$, $G_1(t)$ 在 h_0 类中的典则函数和指标仍分别记为 $X(z)$ 和 κ. 以后的讨论与例 2 类似，从略.

例 4 取 $\omega(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}$，且 S 用 Γ_a 剖开. 取 $\sqrt{\omega(z)}=\sqrt[4]{(z-a)(z-b)}$ 为 $S\backslash\Gamma_a$ 中的一连续分支，于是

$$\sqrt{\omega^+(t)}=-\mathrm{i}\sqrt{\omega^-(t)}, \tag{5.92}$$

亦即 $\lambda(t)=-\mathrm{i}$, $G_1(t)=-\mathrm{i}G(t)$. 后面的讨论也类似，从略.

更一般，可以取

$$\omega(z)=[(z-a)^\alpha(z-b)^\beta]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\quad(\alpha,\beta>0),$$

且

$$\sqrt{\omega(z)}=[(z-a)^\alpha(z-b)^\beta]^{\frac{1}{2(\alpha+\beta)}}$$

为剖开的区域 $S\backslash\Gamma_b$ 或 $S\backslash\Gamma_a$ 中的一连续分支，则有

$$\lambda(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\pi\mathrm{i}}\ \text{或}\ \lambda(t)=\mathrm{e}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}\pi\mathrm{i}}.$$

对我们的问题作几点说明：

1. 当问题中的 h_0 类换成类 h_a, h_b 或 h_{ab} 时，以上的解法仍有效.

2. 在我们的解法中，可以任意选取数 N 和 $c_1, c_2, \cdots, c_N$ 以及 $\omega(z)$. 在选取不同的 $\omega(z)$ 及其不同分支 $\sqrt{\omega(z)}$ 时，所求得的解可能重复出现.

3. 当 L 是汇交于一点的若干弧段(但不构成封闭的曲线)时，所述方法仍有效；但若 L 是由多个互不相交的弧段组成时，以上解法无效，因为对多连通区域解析函数的单值化定理(参看[102])不成立.

注 如果在(5.51)中的 $\sqrt{\Psi^{\pm}(t)}$ 改为 $\sqrt[p]{\Psi^{\pm}(t)}$ $(p>2)$，情况要复杂些，但这里所述解法的基本思想仍有效，参看[103].

7.6 解具高阶奇异性的 Riemann 边值问题及其应用

7.6.1 解具高阶奇异性的 Riemann 边值问题

经典的 Riemann 边值问题局限于其解没有或者只有不到 1 阶的奇异性. 现在我们讨论解可具有高阶奇异性的情况(见[104]).

现设 L 如同 4.2.2 段中所述，为方便起见，今复述如下(但记号有所变更)：$L=\sum_k l_k$ 为复平面中一组互不相交的光滑弧 $l_k=\widehat{a_kb_k}$(取定自 a_k 至 b_k 为正向)之并，各 l_k 中可能有些相同的端点，也不排斥某 l_k $(a_k=b_k)$ 或某些 l_k 构成封闭曲线(这时它们的正向要取得使复平面分成正侧区域 S^+ 和负侧区域 S^-，不一定连通，且 $z=\infty$ 在 S^- 中). 设 L 的所有不同端点为 $c_1,c_2,\cdots,c_N$，称为 L 的节点.

设 $G(t)$ $(\neq 0)$ 与 $g(t)$ 定义在 L 上；对 $t\in l_k$，$G(t)=G_k(t)$，$g(t)=g_k(t)$ 皆 $\in H$；但若一点 c 是某些 c_k 的公共端点，则 $G_k(c)$ 以及 $g_k(c)$ 可以分别有不同的值. 我们来求解正则型 Riemann 边值问题

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L,\tag{6.1}$$

未知函数 $\Phi(z)$ 在全平面被 L 剖开后的区域中(分片)全纯，在 $t\in L$ 上除 $t=c_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 外，有连续的边值 $\Phi^{\pm}(t)$，且 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处为有限阶；但 $\Phi(z)$ 在各节点 c_j 处可以有更一般的高阶，如下所述.

我们称 $\Phi(z)$ 在某一节点 c 处几乎有 K 阶(K 为一非负整数)，如果 $\Phi(z)(z-c)^K$ 在 c 处几乎有界. (6.1) 的一个解称为在 K_N 类中，这里 $N=(N_1,N_2,\cdots,N_n)$ (每一 N_j 为非负整数)，如果在节点 c_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 处几乎为 N_j 阶. 我们要求在事先指定的 K_N 类中求解(6.1).

暂时对(6.1) 的解 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶除有限外，不加限制.

先在 K_0 类(即 $N=(0,0,\cdots,0)$) 中求解. 这个类实际上就是 4.4.2 段中讨论过的最窄的类. 我们重述一下结果(注意，解在 $z=\infty$ 处的阶除要求有限外未加限制). 在任一节点 c 处，令

$$\alpha_c+i\beta_c=\sum_{c\in l_k}\frac{\varepsilon_k}{2\pi i}\log G_k(c),\tag{6.2}$$

其中 $\log G_k(t)$ 是 l_k 上的任一连续分支，$\varepsilon_k=-1$ 或 $+1$ 分别按 $c_k=a_k$ 或 b_k

而定. 记α_j的整数部分(即不超过α_j的最大整数)为$[\alpha_j]$，而$\{\alpha_j\}=\alpha_j-[\alpha_j]$为其分数部分或称尾数$(0\leqslant\{\alpha_j\}<1)$. 记

$$\kappa_0=\sum_{j=1}^{n}[\alpha_j], \tag{6.3}$$

称之为$G(t)$或问题(6.1)在K_0类中的指标. 令

$$\chi(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\log G(t)}{t-z}\mathrm{d}t\right\},\quad z\overline{\in}L, \tag{6.4}$$

因而$\chi(\infty)\neq 0$且有限，并令

$$X_0(z)=\frac{\chi(z)}{\Pi_{[\alpha]}(z)}, \tag{6.5}$$

其中

$$\Pi_{[\alpha]}(z)=(z-c_1)^{[\alpha_1]}(z-c_2)^{[\alpha_2]}\cdots(z-c_n)^{[\alpha_n]}. \tag{6.6}$$

$X_0(z)$称为$G(t)$或问题(6.1)在K_0类中的典则函数. 它在$z=\infty$处的阶为$-\kappa_0$. 易见，在$z=c_j$附近，

$$X_0(z)=|z-\alpha_j|^{\{\alpha_j\}}\chi_j(z),\quad j=1,2,\cdots,n, \tag{6.7}$$

其中$\chi_j(z)$与$1/\chi_j(z)$(及其在L上的正、负侧边值)在c_j附近均有界. 根据4.2.2段中结果，我们有

定理6.7.1 问题(6.1)在K_0类中的一般解(在$z=\infty$处的阶有限但未指定)为

$$\Phi(z)=X_0(z)\left[P(z)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(t)}{X_0^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t\right],\quad z\overline{\in}L, \tag{6.8}$$

其中$P(z)$为任意多项式.

按4.2.2段中所述，节点c_j称为普通节点或特异节点由$\{\alpha_j\}\neq 0$或$=0$而定. 于是有

推论6.7.1 问题(6.1)在K_0类中的任何解，在普通节点处实际上有界，在特异节点c_j处当且仅当

$$\sum_{c_j\in l_k}c_kg_k(c_j)=0 \tag{6.9}$$

满足时有界.

类K_0实际上就是4.2.2段中所说的最窄的类$h(c_1,c_2,\cdots,c_m)$，其中c_1，$c_2,\cdots,c_m$为所有的普通节点.

现在来考虑问题(6.1)在K_N类中的解(在$z=\infty$处其阶仍未限定)，其

中 $N=(N_1,N_2,\cdots,N_n)$ 为任意取定了的. 记

$$\Pi_N(z)=(z-c_1)^{N_1}(z-c_2)^{N_2}\cdots(z-c_n)^{N_n}. \tag{6.10}$$

在(6.1)的两边同乘以 $\Pi_N(t)$，并令 $\Phi_N(z)=\Pi_N(z)\Phi(z)$ 为新的未知函数，于是求(6.1)在 K_N 类中的解就等价于求

$$\Phi_N^+(t)=G(t)\Phi_N^-(t)+g_N(t),\quad t\in L, \tag{6.11}$$

在 K_0 类中的解，其中 $g_N(t)=\Pi_N(t)g(t)$. 由定理 6.7.1，易见有

定理 6.7.2 问题(6.1)在 K_N 类中的一般解(在 $z=\infty$ 处的阶数未限定)为

$$\Phi(z)=X_N(z)\left[P(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)}{X_N^+(t)(t-z)}dt\right],\quad z\overline{\in}L, \tag{6.12}$$

其中

$$X_N(z)=\frac{X_0(z)}{\Pi_N(z)}. \tag{6.13}$$

$X_N(z)$ 称为 $G(t)$ 或问题(6.1)在 K_N 类中的典则函数. 由(6.5)，

$$X_N(z)=\frac{\chi(z)}{\Pi_N(z)\Pi_{[\alpha]}(z)}, \tag{6.14}$$

所以它在 $z=\infty$ 处有阶 $-\kappa_N=-(\kappa_0+|N|)$，其中 $|N|=\sum_{j=1}^{n}N_j$. 整数 $\kappa_N=\kappa_0+|N|$ 称为 $G(t)$ 或问题(6.1)在 K_N 类中的指标. 在节点 c_j 处，由(6.7)，

$$X_N(z)=|z-c_j|^{\{\alpha_j\}-N_j}\chi_j^*(z), \tag{6.15}$$

其中 $\chi_j^*(z)$ 与 $1/\chi_j^*(z)$ 及其边值在 c_j 附近均有界.

在任何 $N_j=0$ 的节点 c_j 处，$\Phi(z)$ 的性质同前. 考虑任何 $N_j\geqslant 1$ 的节点 c_j，由(6.15)，$X_N(z)$ 在此处的阶为 $N_j-\{\alpha_j\}$；由(6.12)，$\Phi(z)$ 也是如此，因为这时式中的积分在 $t=c_j$ 处是有限的. 因此我们得到

推论 6.7.2 在任何 $N_j\geqslant 1$ 的节点 c_j 处，问题(6.1)在 K_N 类中的解有不到 N_j 阶的奇异性，如果 c_j 是一普通节点；有(至多) N_j 阶奇异性，如果 c_j 是一特异节点.

在 4.2.2 段中定义的"最宽"的 h_0 类(但解在 $z=\infty$ 处的阶数可任意而未定)实际上就是 K_N 类，其中 $N_j=1$ 或 0 分别视 c_j 为普通节点或特异节点而定.

显然，对于 R_r 问题(6.1)在 K_N 类中求解时(其中 r 为事先指定的一整数)，亦即要求 K_N 类中的解在 $z=\infty$ 处至多为 r 阶时，我们有：

1° 当$\kappa_N+r\geqslant 0$时，一般解为

$$\Phi(z)=X_N(z)\left[P_{\kappa_N+r}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)}{X_N^+(t)(t-z)}dt\right],\quad z\overline{\in}L,\tag{6.16}$$

其中$P_{\kappa_N+r}(z)$为κ_N+r次任意多项式.

2° 当$\kappa_N+r=-1$时，有唯一解

$$\Phi(z)=\frac{X_N(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)}{X_N^+(t)(t-z)}dt.\tag{6.17}$$

3° 当$\kappa_N+r<-1$时，当且仅当条件

$$\int_L\frac{t^kg(t)}{X_N^+(t)}dt=0,\quad k=0,1,\cdots,\kappa_N+r-2,\tag{6.18}$$

满足时有唯一解(6.17).

总之，R_r问题(6.1)在K_N类中的一般解有广义自由度κ_N+r-1.

下面我们将上述结果进一步推广到(6.1)中的自由项$g(t)$在节点处也有高阶奇异性的情况，例如

$$g(t)=\frac{g^*(t)}{\Pi_v(t)},\quad v=(v_1,v_2,\cdots,v_n),\ t\in L,\tag{6.19}$$

而$g^*(t)$在每一弧l_k上$\in H$，其中

$$\Pi_v(t)=(t-c_1)^{v_1}(t-c_2)^{v_2}\cdots(t-c_n)^{v_n}\quad(v_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n),\tag{6.20}$$

这里$(t-c_j)^{v_j}$(如果v_j不是整数)已在L上取定一连续分支，又暂设解在$z=\infty$处的阶数未定.

记N_j为任一确定的、不小于v_j的整数：$N_j\geqslant v_j$. 我们要在这一情况下求(6.1)在$K_N=(N_1,N_2,\cdots,N_n)$类中的解. 这实际上要在K_0类中求解

$$\Phi_N^+(t)=G(t)\Phi_N^-(t)+g_N^*(t),\quad t\in L,\tag{6.21}$$

其中$\Phi_N(z)=\Pi_N(z)\Phi(z)$,

$$g_N^*(t)=\Pi_{N-v}(t)g^*(t),\tag{6.22}$$

这里

$$\Pi_{N-v}(t)=\frac{\Pi_N(t)}{\Pi_v(t)}=(t-c_1)^{N_1-v_1}(t-c_2)^{N_2-v_2}\cdots(t-c_n)^{N_n-v_n}.\tag{6.23}$$

显然，在每一v_j为分数($v_j<N_j$)的节点c_j处，$g_N^*(c_j)=0$.

我们所要求的解仍由(6.12)给出，亦即

$$\Phi(z)=\frac{X_0(z)}{\Pi_N(z)}[P(z)+F(z)],\tag{6.24}$$

这里已令

$$F(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\Pi_{N-v}(t)g^*(t)}{X_0^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t. \tag{6.25}$$

下面我们将只考虑在应用中常见的情况：每一 N_j 为不小于 v_j 的最小整数：$N_j-1<v_j\leqslant N_j\ (j=1,2,\cdots,n)$. 首先注意：在 $z=c_j$ 的邻域中，

$$\frac{X_0(z)}{\Pi_N(z)}=O(|z-c_j|^{\{\alpha_j\}-N_j}), \tag{6.26}$$

$$\frac{\Pi_{N-v}(t)}{X_0^+(t)}=O(|t-c_j|^{N_j-v_j-\{\alpha_j\}}). \tag{6.27}$$

我们来分析，在一固定的、具有 $v_j>0$ 的节点 c_j 处解 $\Phi(z)$ 的性质. 分别考虑下列情况：

1° $N_j-v_j<\{\alpha_j\}$. 这时，因为 $\{\alpha_j\}>N_j-v_j\geqslant 0$,

$$F(z)=O(|z-c_j|^{N_j-v_j-\{\alpha_j\}});$$

结合(6.26)，可以看出 $\Phi(z)$ 在 c_j 处有 v_j 阶的奇异性.

2° $N_j-v_j=\{\alpha_j\}$. 这时，$\Pi_{N-v}(t)/X_0^+(t)$ 在 c_j 附近有界，所以 $\Phi(z)$ 在该点有几乎 $N_j-\{\alpha_j\}=v_j$ 阶.

3° $N_j-v_j>\{\alpha_j\}$. 这时，$t=c_j$ 是 $\Pi_{N-v}(t)$ 的一零点且 $F(c_j)$ 有限. 所以，由(6.26)，$\Phi(z)$ 在 c_j 处有 $N_j-\{\alpha_j\}(>v_j)$ 阶的奇异性.

在实用中，对于这里考虑的问题，自然地要求所得的解在 c_j 处至多为 $N_j-\alpha_j$ 阶；这在情况 1° 与 2° 中是满足的. 在情况 3° 下，为了达到我们的要求，必须在(6.24) 中，

$$P(c_j)=-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\Pi_{N-v}(t)g^*(t)}{X_0^+(t)(t-c_j)}\mathrm{d}t\ (=-F(c_j)). \tag{6.28}$$

我们来证明：为了我们的目的，这一条件也是充分的. 实际上，记

$$\left.\begin{aligned} F_{\mathrm{I}}(z)&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_j} \frac{\Pi_{N-v}(t)g^*(t)}{X_0^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t,\\ F_{\mathrm{II}}(z)&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L\setminus L_j} \frac{\Pi_{N-v}(t)g^*(t)}{X_0^+(t)(t-z)}\mathrm{d}t,\end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

其中 L_j 是 L 中以 c_j 为端点的所有弧段之并. 注意，$\Pi_{N-v}(t)/X_0^+(t)$ 在 $t=c_j$ 处有 $N_j-v_j-\{\alpha_j\}<1$ 的阶，得知

$$F_{\mathrm{I}}(z)-F_{\mathrm{I}}(\alpha_j)=O(|z-c_j|^{N_j-v_j-\{\alpha_j\}}),$$

而 $F_{\mathrm{II}}(z)$ 在 $z=c_j$ 处全纯，因此 $F_{\mathrm{II}}(z)-F_{\mathrm{II}}(c_j)=O(|z-c_j|)$. 所以

$$\begin{aligned} F(z)-F(c_j)&=[F_{\mathrm{I}}(z)-F_{\mathrm{I}}(c_j)]+[F_{\mathrm{II}}(z)-F_{\mathrm{II}}(c_j)]\\ &=O(|z-c_j|^{N_j-v_j-\{\alpha_j\}}). \end{aligned} \tag{6.30}$$

我们可以写

$$\Phi(z)=\frac{X_0(z)}{\Pi_N(z)}[P(z)-P(c_j)+F(z)-F(c_j)].$$

注意 $P(z)-P(c_j)=O(|z-c_j|)$，由(6.30)可以看出 $\Phi(z)=O(|z-c_j|^{v_j})$，如所预期.

如果共有 m 个节点 c_j，$j=1,2,\cdots,m$，使得 $N_j-v_j>\{\alpha_j\}$，则我们期望所求解在各 c_j 处有 v_j 阶. 不难确证，所求的 K_N 类中的解可以表示为

$$\Phi(z)=\frac{X_0(z)}{\Pi_N(z)}[(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_m)P(z)+Q_{m-1}(z)+F(z)],\tag{6.31}$$

其中 $P(z)$ 为任意多项式，而 $Q_{m-1}(z)$ 是满足条件 $Q_{m-1}(c_j)=-F(c_j)$，$j=1,2,\cdots,m$ 的插值多项式.

如果还要求 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处(至多)为 r 阶，即在 K_N 类中求解相应 R_r 问题，则易见可得下述结果(其证明明显，从略)：

(i) 当 $\kappa_N+r\geqslant m$ 时，所求的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X_0(z)}{\Pi_N(z)}[(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_m)P_{\kappa_N+r-m}(z)+Q_{m-1}(z)+F(z)],\tag{6.32}$$

其中 $P_{\kappa_N+r-m}(z)$ 为 κ_N+r-m 次任意多项式.

(ii) 当 $\kappa_N+r=m-1$ 时，它有唯一解

$$\Phi(z)=\frac{X_0(z)}{\Pi_N(z)}[Q_{m-1}(z)+F(z)].\tag{6.33}$$

(iii) 当 $0\leqslant\kappa_N+r<m-1$ 时，它有(唯一)解

$$\Phi(z)=\frac{X_0(z)}{\Pi_N(z)}[P_{\kappa_N+r}(z)+F(z)]\tag{6.34}$$

当且仅当 $P_{\kappa_N+r}(z)$ 是满足条件

$$P_{\kappa_N+r}(c_j)=-F(c_j),\quad j=1,2,\cdots,m\tag{6.35}$$

的 κ_N+r 次多项式(当然要这些条件相容).

(iv) 当 $\kappa_N+r\leqslant-1$ 时，它有(唯一)解

$$\Phi(z)=\frac{X_0(z)}{\Pi_N(z)}F(z)\tag{6.36}$$

当且仅当条件

$$\int_L\frac{t^k\Pi_{N-v}(t)g^*(t)}{X_0^+(t)}\mathrm{d}t=0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa_N-r-2\tag{6.37}$$

($\kappa_N+r=-1$ 时此条件消失) 以及

$$F(c_j)=0,\quad j=1,2,\cdots,m\tag{6.38}$$

均满足.

总之，所述问题解的广义自由度为 $\kappa_N + r - m + 1$.

7.6.2 应用于求解具一阶奇异性的特征奇异积分方程

作为上段结果的一应用，我们再来考虑在 5.4.3 段中讨论过的特征奇异积分方程

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = f(t), \quad t \in L. \tag{6.39}$$

为简明计，设其中 L 是一组互不相交的光滑曲线，并已适当取定正向使复平面分成若干区域，在 L 正侧和负侧的区域之并分别记为 S^+ 和 S^-，且 $z = \infty \in S^-$；并设 $a(t) \pm b(t) \in H$ 于 L 上，$\neq 0$（正则型），又 $f(t) \in H_1^*(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，亦即

$$f(t) = \frac{f_0(t)}{\Pi(t)}, \quad f_0(t) \in H, \tag{6.40}$$

其中 $\Pi(t)(=\Pi_1(t)) = (t-c_1)(t-c_2)\cdots(t-c_n)$. 如(6.20)定义，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为 L 的节点，而未知函数也要求在 $H_1^*(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 类中.

方程(6.39)的求解方法在 5.4.3 段中已讲过，但用本段的解法要简洁得多，并且很自然.

如果 $\varphi(t)$ 是它这样的一个解，与通常一样，令

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau, \quad z \overline{\in} L, \tag{6.41}$$

于是

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad t \in L, \tag{6.42}$$

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t), \quad t \in L. \tag{6.43}$$

将(6.42)与(6.43)代入(6.39)，可以看出：$\Phi(z)$ 是 R_{-1} 问题(6.1)在 $K_1 = K(1,1,\cdots,1)$ 类中的解，其中

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}, \quad t \in L. \tag{6.44}$$

此外易见，即使 $\varphi(t) \in H_1^*(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，$\Phi^+(t) + \Phi^-(t)$ 在每个节点 $c_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 处的阶均小于 1.

我们将证明其逆也成立. 亦即要证明：如果 $\Phi(z)$ 是 R_{-1} 问题(6.1)在 K_1 类中的解，且 $\Phi^+(t) + \Phi^-(t)$ 在每一 c_j 处均有不到 1 阶的奇异性，则由(6.42)给出的 $\varphi(t)$ 就是方程(6.39)在 $H_1^*(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 类中的一个解. 这只要证实(6.41)从而(6.42)成立即可. 定义

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\overline{\in}L,$$

只要证明 $\Psi(z)=\Phi(z)$ 就够了. 现在，$\varphi(t)=\Psi^+(t)-\Psi^-(t)$，而

$$\Psi^+(t)+\Psi^-(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

在每一 c_j 处有不到 1 阶的奇异性. 由(6.42) 知，

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\Psi^+(t)-\Psi^-(t),\quad t\in L'=L\setminus\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}.$$

令 $\Omega(z)=\Psi(z)-\Phi(z)$，可以看出$\Omega^+(t)=\Omega^-(t)$，$t\in L'$，且$\Omega^\pm(t)$ 在每一 c_j 处均有不到 1 阶的奇异性，又 $\Omega(\infty)=0$，故由推广的 Liouville 定理知，$\Omega(z)$ 必然是一有理函数：

$$\Omega(z)=\frac{Q_{n-1}(z)}{\Pi(z)},$$

其中 $Q_{n-1}(z)$ 为某一(至多) $n-1$ 次多项式. 所以

$$[\Psi^+(t)+\Psi^-(t)]-[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]=\frac{2Q_{n-1}(t)}{\Pi(t)}.$$

但由假设，此式左端在每一 c_j 处有不到 1 阶的奇异性，可见必然 $Q_{n-1}(z)=0$，亦即 $\Psi(z)=\Phi(z)$.

这样，我们有

定理6.7.3 方程(6.39) 可解当且仅当 R_{-1} 问题(6.1) 在 K_1 中可解且补充要求$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)$ 在每一节点 $c_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 处具有不到 1 阶的奇异性；这时解由(6.42) 给出.

R_{-1} 问题(6.1) 在 K_1 类中的解 $\Phi(z)=\Phi_0(z)/\Pi(z)$ 显然等价于 R_{n-1} 问题

$$\Phi_0^+(t)=G(t)\Phi_0^-(t)+\frac{f_0(t)}{a(t)+b(t)},\quad t\in L,\tag{6.45}$$

在 K_0 类(这时节点 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 消失了) 中的解，而补充要求成为

$$\Phi_0^+(c_j)+\Phi_0^-(c_j)=0,\quad j=1,2,\cdots,n.\tag{6.46}$$

记 $G(t)$ (由(6.44) 给出) 在 K_0 类中的典则函数与指标分别为 $X_0(z)$ 与 κ_0. 于是，由一般理论，当 κ_0+n-1 为非负时，R_{n-1} 问题(6.45) 在 K_0 类中的一般解为

$$\Phi_0(z)=X_0(z)\left[-\frac{1}{2}P_{\kappa_0+n-1}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f_0(\tau)}{Z(\tau)(\tau-z)}d\tau\right],\quad z\overline{\in}L,\tag{6.47}$$

其中 $Z(t)$ 是由下式定义的标准函数：

$$Z(t)=[a(t)+b(t)]X_0^+(t)=[a(t)-b(t)]X_0^-(t), \quad (6.48)$$

而 $P_{\kappa_0+n-1}(z)$ 为 κ_0+n-1 次任意多项式；当 κ_0+n-1 是负数时，此问题当且仅当下列条件满足时有(唯一)解(6.47)（$P_{\kappa_0+n-1}(z)\equiv 0$）：

$$\int_L \frac{t^k f_0(t)}{Z(t)}\mathrm{d}t=0, \quad k=0,1,\cdots,-\kappa_0-n. \quad (6.49)$$

然后，方程(6.39)在 $H_1^*(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 类中的解由 $\varphi(t)=\dfrac{\varphi_0(t)}{\Pi(t)}$ 给出，其中

$$\varphi_0(t)=a^*(t)f_0(t)+b^*(t)Z(t)\left[P_{\kappa_0+n-1}(t)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f_0(\tau)}{Z(\tau)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau\right], \quad (6.50)$$

而

$$a^*(t)=\frac{a(t)}{a(t)^2-b(t)^2}, \quad b^*(t)=\frac{b(t)}{a(t)^2-b(t)^2}.$$

经计算，可以验证

$$\Phi_0^+(t)+\Phi_0^-(t)=-b^*(t)f_0(t)+a^*(t)Z(t)\left[-P_{\kappa_0+n-1}(t)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f_0(\tau)}{Z(\tau)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau\right],$$

而附加要求(6.46)成为

$$a(c_j)Z(c_j)\left[-P_{\kappa_0+n-1}(c_j)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f_0(\tau)}{Z(\tau)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau\right]=b(c_j)f_0(c_j), \quad j=1,2,\cdots,n. \quad (6.46)'$$

这样，我们有：

定理6.7.4 *方程(6.39)在 $H_1^*(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 类中有解 $\varphi(t)=\dfrac{\varphi_0(t)}{\Pi(t)}$，其中 $\varphi_0(t)$ 由(6.50)给出，当且仅当条件(6.49)（$\kappa_0+n\geqslant 1$ 时此条件消失）以及(6.46)′满足时.*

注1 由(6.50)，易见

$$a(t)\varphi_0(t)-f_0(t)=b^*(t)\left\{b(t)f_0(t)+a(t)Z(t)\left[P_{\kappa_0+n-1}(t)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f_0(\tau)}{Z(\tau)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau\right]\right\}, \quad t\in L. \quad (6.51)$$

所以，如对某个 c_j，$b(c_j)\neq 0$，则补充要求(6.46)′对这个 j 等价于

$$a(c_j)\varphi_0(c_j)=f_0(c_j). \quad (6.52)$$

这容易直接从(6.39)得到，只要它是可解的；因而这时 $a(c_j)$ 必须 $\neq 0$. 这就表明，如果至少对某个 c_j，$f(c_j) \neq 0$ 而 $a(c_j) = 0$，则方程(6.39)无解.

注 2 如果对某个 c_j，$f(c_j)$ 与 $a(c_j)$ 皆 $= 0$（从而条件(6.46)$'$对这个 c_j 自动满足），仍可能 $\varphi_0(c_j) \neq 0$. 这就表明，在这种情况下，方程(6.39)的解 $\varphi(t)$ 在 $t = c_j$ 处仍有 1 阶奇异性，即使 $f(t)$ 在该处只有不到 1 阶的奇异性. 例如，考察方程

$$\sqrt{t-1}\varphi(t) + \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\sqrt{t-1}}, \quad t \in L,$$

其中 L 为单位圆周 $|t| = 1$，$\sqrt{t-1}$ 已取定其上一连续分支. 这时唯一的节点为 $t = 1$. 现在 $a(t) = f_0(t) = \sqrt{t-1}$，$b(t) = -1$，它是正则型的. 显然它在 $H_1^*(1)$ 类中有解 $\varphi(t) = \dfrac{1}{t-1}$. 这就表明，方程(6.39)的解的范围比以前考虑的要广. 这就是说，这里的讨论已作了实质性的推广.

注 3 钟寿国在[105]中讨论了方程(6.39)中 L 为整个实轴的情况.

对于奇异积分方程有更高阶奇异性的解的情况（当然，高阶奇异积分要在 1.7.2 段中的意义下），钟寿国（等）有较全面的系统讨论，见[106]～[110].

附录　有关 Fredholm 积分方程的结果

本书中多次用到 Fredholm 积分方程理论中的一些结果. 我们在这里对它们作一简要介绍. 在一般教材中可查到的结果(例如[48],[64]), 就不再加以证明. 这里所有涉及的函数都是复函数.

1. Fredholm 定理

设 L 是一条封闭或开口的光滑曲线. 方程

$$k\varphi \equiv \varphi(t)+\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t),\quad t\in L \tag{1}$$

称为 L 上的**(第二型) Fredholm 方程**, k 称为 **Fredholm 算子**. 这里积分是通常意义下的正常或反常积分; 当 L 为开口的时, t 一般不取端点值. $k(t,\tau)$ 称为方程的**核**. 一般我们已假定

$$k(t,\tau)=\frac{k^*(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}},\quad 0\leqslant\alpha<1, \tag{2}$$

而 $k^*(t,\tau)$ 为 $L\times L$ 上的连续函数. 当 $\alpha>0$ 时, (1) 也称为**弱 Fredholm 方程**, 而 k 称为**弱 Fredholm 算子**. "弱"字有时也省掉.

我们且设未知函数 $\varphi(t)$ 和已知函数 $f(t)$ 都是连续的.

方程

$$k'\psi \equiv \psi(t)+\int_L k(\tau,t)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau=0 \tag{3}$$

称为(1) 的**相联(或伴随) 方程**, 而 k' 称为 k 的**相联算子**.

关于方程(1) 有下列重要结果:

定理 1 (Fredholm 定理)　假设如前, 则有

Ⅰ. $k\varphi=0$ 的(在复系数意义下) 线性无关解的个数必有限;

Ⅱ. $k\varphi=0$ 与 $k'\psi=0$ 的(线性无关) 解的个数必定相等;

Ⅲ. (1) 可解的充要条件是

$$\int_L \psi_k(t)f(t)\mathrm{d}t=0,\quad k=1,2,\cdots,\nu, \tag{4}$$

其中 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_\nu$ 是(3) 的全解系(即完全的线性无关解组).

在一般教材中，上述定理都是在 L 为实轴上的一有限线段情况下证明的；即使L是曲线，积分变量也是用的弧长参数s，而不是位标t. 但很容易证明，对弧长参数的上述定理对位标积分也成立. 我们来说明这一点.

设定理对变量t,τ分别换成其弧长参数s,σ时已成立. 又设$t=t(s)$为曲线的自然方程，这里$t'(s)$连续，且$|t'(s)|=1$. 并记$\tau=t(\sigma)$. 方程(1)可改写为

$$\varphi(s)+\int_L k(s,\sigma)t'(\sigma)\varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma=f(s), \tag{1'}$$

这里已把$\varphi(t)$改写为$\varphi(s)$，等等. 因为$t'(\sigma)$连续，所以定理 1 中结论 Ⅰ 对(1)′ 已知成立，从而对(1) 也成立.

(1)′ 的相联方程应该是

$$\omega(s)+\int_L k(\sigma,s)t'(s)\omega(\sigma)\mathrm{d}\sigma=0. \tag{3'}$$

令 $\psi(s)=\dfrac{\omega(s)}{t'(s)}$ 为新的未知函数，则(3)′ 又可改写为

$$\psi(s)+\int_L k(\sigma,s)\psi(\sigma)t'(\sigma)\mathrm{d}\sigma=0,$$

再回到位标t与τ，这就是(3). 因此定理 1 中结论 Ⅱ 也成立.

注意到(3) 与(3)′ 之间未知函数的关系，用位标写出时为

$$\psi(t)=\frac{\omega(t)}{t'(s)}, \tag{5}$$

由(1)′ 与(3)′ 的相应结论 Ⅲ 可知，(1) 或(1)′ 的可解充要条件是

$$\int_L \omega_k(s)f(s)\mathrm{d}s=0,\quad k=1,2,\cdots,\nu,$$

其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_\nu$ 是(3)′ 的全解系. 但由(5)，这些条件等价于

$$\int_L \psi_k(t)t'(s)f(s)\mathrm{d}s=0,\quad k=1,2,\cdots,\nu,$$

其中 $\psi_k(t)=\dfrac{\omega_k(t)}{t'(s)}$ $(k=1,2,\cdots,\nu)$ 已是(1) 的全解系，这与(4) 全同. 这就是定理 1 的结论 Ⅲ.

注 1 在讨论方程(1) 时，常在其中积分号前面添加一(复) 常数因子λ. 如果对任何$f(t)$，方程可解，则称λ是一个正常值；否则，就称λ是一个**特征值**. 我们这里没有这样做，因为可以认为，λ已被"吸收"到核$k(t,\tau)$中去了. 这时就相当于$\lambda=1$为正常值或特征值.

注 2 定理 1 对方程组情况也成立. 即，认为(1) 中的$f(t),\varphi(t)$都是n

维(列) 向量，$k(t,\tau)$ 为 $n\times n$ 矩阵(所有连续性要求都相应地改为对它们各分量或元的要求). 当然，这时可解条件(4) 现在成为

$$\int_L [\psi_k(t)]' f(t)\mathrm{d}t = 0, \quad k = 1,2,\cdots,\nu, \tag{4$'$}$$

这里 $\psi_k(t)$ 是方程(3) 的解(列) 向量，上角加撇表示其转置(行) 向量.

2. 预解核

由前已知，如果 $\boldsymbol{k}\varphi = 0$ 没有非零解($\boldsymbol{k}'\psi = 0$ 因而也是如此)，则方程(1) 对任何 $f(t)$ 可解，且解是唯一的(所谓**备择性质**). 此解可写成

$$\varphi(t) = \boldsymbol{\Gamma} f \equiv f(t) + \int_L \gamma(t,\tau) f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{6}$$

其中 $\gamma(t,\tau)$ 称为(1) 的**预解核**. 它具有与(2) 类似的性质.

预解核具有下列著名的性质：

$$\gamma(t_0,t) + k(t_0,t) = -\int_L k(t_0,\tau)\gamma(\tau,t)\mathrm{d}\tau = -\int_L \gamma(t_0,\tau)k(\tau,t)\mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

现在讨论 $\boldsymbol{k}\varphi = 0$ 有非零解的情形. 我们希望也能得到类似于(6) 的解的表达式. 这时 $\boldsymbol{k}\varphi = 0$ 与 $\boldsymbol{k}'\psi = 0$ 有相同个数 ν 的线性无关解，分别设为 φ_1，$\varphi_2,\cdots,\varphi_\nu$ 与 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_\nu$. 且已知，当且仅当 $f(t)$ 适合条件(4) 时(1) 才可解. 我们设法把这一情况化归一齐次方程没有非零解的情形，从而使类似于(6) 的表示式成为可能.

我们先将 $\{\varphi_j\}$ 与 $\{\psi_j\}$ 分别正规正交化，即分别用它们的某些线性组合代替它们，使得

$$\int_L \varphi_j\varphi_k \mathrm{d}t = \delta_{jk}, \quad \int_L \psi_j\psi_k \mathrm{d}t = \delta_{jk}, \quad j,k = 1,2,\cdots,\nu, \tag{8}$$

其中 δ_{jk} 为 Kronecker 符号(例如，可用熟知的 Schmidt 正交化方法实现). 现在来考虑另一 Fredholm 方程

$$\varphi(t) + \int_L \left[k(t,\tau) + \sum_{j=1}^{\nu} \psi_j(t)\varphi_j(\tau)\right]\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \quad t\in L. \tag{9}$$

我们来证明：只要条件(4) 成立，(9) 的任何解也是(1) 的解. 事实上，设 $\varphi(t)$ 是(9) 的一个解(假定存在)，则由(9) 可知，

$$(\boldsymbol{k}\varphi)(t) + \sum_{j=1}^{\nu} a_j\psi_j(t) = f(t), \tag{10}$$

其中

$$a_j = \int_L \varphi(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t, \quad j = 1,2,\cdots,\nu. \tag{11}$$

将(10) 式两边乘以 $\psi_k(t)\mathrm{d}t$，沿 L 积分，由(4) 与(8)，可得

$$\int_L \psi_j \boldsymbol{k}\varphi \mathrm{d}t = \int_L \varphi \boldsymbol{k}' \psi_j \mathrm{d}t = 0, \tag{12}$$

于是可知 $a_j = 0$. 亦即(10) 式中的所有 $a_j = 0$，于是 $\boldsymbol{k}\varphi = f$. 我们的结论得证.

我们又可证明，方程(9) 中 $f = 0$ 时没有非零解. 事实上，设 φ 为它的一个解. 由上面已证结果知，它也是 $\boldsymbol{k}\varphi = 0$ 的解，故可写成 $\varphi = \sum_{j=1}^{\nu} b_j\varphi_j$ (b_j 为某些常数)；另一方面，因为这时所有 $a_j = 0$，故由(11) 与(8)，立刻可知所有 $b_j = 0$，即 $\varphi = 0$.

于是得知，非齐次方程(9) 对任何 $f(t)$ 唯一可解，且解可写成 $\varphi = \boldsymbol{\Gamma}_* f$，这里 $\boldsymbol{\Gamma}_*$ 为类似于(6) 中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的算子. 而且，如果条件(4) 满足，则 $\varphi = \boldsymbol{\Gamma}_* f$ 也是(1) 的解. $\boldsymbol{\Gamma}_*$ 称为**广义预解算子**.

当条件(4) 成立时，(1) 的一般解可写成

$$\varphi = \boldsymbol{\Gamma}_* f + \sum_{j=1}^{\nu} c_j\varphi_j. \tag{13}$$

易证，$\boldsymbol{\Gamma}_*$ 的相联算子 $\boldsymbol{\Gamma}'_*$ 是相联方程 $\boldsymbol{k}'\omega = g$ 的广义预解算子.

如果我们记(9) 中的核为

$$m(t,\tau) = k(t,\tau) + \sum_{j=1}^{\nu} \psi_j(t)\varphi_j(\tau),$$

则由(7)，可得类似的关系式

$$\begin{aligned}\gamma_*(t_0,t) + m(t_0,t) &= -\int_L m(t_0,\tau)\gamma_*(\tau,t)\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_L \gamma_*(t_0,\tau)m(\tau,t)\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\gamma_*(t_0,\tau)$ 为相应于算子 $\boldsymbol{\Gamma}_*$ 中的核：

$$\boldsymbol{\Gamma}_* f \equiv f(t_0) + \int_L \gamma_*(t_0,t)f(t)\mathrm{d}t,$$

称为**广义预解核**.

注 如果(2) 中 $k^*(t_0,t) \in H$，又设 $f(t) \in H$，则 $\varphi(t) = \boldsymbol{\Gamma} f$ 或 $\varphi(t) = \boldsymbol{\Gamma}_* f$ 也 $\in H$. 对于 $\boldsymbol{\Gamma}' g$，$\boldsymbol{\Gamma}'_* g$ 也有类似的结论.

3. 推广

我们还可把上面的结果推广到较为一般的情形. 再次考察方程(1) 与(3)，但设 L 是一条带有节点的分段光滑曲线，而核 $k(t,\tau)$ 除 t 或 τ 取节点之

值外是连续的，而整个说来又是有界的. 对已知函数 $f(t),g(t)$ 与未知函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 也作类似的假定. 这时(1) 与(3) 的解当然在节点处可能无意义，更谈不上要求它们在该点处满足方程.

这时，所有前面的结论与公式仍都成立. 对于 2 中的函数 $m(t_0,t)$ 与广义预解核 $\gamma_*(t_0,t)$，都与 $k(t_0,t)$ 有类似的性质. 特别，当 $k(t,\tau),f(t),g(t)\in H_0$ 时，它们也 $\in H_0$. 所有这些，我们就不再详细论述了.

参考文献

[1] 王传荣. 奇异积分$\int_L \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{n+1}}d\tau$的 Hadamard 主值. 数学年刊，1982，2：195-202.

[2] 马道玮. 一类含有 Carleman 位移的奇异积分方程的直接解法. 数学杂志，1983，3 (1)：91-100.

[3] 杜金元. 广义 Привалов 定理及 Plemelj 公式的简单证法. 数学研究报告（武汉大学），1980，5：43-50.

[4] 杜金元. 奇异积分的一些求积公式. 数学物理学报，1984，4 (2)：233-242.

[5] 杜金元. 高阶奇异积分的求积公式. 数学年刊，1985，6A (5)：625-636.

[6] 杜金元. 高阶奇异积分的求积公式（Ⅱ）. 数学杂志，1986，6 (4)：439-454.

[7] 杜金元. 高阶奇异积分求积公式的收敛性. 武汉大学学报（自然科学版），1984，2：17-26.

[8] 钟寿国. 一类奇异积分方程的可解条件. 武汉大学学报（数学专辑），1982，2：123-136.

[9] 钟寿国. 一类含 Hilbert 核奇异积分方程组的直接解法. 云南师范大学学报，1986，3：1-11.

[10] 闻国椿. 共形映射与边值问题. 北京：高等教育出版社，1985.

[11] 路见可. 留数定理的推广及其应用. 武汉大学学报（自然科学版），1978，3：1-8.

[12] LU Jian-ke. On singular integrals with singularities of high fractional order and their applications. Acta Math. Sci., 1982，2 (2)：211-218.

[13] 路见可. 复合边值问题. 武汉大学学报（自然科学版），1962，1：25-34；转载于高等学校自然科学学报（数学、力学、天文学版），1964（试刊），1：1-11.

[13]* LU Jian-ke. On compound boundary problems. Science in China，1965，14 (11)：1545-1555.

[14] 路见可. 周期 Riemann 边值问题及其在弹性力学中的应用. 数学学报，1963，13 (3)：343-388；后译成英文转载于［美］Chinese Math.，1964，4：372-422.

[15] 路见可. 关于双周期 Riemann 边值问题. 武汉大学学报（自然科学版），1979，3：1-10.

[16] 路见可. 双准周期的 Riemann 边值问题. 数学物理学报，1980，1 (1)：13-30.

[17] 路见可. 关于 Hilbert 核奇异积分方程. 数学进展，1965，8 (2)：161-167.

[18] 路见可. 开口弧段的双周期 Riemann 边值问题. 数学年刊，1980，1 (2)：289-298.

[19] 路见可. 奇异积分方程的直接解法（Ⅰ）. 武汉大学学报（自然科学版），1975，1：12-27.

[20] 路见可．奇异积分方程的直接解法（Ⅱ）．武汉大学学报（自然科学版），1975，4：44-57.
[21] 路见可．沿曲线的积分方程，其解具一阶奇异性．武汉大学学报（自然科学版），1964，1：7-13.
[22] LU Jian-ke. The approximation of Cauchy-type integrals by some kinds of interpolatory splines. J. Approx. Theory，1982，36（3）：197-212.
[23] LU Jian-ke. A class of quadrature formulas of Chebyshev type for singular integrals. J. Math. Anal. Appl.，1984，100（2）：416-435.
[24] LU Jian-ke. On complex quartic interpolating splines with higher deficiency. Chin. Ann. of Math.，1984，3：321-326.
[25] 路见可，王小林．具有 $\csc\frac{t-t_0}{a}$ 核的奇异积分反演公式．数学研究报告（武汉大学），1980，5：51-58.
[26] 路见可，王小林．具有 $\csc\frac{t-t_0}{a}$ 核的奇异积分方程．武汉大学学报（自然科学版），1980，4：22-30.
[27] 蔡海涛．平面弹性理论的周期接触问题．应用数学学报，1979，2（2）：181-195.
[28] ABRAMOWITZ M，STEGUN I A. Handbook of Mathematical Functions. New York：Dover，1964.
[29] ATKINSON K. The numerical solution of the Cauchy transform on simple closed curves. SIAM J. Numer. Anal. 1972，9（2）：284-299.
[30] CASE K M. Singular integral equations. J. Math. Phy.，1966，7（12）：2121-2124.
[31] CHAWLA M M，RAMAKRISHNAN T R. Modified Gauss-Jacobi quadrature formulas for the numerical evaluation of Cauchy-type singular integrals. BIT，1974，14（1）：14-21.
[32] FOX C. A generalization of the Cauchy principal value. Canadian J. Math.，1957，9（1），110-119.
[33] PETERS A S. The solution of certain integral equations with kernels $\frac{K(z,\zeta)}{z-\zeta}$. Commu. Pure Appl. Math.，1965，18（1-2）：129-146.
[34] SCHWARZ L. Théorie des Distributions，T. I，Strasbourg，1950.
[35] 维库阿著；路见可译．奇异积分方程组及某些边值问题．上海：上海科学技术出版社，1963（原本有 1970 年俄文第 2 版）.
[36] ГАХОВ Ф Д. Краевые Задачи. Москва：《Наука》，1977.
[37] ГАХОВ Ф Д，Черский Ю И. Уравнения Типа Свертка. Москва：《Наука》，1978.
[38] 戈鲁辛著；陈建功译．复变函数的几何理论．北京：科学出版社，1956.
[39] 冈察洛夫著；路见可等译．函数插补与逼近理论．北京：科学出版社，1958.
[40] ИВАНОВ В В. Теория Приближенных Методов и ее Применение к Численному Решению Сингулярных Интегральных Уравнений.《Киев》，1968.

[41] 利特温秋克著；赵桢等译．带位移的奇异积分方程与边值问题．北京：北京师范大学出版社，1982.

[42] 穆斯海里什维里著；朱季讷译．奇异积分方程．上海：上海科学技术出版社，1966（原书有1968年俄文第3版）.

[43] 纳唐松著；徐家福，郑维行译．函数构造论，上册．北京：科学出版社，1959.

[44] 普里瓦洛夫著；北京大学数学力学系数学分析与函数论教研室译．复变函数引论．北京：商务印书馆，1953.

[45] ПЫХТЕЕВ Г Н. Точные Методы Вычисления Интегралов Типа Коши. Новосибирск：《Наука》，1980.

[46] РОГОЖИНА И С. Об одной краевой задаче со смещениям для кусочно-аналитических функций. ИВУЗ Мат.，1965，2：139-151.

[47] САМКО С Г. Об разрешимости в замкнутой форма сингулярных интегральных уравнений. ДАН СССР，1969，189（3）：483-485.

[48] 斯米尔诺夫著；陈传璋译．高等数学教程：第四卷第一分册，北京：人民教育出版社，1958.

[49] ЧИБРИКОВА Л И. О краевой задаче римана для автоморфных функний. Уч. зап. Казанск. ун-та，1956，116（4）：59-109.

[50] ЧИБРИКОВА Л И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Уч. зап. Казанск. ун-та，1962，122：95-124.

[51] LI Hong-zhen. The one sided Hadamard principal value for singular integrals of high order and its applications. J. Sichuan Normal Univ.，1991，14（1）：29-30.

[52] LU Jian-ke. Peano derivatives and singular integrals of arbitrary order. Wuhan Univ. J. of Natural Sci.，1996，1（1）：9-13.

[53] 钟寿国．非整数阶高阶奇异积分的微分公式．武汉大学学报（自然科学版），2000，46（1）：1-4.

[54] 王传荣．复二元函数高阶奇异积分的Hadamard主值．福州大学学报，1979，2：173-183.

[55] 路见可．有关高阶奇异积分的Bertrand-Poincaré型换序公式．数学研究与评论，1984，4（4）：25-30.

[56] 钟寿国．开口弧上高阶奇异积分的B-P型换序公式．数学杂志，1997，17（2）：145-150.

[57] 钟寿国．非整数阶高阶奇异积分的换序公式．武汉大学学报（自然科学版），2000，46（3）：261-265.

[58] 钟寿国．实轴上几种高阶奇异积分的换序公式．数学杂志，2000，20（3）：355-358.

[59] 钟寿国．应用高阶奇异积分计算普通积分的粘合方法．数学物理学报，1991，11（4）：457-466.

[60] 钟寿国．推广的留数定理及其应用．武汉：武汉大学出版社，1993.

[61] 钟寿国．第二类无界多连通域上推广的留数定理．数学物理学报，1994，14

(2): 163-167.

[62] 钟寿国. 超越奇异积分和推广的留数定理. 数学物理学报, 1995, 15 (1): 43-48.

[63] LU Jian-ke. On the Dirichlet problems of doubly-periodic analytic functions. Acta Math. Sci., 1983, 3 (4): 387-395.

[63]* 路见可. 双周期解析函数的 Dirichlet 问题. 数学物理学报, 1984, 4 (1): 9-16.

[64] 路见可, 钟寿国. 积分方程论. 北京: 高等教育出版社, 1990.

[65] 路见可. 双周期解析函数的变态 Dirichlet 问题. 武汉大学学报 (自然科学版), 1984, 4: 1-8.

[66] LU Jian-ke. On Dirichlet problems of doubly quasi-periodic analytic functions. Acta Math. Sci., 1985, 5 (2): 195-201.

[66]* 路见可. 关于双准周期解析函数的 Dirichlet 问题. 数学物理学报, 1985, 5 (2): 173-178.

[67] LU Jian-ke. Some lemmas on doubly quasi-periodic analytic functions in multiplication. Appl. Math. and Mech., 1986, 7 (7): 627-632.

[67]* 路见可. 乘法双准周期解析函数的一些引理. 应用数学和力学, 1986, 7 (7): 583-587.

[68] LU Jian-ke. The Hilbert boundary problem of doubly periodic analytic functions. Chin. Ann. of Math., 1988, 9B (1): 38-49.

[69] 路见可, 张桂生. 具一阶奇性解的奇异积分方程. 武汉大学学报 (自然科学版), 1997, 43 (3): 273-280.

[70] 钟寿国. 再论奇异积分方程组直接解法的可解条件. 数学物理学报, 1996, 16 (4): 473-478.

[71] 路见可. 某些带平移的奇异积分方程. 武汉大学学报 (自然科学版), 1989, (1): 1-8.

[72] 路见可. 带复平移的奇异积分方程组. 高等学校应用数学学报, 1989, 4 (4): 516-524.

[73] DU Jin-yuan, LU Jian-ke. On a class of singular integral equations with translations. Chin. Ann. Math., 1990, 11B (1): 105-117.

[74] DU Jin-yuan. On a class of singular integral equations with complex translations. Proceeding of the Fifth International Colloquium on (Finite and Infinite Dimensional) Complex Analysis (ed. by Yang Lo et al.), Beijing: 1997, 45-49.

[75] DU Jin-yuan, Hu Jicheng. Singular integral equations with complex translations. Acta Math. Sci., 1999, 19 (4): 469-480.

[76] LU Jian-ke. Boundary value problems for analytic functions and integral equations with transformations. Complex Analysis and its Applications (ed. by. C. C. Yang et al.), Pitman Research Notes in Math. Series, 1994, 305: 318-323.

[77] DU Jin-yuan. Quadrature formulas for singular integrals with Hilbert kernel. J.

of Computational Math., 1988, 6 (3): 205-225.

[78] DU Jin-yuan, HU Ji-cheng. On quadrature formulae of hypersingular integrals. Proceedings of the Second ISAAC Congress, vol. 1 (ed. by H. G. W. Begehr et al.), Netherlands: Kluwer Acad. Publ, 2000: 143-146.

[79] 杜金元. 带 Hilbert 核的奇异积分方程的数值解法. 计算数学, 1989, 2: 148-166.

[80] DU Jin-yuan. On the numerical solution for singular integral equations with Hilbert kernel. Chinese J. Num. Math. & Appl., 1989, 11 (2): 9-27.

[81] 路见可, 杜金元. 奇异积分方程的数值解法. 数学进展, 1991, 20 (3): 278-293.

[82] DU Jin-yuan. On the trigonometric polynomials interpolating approximate solutions of singular integral equations with Hilbert kernel. Integral Equations and Boundary Value Problems (ed. by G. C. Wen, Z. Zhao), Singapore: World Scientific, 1991, 26-33.

[83] GONG Ya-fang, DU Jin-yuan. Galerkin solution to a singular integro-differential equation. Boundary Value Problems, Integral Equations and Related Problems (ed. by J. K. Lu, G. C. Wen), Singapore: World Scientific, 2000, 62-69.

[84] DU Jin-yuan. The collocation methods for singular integral equations with Cauchy kernels. Acta Math. Sci., 2000, 20B (3): 289-302.

[85] ABBASBANDY S, DU Jin-yuan. Numerical implements of Cauchy-type integral equations. Korean J. Comput. & Appl. Math., 2002, 9 (1): 253-260.

[86] 王小林. 封闭曲线上奇异积分方程的样条逼近解法. 数学物理学报, 1997, 17 (3): 348-355.

[87] 王小林, 龚亚方. 一类奇异积分和 Cauchy 型积分关于积分曲线的稳定性. 数学学报, 1999, 42 (2): 343-350.

[88] 王小林, 龚亚方. Cauchy 核奇异积分方程关于积分曲线的稳定性. 数学年刊, 2001, 22A (4): 447-452.

[89] 章红梅, 王传荣. Riemann 边值问题的解关于边界曲线的稳定性. 福州大学学报(自然科学版), 2001, 29 (1): 1-4.

[90] 蔡国才, 王传荣. Cauchy 核奇异积分关于 R 类边界曲线摄动的稳定性. 福州大学学报(自然科学版), 2002, 30 (4): 461-463.

[91] 刘红爱, 王传荣. 复合边值问题的解关于边界曲线摄动的稳定性. 福州大学学报(自然科学版), 2002, 30 (4): 464-468.

[92] ZHANG Hong-mei, WANG Chuan-rong, ZHU Yu-can. Stability of solutions to Hilbert boundary value problem under pertubation of the boundary curve. J. Math. Anal. Appl., 2003, 284 (2): 601-617.

[93] LIU Hua, LU Jian-ke. A generalized Riemann boundary value problem. Wuhan Univ. J. of Natural Sci., 2000, 5 (2): 147-149.

[94] LU Jian-ke. On solution of a kind of Riemann boundary value problem with square

roots. Acta Math. Sci., 2002, 22B (2): 145-149.

[95] LU Jian-ke. Non-homogeneous Riemann boundary value problem with radicals. Wuhan Univ. J. of Natural Sci., 2002, 7 (4): 379-382.

[96] 路见可. 一种非线性奇异积分方程的解法. 数学年刊, 2002, 23A (5): 619-624.

[96]* LU Jian-ke. On the solution of a kind of nonlinear singular integral equation. Chin. J. of Contemporary Math., 2002, 23 (4): 409-414.

[97] LU Jian-ke. On the method of solution for a kind of nonlinear singular integral equations. Acta Math. Sci., 2004, 24B (3): 507-512.

[98] LU Jian-ke. On Hilbert boundary value problems with square root. Math. Theory and Appl., 2003, 22 (3): 1-4.

[99] LU Jian-ke. On Hilbert boundary value problems with radical. Acta Math. Sci., 2005, 25B (4): 755-760.

[100] 路见可. 平面弹性复变方法. 第3版. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.

[101] CHEN Jing-song, LU Jian-ke. Riemann boundary value problem with square roots on an open arc. Wuhan Univ. J. of Natural Sci., 2007, 12 (2): 193-197.

[102] 路见可, 钟寿国, 刘士强. 复变函数（修订版）. 武汉: 武汉大学出版社, 2006.

[103] 陈荆松, 路见可. 带根号的 Riemann 边值问题. 数学杂志, 2007, 27 (6): 696-700.

[104] LU Jian-ke. Extension of solutions to Riemann boundary value problems and its application. Acta Math. Sci., 2007, 27B (4): 694-702.

[105] ZHONG Shou-guo. Characteristic singular integral equations with singularity-one solutions. Proc. of Symposium on Hyper-complex Analysis (ed. by Tao Qian et al.), 2008, Macau: 97-107.

[106] ZHONG Shou-guo. Singular intergral equations along an open arc with solutions having singularities of higher order. Acta Math. Sci., 2005, 25B (2): 193-200.

[107] 钟寿国, 赵新泉. 具高阶奇性解的特征奇异积分方程（Ⅰ）. 武汉大学学报（自然科学版）, 1997, 43 (5): 553-558.

[108] 钟寿国, 赵新泉. 具高阶奇性解的特征奇异积分方程（Ⅱ）. 武汉大学学报（自然科学版）, 1998, 44 (1): 5-10.

[109] 钟寿国. 具高阶奇性解的奇异积分方程的推广 Noether 定理. 数学年刊, 1998, 19A (3): 361-366.

[110] ZHONG Shou-guo. On the system of complex singular intergral equations with solutions having singularities of higher order in closed form. Complex Variables and Elliptic Equations, 2007, 52 (10-11): 979-992.

索　引

九画

十画

十一画

十二画

十三画

十六画

[General Information]
书名=解析函数边值问题教程
作者=路见可著
页数=447
SS号=12620441
DX号=
出版日期=2009.12
出版社=武汉大学出版社